TD – Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Exercice de la banque CCINP n°63. — *Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. On pose, pour tout $x \in E$, $||\, x \,|| = \sqrt{\langle x\,,\,x \rangle}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.*

1. *Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x)\,,\,x \rangle = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?*
2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes.*
   - *i.* $u \circ u^* = u^* \circ u$
   - *ii.* *Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x)\,,\,u(y) \rangle = \langle u^*(x)\,,\,u^*(y) \rangle$.*
   - *iii.* *Pour tout $x \in E$, $||\, u(x) \,|| = ||\, u^*(x) \,||$.*

Exercice de la banque CCINP n°66. —

1. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Prouver que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ alors* $\mathrm{Spec}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. *Prouver que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.*
3. *Prouver que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, pour tout $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$:*
$$A\,B = B\,A \implies A^2\,B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$$
4. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$.*

Exercice de la banque CCINP n°68. — *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que A est diagonalisable de quatre manière.*
   - *(a) sans calcul ;*
   - *(b) en calculant directement le déterminant det$(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres ;*
   - *(c) en utilisant le rang de la matrice ;*
   - *(d) en calculant A^2.*
2. *On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Exercice de la banque CCINP n°78. — *Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $\langle x\,,\,y \rangle$ le produit scalaire de $x \in E$, $y \in E$ et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.*

1. *Soit u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, $||\, u(x) \,|| = ||\, x \,||$.*
   - *(a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x)\,,\,u(y) \rangle = \langle x\,,\,y \rangle$.*
   - *(b) Démontrer que u est bijectif.*
2. *On note $\mathbf{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \,:\, \forall\, x \in E \quad ||\, u(x) \,|| = ||\, x \,||\}$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.*
3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que :*
$$u \in \mathbf{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E$$

Exercice 1 ★☆☆ — *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que* $\det(f) = \det(f^*)$.

`determinantAdjoint`

Exercice 2 ★★☆ — *Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire usuel.*

1. *Soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$. À l'aide du théorème de Riesz, démontrer qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que :*
$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ a_1\, x_1 + \ldots + a_n\, x_n = 0\}$$
2. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$. Démontrer qu'il existe une matrice $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbf{R})$ telle que :*
$$F = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\, x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}\, x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n-p,1}\, x_1 & + & \ldots & + & a_{n-p,n}\, x_n & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

`equationSousEspaceVectorielRn`

Exercice 3 ★☆☆ — *Soient un entier $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire :*
$$\langle \cdot\, , \cdot \rangle \ \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}\left(A^\top B\right) \end{array} \right.$$

1. *Calculer l'adjoint de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par :*
$$f \ \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$
2. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit une isométrie (resp. autoadjoint).*

`calculAdjointMultiplicationMatricielle`

Exercice 4 ★☆☆ — *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que* $\mathrm{Ker}\,(u^*) = \mathrm{Im}\,(u)^\perp$ *et* $\mathrm{Im}\,(u^*) = \mathrm{Ker}\,(u)^\perp$.

`noyauImageEndomorphismeAdjoint`

Exercice 5 ★☆☆ — *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, le groupe $(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}), \times)$ n'est pas commutatif.*

`OnRAnabelien`

Exercice 6 ★★☆ — *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathbf{O}(E)$. Posons $v = u - I_d$.*

1. *Démontrer que* $\mathrm{Ker}\,(v) = (\mathrm{Im}\,(v))^\perp$.
2. *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n := \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k \in \mathcal{L}(E)$. Notons p le projecteur orthogonal sur* $\mathrm{Ker}\,(v)$. *Démontrer que, pour tout $x \in E$:*
$$u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} p(x)$$

`projectionOrthogonaleNoyauIsometrieMoinsIdentite`

Exercice 7 ★★★ — *Soit un entier $n \geqslant 2$.*

1. *Justifier que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*
2. *Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ sont les deux composantes connexes par arcs de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.*

`composantesConnexesParArcsOnR`

Exercice 8 ★★★ — *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On souhaite démontrer que $\mathbf{O}(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales.*

1. *On suppose que $n = 1$.*
   (a) *Justifier que $\mathbf{O}(E) = \{\mathrm{id}_E, r\}$, où r est une réflexion orthogonale de E que l'on précisera.*
   (b) *Démontrer que $\mathbf{O}(E)$ est engendré par r.*
2. *On suppose que $n = 2$.*
   (a) *Soit u une isométrie de E. Démontrer que u est une réflexion orthogonale si et seulement si u est une isométrie négative.*
   (b) *Démontrer que toute isométrie positive de E est le produit de deux réflexions orthogonales de E.*
   (c) *Conclure.*
3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et r une réflexion orthogonale de F. Démontrer que l'application $\widetilde{r}$ définie par :*

$$\widetilde{r} \left| \begin{array}{ccc} E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_{F^\perp} & \longmapsto & r(x_F) + x_{F^\perp} \end{array} \right. \qquad [\textit{prolongement canonique de } r \textit{ à } E]$$

   est une réflexion orthogonale de E.
4. *Démontrer le résultat en raisonnant par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$.*

`reflexionsOrthogonalesEngendrentGroupeIsometriesVectorielles`

Exercice 9 ★☆☆ — *On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. Donner une description géométrique d'une isométrie indirecte de $\mathbf{R}^3$, qui possède un plan stable.*

`isometrieIndirecteEspacePlanStable`

Exercice 10 ★★☆ — *On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle et on considère sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$, qui l'oriente. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/4 & 3/4 \\ -\sqrt{6}/4 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrer que u est une isométrie vectorielle directe de $\mathbf{R}^3$.*
2. *Déterminer un vecteur unitaire f_3 de l'axe de la rotation u.*
3. *Déterminer deux vecteurs f_1 et f_2 tels que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.*
4. *Quel est l'angle de la rotation axiale u ?*

`elementsCaracteristiquesIsometrieDirecteEspace`

Exercice 11 ★★☆ — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont notées $[A]_{\bullet,1}, \ldots, [A]_{\bullet,n}$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire usuel et on note $|| \cdot ||$ la norme associée.*

1. *On suppose que $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.*
   (a) *Justifier que $([A]_{\bullet,1}, \ldots, [A]_{\bullet,n})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.*
   (b) *En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt, démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = Q\,R$.*
2. *Démontrer que* $|\det(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} || [A]_{\bullet,j} ||$ $\qquad$ [*inégalité d'Hadamard*].

`decompositionQrInegaliteHadamard`

Exercice 12 ★★★ — *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$.*

1. *Soit F un sous-espace vectoriel stable par u.*
   (a) *Démontrer que $F^\perp$ est également stable par u.*
   (b) *Démontrer que l'endomorphisme u_F de F (équipé du produit scalaire induit par celui de E) est normal.*
   (c) *Justifier que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ de $F^\perp$ (équipé du produit scalaire induit par celui de E) est normal.*
2. *On suppose que $n = 2$.*
   (a) *On suppose que u possède une valeur propre réelle. Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que :*
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
   (b) *On suppose que u ne possède aucune valeur propre réelle. Démontrer que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, il existe $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ tel que :*
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
   puis donner une interprétation géométrique de u.
3. *Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, des couples $(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ tels que :*
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & & & & & 0 \\ b_1 & a_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & a_p & -b_p & & & & \\ & & & b_p & a_p & & & & \\ & & & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & \lambda_q \end{pmatrix}$$
   On pourra raisonner par récurrence sur la dimension $n \geqslant 1$ de E.

`reductionEndomorphismesNormaux`

Exercice 13 ★☆☆ — *Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et s une symétrie de E. Démontrer que s est un endomorphisme autoadjoint de E si et seulement si s est une symétrie orthogonale.*

`symetrieOrthogonaleAutoadjoint`

Exercice 14 ★☆☆ — *Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme autoadjoint de E. Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes de u. Démontrer, sans faire appel au théorème spectral, que $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.*

`endomorphismeAutoadjointSousEspacesPropresOrthogonaux`

Exercice 15 ★☆☆ — *Soient un entier $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que :*
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A)} \lambda^2 \ \dim\left(E_\lambda(A)\right)$$

`sommeCarresCoefficientsMatriceSymetriqueSommeCarresValeursPropres`

Exercice 16 ★☆☆ — *Soient* $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ *un espace euclidien,* a *un vecteur unitaire de* E *et* $k \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. *Considérons :*

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + k \langle x , a \rangle a \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que* u *est un endomorphisme autoadjoint.*
2. *Démontrer que* u *est un automorphisme de* E.
3. *Déterminer les éléments propres de* u.

`elementsPropreIdentiteModifieeVecteurUnitaire`

Exercice 17 ★★☆ — *Soient* A *et* B *deux vecteurs de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ *linéairement indépendants. Posons :*

$$M = B \times A^\top + A \times B^\top$$

1. *Démontrer que* M *est diagonalisable sur* $\mathbf{R}$.
2. *Déterminer le noyau de* M, *puis les valeurs propres de* M.

`elementsPropreTransBFoisAPlusTransAFoisB`

Exercice 18 ★★★ — *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. *Posons* $S := \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)$.

1. *Démontrer que* S *est diagonalisable sur* $\mathbf{R}$.
2. *Notons* $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ *les valeurs propres de* S. *Démontrer que, pour toute valeur propre réelle* μ *de* A, $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

`partieSymetriqueMatriceCoefficientsReels`

Exercice 19 ★★☆ — *Soient un entier* $n \geqslant 1$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. *On note* $|| \cdot ||$ *la norme euclidienne usuelle sur* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ *et on pose :*

- $|||\, A \,||| := \sup \{ ||\, A\, X \,|| \ : \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ et } ||\, X \,|| = 1 \}$ [*norme subordonnée de la matrice* A]
- $\rho\left(A^\top A\right) := \max \left\{ |\lambda| \ : \ \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}\left(A^\top A\right)\right\}$ [*rayon spectral de la matrice* $A^\top A$]

Démontrer que $|||\, A \,|||^{\,2} = \rho\left(A^\top A\right)$.

`normeMatricielleSubordonneeRayonSpectral`

Exercice 20 ★★★ — *Soient* $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})^2$ *et* $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction polynomiale bijective telle que* $f(A) = f(B)$. *Démontrer que* $A = B$.

`fonctionPolynomialeBijectiveMatricesSymetriques`

Exercice 21 ★★★ — *Soit* $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})^2$ *tel que* $A\,B = B\,A$. *Démontrer qu'il existe* $P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ *telle que les matrices* $P^\top A\,P$ *et* $P^\top B\,P$ *soient diagonales.*

`coOrthodiagonalisationMatricesSymetriques`

Exercice 22 ★★☆ — *Soit un entier* $n \geqslant 2$.

1. *Démontrer que* $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ *est une partie fermée de* $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. *Est-elle compacte ?*
2. *Démontrer que* $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ *est un ouvert de* $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, *puis déterminer son adhérence dans* $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

`proprietesTopologiquesMatricesSymetriquesPositivesDefiniesPositives`

Exercice 23 ★★☆ — *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

1. *Démontrer que, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} > 0$.
2. *Démontrer que* $\det(A) \leqslant \left(\dfrac{\operatorname{tr}(A)}{n}\right)^n$.
3. *En considérant la matrice* $D = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$ *et la matrice* $B = D\,A\,D$, *démontrer que* $\det(A) \leqslant a_{1,1} \dots a_{n,n}$.
4. *Soit* $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. *Démontrer que* $\det(M) \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2}$ *[inégalité d'Hadamard]*.

`inegaliteDeterminantTraceMatriceSymetriqueDefiniePositiveInegaliteHadamard`

Exercice 24 ★☆☆ — *Soient un entier* $n \geqslant 2$ *et* $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

1. *Démontrer que l'application :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & X^\top A\,Y \end{array} \right.$$

   est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
2. *En considérant une base orthonormée* $\mathcal{B}$ *de l'espace euclidien* $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \varphi)$, *démontrer qu'il existe une matrice* $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ *telle que* $A = P^\top P$.

`decompositionCholesky`

Exercice 25 ★★★ — *Soit* E *un espace euclidien de dimension* $n \geqslant 2$.

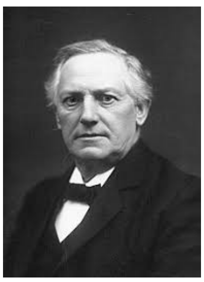
1. *Soit* $u \in \mathcal{S}^+(E)$. *Démontrer qu'il existe un unique* $v \in \mathcal{S}^+(E)$ *tel que* $v^2 = u$.
2. *Soit* $u \in \mathbf{GL}(E)$. *Démontrer qu'il existe un unique couple* $(w, s) \in \mathbf{O}(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ *tel que* $u = w \circ s$.
3. *Soit* $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. *Démontrer qu'il existe un unique couple* $(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ *tel que* $A = \Omega\,S$.
4. *Démontrer que l'application :*

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega\,S \end{array} \right.$$

   est un homéomorphisme, i.e. que π *est bijective, continue et* π^{-1} *est continue.*

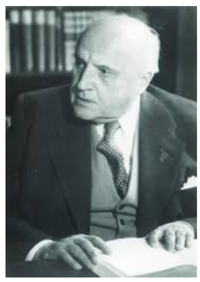
`racineCarreeMatriceSymetriquePositiveDecompositionPolaire`

André-Louis Cholesky (1875-1918)



Jørgen Pedersen Gram (1850-1916)

Jacques Hadamard (1865-1963)



Erhard Schmidt (1876-1959)