TD. Dénombrement et probabilités

Ex 11 :

$$(a_1+a_2+\dots+a_p)^n = \underbrace{(a_1+a_2+\dots+a_p)\times\dots\times(a_1+a_2+\dots+a_p)}_{n \text{ fois}}$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_p)\in I} \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{p-1}}{k_p} a_1^{k_1} a_2^{k_2}\dots a_p^{k_p}$$

choix des a_1 parmi les n termes, choix des a_2 parmi les $n-k_1$ termes, choix a_p parmi les $n-k_1-\dots-k_{p-1}$ termes

Or

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-\sum_{i=1}^{p-2}k_i}{k_{p-1}}\binom{n-\sum_{i=1}^{p-1}k_i}{k_p}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}} \times \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!} \times \dots \times \frac{\cancel{(n-\sum_{i=1}^{p-2}k_i)!}}{k_{p-1}!\,(n-\sum_{i=1}^{p-1}k_i)!} \times \frac{\cancel{(n-\sum_{i=1}^{p-1}k_i)!}}{k_p!\,\underbrace{(n-\sum_{i=1}^{p}k_i)!}_{0!=1}}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_p!}$$

Finalement on a bien :

$$(a_1+\dots+a_p)^n = \sum_{(k_1,\dots,k_p)\in I} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_p!}\, a_1^{k_1} a_2^{k_2}\dots a_p^{k_p}.$$

Ghanim Rayan
MPI*

TD n°1 exercice n°12

Q1 On s'intéresse à l'ensemble $[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]}$.

$$[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} = \bigcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{A\in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} \underbrace{\{ f \in [\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} : f([\![1,p]\!]) = A\}}_{B_A} \quad (1)$$

On fixe $k \in [\![1,n]\!]$ et $A \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

On pose $\gamma = \{ f \in \cancel{[\![1,k]\!]}\ A^{[\![1,p]\!]} : f \text{ est surjective}\}$
et

$$\varphi \begin{vmatrix} B \to \gamma \\ f \mapsto f^{|A} \end{vmatrix}$$

__φ bien définie:__ Soit $f \in B$,
$f([\![1,p]\!]) = A$ donc la construction est bien définie et $f^{|A}$ est bien surjective donc dans γ

__φ injective:__ Soit $(f_1, f_2) \in B^2$ tel que $f_1^{|A} = f_2^{|A}$

- f_1 et f_2 ont même ensembles de départ et d'arrivée.
- Soit $y \in [\![1,p]\!]$

$$f_1(y) = f_1^{|A}(y) = f_2^{|A}(y) = f_2(y)$$

D'où $f_1 = f_2$

Ex 13 : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, d'où :

$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

idem pour $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$

$Y(\Omega) = [\![0, m]\!]$.

$\forall \ell \in [\![0, m]\!] \quad P(Y=\ell) = \binom{m}{\ell} p^\ell (1-p)^{m-\ell}$

Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$ $(Z(\Omega) = [\![0, m+n]\!])$

$$(Z=k) = \bigsqcup_{i=0}^{k} ((X=i) \cap (Y=k-i)).$$

Donc

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)$$

$$\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X=i) P(Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} p^k (1-p)^{n+m-k}$$

Or la formule de Vandermonde livre que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

Donc

$$P(Z=k) = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$$

Donc $Z \sim \mathcal{B}(n+m, p)$

D'où

$E(Z) = (n+m)p \qquad V(Z) = (n+m)\, p(1-p)$

Ghanim
Rayan
MP2*

TD n°1 exercice n°14.

On considère deux lancers de dé indépendants et on pose

X et Y les variables aléatoires comptant respectivement le numéro apparaissant sur le premier et le deuxième dé.

On considère qu'ils sont à 6 faces.

On considère $(X-Y=0)$ et $(X+Y=3)$

L'intersection de ces évènements est vide mais ces deux évènements ne sont pas négligeables.

Si $X+Y \perp\!\!\!\perp X-Y$ alors

$$0 = P(X-Y=0 \cap X+Y=3) = \underbrace{P(X-Y=0)}_{\neq 0}\ \underbrace{P(X+Y=3)}_{\neq 0}$$

ce qui contredit l'intégrité de $\mathbb{R}$

Donc $X+Y \not\!\perp\!\!\!\perp X-Y$.

$1-p)^{n-k}$.

$1-p)^{m-l}$

$0, m+n]\!]$

$)$.

$) p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}$

$1+m-k$

livre que

$p) p(1-p)$

Ex 15 :

1. Soit $u \in \mathbb{R}$.

$\varphi_X(u) = E(e^{iuX})$

$= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{iux} P(X=x)$ (formule de transfert).

$= \sum_{x \in X(\Omega)} (\cos(ux) + i\sin(ux)) P(X=x)$

donc φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car cos et sin le sont

De plus en fixant $k \in \mathbb{Z}$.

$\varphi_X(u+2k\pi) = \sum_{x \in X(\Omega)} (\cos(ux+2\pi) + i\sin(ux+2\pi)) P(X=x)$

$= \varphi_X(u)$ (cos et sin 2π-périodique)

Donc φ_X est 2π-périodique

2. $\varphi_X(0) = \sum_{x \in X(\Omega)} 1 \times P(X=x) = 1$ (P est une probabilité)

Soit $u \in \mathbb{R}$.

$\varphi'_X(u) = \sum_{x \in X(\Omega)} (ix\cos(ux) - x\sin(ux)) P(X=x))$

$\varphi'_X(0) = i \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) = iE(X)$

$\varphi''_X(u) = -\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 (\cos(ux) + i\sin(ux)) P(X=x)$

$\varphi''_X(0) = -\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X=x) = -E(X^2)$.

3. Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Soit $u \in \mathbb{R}$

$\varphi_X(u) = E(e^{iuX}) = \sum_{x \in \{0,1\}} e^{iux} P(X=x)$.

$= P(X=0) + e^{iu} P(X=1) = 1 + (e^{iu}-1)p$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{iu})^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (1-p+pe^{iu})^n$$

4. $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iun} du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) e^{iu(x-n)} du$$

$$= P(X=n) + \int_0^{2\pi} \sum_{x \in X(\Omega)\setminus\{n\}} e^{iu(x-n)} P(X=x) du \quad (*)$$

Or $X(\Omega)\setminus\{n\}$ est fini (Ω l'est)

Donc on a

$$(*) = P(X=n) + \sum_{x \in X(\Omega)\setminus\{n\}} P(X=x) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{iu(x-n)} du}_{=0 \text{ car } x \neq n}$$

$$= P(X=n).$$

Donc

$$P(X=n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iun} du.$$

5. Supposons $\varphi_X = \varphi_Y$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$P(X=n) \underset{Q4}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iun} du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_Y(u) e^{-iun} du = P(Y=n)$$

Donc les deux variables sont égales en loi

6. Soit $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{X+Y}(u) = E(e^{iu(X+Y)})$$
$$= E(e^{iuX} e^{iuY}).$$

Comme X et Y sont indépendantes, le lemme des coalitions livre ~~Xne~~ e^{iuX} et ~~Ye~~ e^{iuY} le sont aussi. D'où

$$\varphi_{X+Y}(u) = E(e^{iuX})E(e^{iuY}) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u).$$

Comme le résultat est vrai pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y.$$

Ex 19 :

1. $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} E(X_k)$ (linéarité de l'expérience)

$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} m$ (les X_k sont indépendants et ont mêmes loi)

$E(X) = m$

$V(X) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} V(X_k)$ (les X_k sont indépendants)

$V(X) = \frac{1}{n} \sigma^2.$

2. $E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - X)^2\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} E((X_k - X)^2).$

(Formule Koenig-Huygens) $= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} V(X_k - X) - \underbrace{E(X_k - X)^2}_{=0}$

$= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} V(X_k - X)$

Calculons $V(X_k - X)$.

Ghanim
Rayan
MPI

TD n°1 exercice n°20

Établissons que

$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$P(X_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!}(1-p)^n \overbrace{\left(\frac{p}{1-p}\right)^k \frac{1}{k!}}^{\text{indépendant de } n}$

Il suffit d'établir $C_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$:

Par la formule de Stirling : $\frac{n!}{(n-k)!} \sim e^{-k} n^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}$

$\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1+\frac{k}{n-k})} = e^{(n-k)\left(\frac{k}{n-k} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

$= e^k e^{o(1)}$

$\to e^k$

D'où $C_n \sim (1-p)^n n^k \underset{(CC)}{\overset{n \to +\infty}{\longrightarrow}} 0$

Donc $P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Or pour $l \in \mathbb{N}$ $P(X_n \leq l) = \sum_{k=0}^{l} \overbrace{P(X_n = k)}^{\underset{n \to +\infty}{\to} 0} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (l fini)

Ainsi

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \boxed{P(X_n \leq k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

Ghanim
Rayan
MPI

TD n°1 exercice n°22

Q1 Soit $X \in L_1$ et positive
$a \in \mathbb{R}_{>0}$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve :

$$X = \mathbb{1}_{(X\geq a)} \cdot X + \overbrace{\mathbb{1}_{(X<a)} \cdot X}^{\geq 0}$$

$$X \geq \overbrace{\mathbb{1}_{(X\geq a)} \cdot X}^{\geq a \cdot \mathbb{1}_{(X\geq a)}} \geq a \mathbb{1}_{(X\geq a)}$$

On applique l'espérance qui est croissante :

$$E(X) \geq a\, E(\mathbb{1}_{(X\geq a)}) = a\, P(X \geq a)$$

D'où $\quad P(X\geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Q2 Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$(X \geq x) = (e^{2X} \geq e^{2x}) \quad (t \mapsto e^{2t} \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R})$$

Par l'inégalité de Markov.

$$P(X\geq x) = P(e^{2X} \geq e^{2x}) \leq \frac{E(e^{2X})}{e^{2x}}$$

D'où

$$\boxed{P(X\geq x) \leq e^{-2x} E(e^{2X})}$$

o (l'infini)

Ghanim
Ryan
MPI*

TD n°1 exercice n°23

Soit X_1 une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ et X_2 de même où $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendants.

On pose $Y = X_1 + X_2$.
Supposons par l'absurde que Y suit la loi uniforme sur $\{0,\dots,2n\}$

Alors $P(Y=0) = P(X_1=0)P(X_2=0)$ $\quad (X_1 \perp X_2)$
$P(Y=2n) = P(X_1=n)P(X_2=n)$

De plus,
$(X_1=0)\cap(X_2=n)) \sqcup ((X_1=n)\cap(X_2=0)) \subset (Y=n)$
d'où
$P(X_1=n)P(X_2=0) + P(X_1=n)P(X_2=0) \leq P(Y=n)$
Y suit la loi uniforme donc

$$\begin{cases} P(X_1=0)P(X_2=0) = \frac{1}{2n} \\ P(X_1=n)P(X_2=n) = \frac{1}{2n} \\ P(X_1=n)P(X_2=0) + P(X_1=0)P(X_2=n) \leq \frac{1}{2n} \end{cases}$$

On a donc que le système suivant a une solution

$$(S) \begin{cases} ab = \frac{1}{2n} \\ cd = \frac{1}{2n} \\ ab + cd \leq \frac{1}{2n} \end{cases}$$

d'inconnu $(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}_{>0})^4$

Or ce n'est pas le cas. En effet, soit $(a,b,c,d) \in [0,1]^4$ solution du système.

$$\frac{1}{4n^2} = abcd$$

$$ab + cd \le \frac{1}{2n}$$

donc $ab < \frac{1}{2n}$ et $cd < \frac{1}{2n}$ d'où $abcd < \frac{1}{4n^2}$

La contradiction nous livre lorsqu'une telle variable aléatoire Y ne peut pas suivre la loi uniforme.

On a que la somme de deux variables aléatoires indépendantes sur $[0,n]$ ne peut pas suivre la loi uniforme sur $[0,2n]$.

<u>A fortiori</u>, deux dés truqués ne peuvent pas former une loi uniforme en regardant la somme de leurs chiffres.

Ghoneim
Rayan
MPI*

TD n°1 exercice n°24

On suppose introduit (Ω, P) un univers probabilisé.
Soit $\omega \in \Omega$

On pose $M := M(\omega)$ $U := U(\omega)$ et $V := V(\omega)$

$$M = U^T V = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} (Y_1 \dots Y_n) = \begin{pmatrix} X_1 Y_1 & \dots & X_1 Y_n \\ \vdots & & \vdots \\ X_n Y_1 & \dots & X_n Y_n \end{pmatrix}$$

On pose $C_i = \begin{pmatrix} X_1 Y_i \\ \vdots \\ X_n Y_i \end{pmatrix}$ où $i \in [\![1, n]\!]$ la i-ème colonne de M

$rg(M) = \dim(\mathrm{Vect}(C_i))$
Soit $k \in [\![1, n]\!]$
Si $Y_k(\omega) = 0$ alors $C_k = 0$
Si $Y_k(\omega) = 1$ alors $C_k = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$

Ainsi $rg(M) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right)\right) \in [\![0, 1]\!]$

D'où $rg(\Omega) = \{0, 1\}$
On souhaite déterminer $P(rg(M) = 0)$

$rg(M) = 0 \iff M = 0$

Ghomm Rayan
MPI

$$(rg(M)=0) = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\right) \sqcup \left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0 \cap \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \neq 0\right)\right)$$

En effet. M est nul ssi tous les Y_i sont nuls ou qu'un est non nul mais que les X_i sont nuls.

D'où

$$P(rg(M)=0) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\right) + P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \cap \sum_{i=1}^{n} Y_i \neq 0\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i = 0)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = 0) = (1-p)^n$$

$Y_i \sim B(p)$ — indépendance des Y_i

Par le lemme des coalitions : $\sum_{i=1}^{n} X_i \perp\!\!\!\perp \sum_{i=1}^{n} Y_i$

D'où

$$\boxed{\begin{gathered} P(rg(M)=0) = (1-p)^n + (1-p)^n\left(1-(1-p)^n\right) \\ P(rg(M)=0) = 2(1-p)^n - (1-p)^{2n} \\ \text{On en déduit ainsi } P(rg(M)=1) = 1 - P(rg(M)=0) \end{gathered}}$$

Ex 25 :

1. E est de cardinal n. On numérote les éléments de E, e_1 jusqu'à e_n.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, posons I_k la variable aléatoire : qui à partir d'un couple (A, B) pris au hasard renvoie $e_k \in A \cap B$.

La partie A est prise au hasard, il y a donc équiprobabilité pour l'appartenance de e_k à ce dernier.

Donc $P(e \in A) = \frac{1}{2}$, de même pour $e \in B$.

A et B sont choisis indépendamment, d'où

$$I_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Les I_k sont indépendants et $I = \sum_{k=1}^{n} I_k$

Donc $I \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.

2. $U = |A \cup B| = n - |\bar{A} \cap \bar{B}|$

On considère I' tel que I mais comptant $|\bar{A} \cap \bar{B}|$.

De manière analogue à Q1. $I' \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$ (∗)

Puisque

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Alors

$$V(U) = V(I') \underset{(*)}{=} V(I).$$

Or $I \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.

$$V(I) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16} n$$

Ghorim
Rayan
Mostafa

TD n°1 exercice n° 26

Soit $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\frac{(np_n)^k}{k!}}_{\sim \frac{\lambda^k}{k!}} \underbrace{\frac{1}{n^k} \times \frac{n!}{(n-k)!}}_{= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(n-i)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} (1-p_n)^{n-k}$$

(k fini) $\ldots (1-\frac{i}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Il reste à établir que $(1-p_n)^{n-k} \to e^{-\lambda}$

$$(1-p_n)^{n-k} = e^{n-k \ln(1-p_n)}$$

($p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ donc tend vers 0)

$$= e^{n-k(-p_n + o(\frac{1}{n}))}$$

$$= \underbrace{e^{-np_n}}_{\downarrow \, e^{-\lambda}} \times \underbrace{e^{+p_n k}}_{\downarrow \, 1} \times \underbrace{e^{o(1)}}_{\downarrow \, 1 = e^0}$$

D'où $\boxed{P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$