Ex25 TD Endo sym

2) $(u^* \circ u)^* = u^* \circ u$,
donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^* \circ u)^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^* \circ u)$,

et $\forall x \in E \setminus \{0\}$,
$$\langle x, u^* \circ u(x) \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle$$
$$= \| u(x) \|^2$$
$$> 0$$
$(u \in Gl(E)$, donc $u(x) \neq 0)$

D'après la question 1 :

$\exists! \, s \in \mathcal{S}^+(E)$, $u^* u = s^2$
donc $\det(s)^2 = \det(s^2)$
$$= \det(u^* u)$$
$$\neq 0$$
donc $s \in Gl(E)$: $0 \notin \mathrm{Spec}(s)$.
Ainsi, $\mathrm{Spec}(s) \subset]0; +\infty[$,
donc $s \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

On pose alors $v = u \circ s^{-1}$.
Donc $v \circ s = u$.

Il suffit alors de montrer que $v \in O(E)$:

Soit $x, y \in E$,

$$\langle s^{-1}(x), y \rangle = \langle s^{-1}(x), s \circ s^{-1}(y) \rangle$$
$$= \langle s^{*} \circ s^{-1}(x), s^{-1}(y) \rangle$$

$s^{*} = s$:

$$= \langle x, s^{-1}(y) \rangle$$

donc $s^{-1} \in \mathcal{S}(E)$.

$$w^{*} \circ w = (u \circ s^{-1})^{*} \circ u \circ s^{-1}$$
$$= (s^{-1})^{*} \circ u^{*} \circ u \circ s^{-1}$$
$$= s^{-1} \circ s^{2} \circ s^{-1}$$
$$= id_E$$

Donc $w^{*} = w^{-1}$,
donc $w \in \mathcal{O}(E)$.

Unicité : Soit $w_1, w_2 \in \mathcal{O}(E)$,
$s_1, s_2 \in \mathcal{S}^{++}(E)$,

$$u = w_1 \circ s_1 = w_2 \circ s_2$$

$$u^{*} \circ u = s_1^{*} \circ w_1^{*} \circ w_1 \circ s_1$$
$$= s_1^{*} \circ s_1 \qquad (w_1 \in \mathcal{O}(E))$$
$$= s_1^{2} \qquad (s_1 \in \mathcal{S}(E))$$

De même, $u^{*} \circ u = s_2^{2}$.

Ainsi, s_1 et s_2 sont deux racines carrés de $u^* \circ u$.

Donc d'après la question 1., $s_1 = s_2$.

$$w_1 = u \circ s_1^{-1}$$
$$= u \circ s_2^{-1}$$
$$= w_2.$$

Donc $w_1 = w_2$.

Exercice 2 : $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4+y^4-2(x-y)^2 \end{array} \right.$

1) $f(x,0) = x^4 - 2x^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc f n'admet pas de maximum local.

2) Étudions ses extremum locaux :

- f est $\mathcal{C}^2$ car polynomiale
- $\mathbb{R}^2 \in \mathbb{R}^2$
- Déterminons les points critique de f:

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = 0$:

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x + 4y, \; 4y^3 - 4y + 4x)$$

donc $\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 & (L_1) \\ 4y^3 - 4y + 4x = 0 & (L_2) \end{cases}$

donc $\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ y^3 - y + x = 0 & (L_2) \end{cases}$

Comme $t \mapsto t^3$ est bijective sur $\mathbb{R}$:

$x = -y$.

(L_2) nous livre alors :

$y^3 - 2y = 0$ donc $y(y^2 - 2) = 0$

donc $y = 0$ ou $y \in \{\sqrt{2} ; -\sqrt{2}\}$

donc $(x, y) \in \{(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

Vérifions si ces points sont bien des points critiques de f :

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

$$\nabla f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}, -8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = (0, 0)$$

$\nabla f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (0,0)$.

Ces trois points sont donc bien des points critiques de f.

Calculons maintenant la hessienne de f :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$$

En $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$tr(H_f(0,0)) = -8$, $\quad f(0,0) = 0$
$det(H_f(0,0)) = 0$,

$f(\varepsilon,\varepsilon) = 2\varepsilon^4 > 0$
donc $f(0,0)$ n'est pas un maximum local de f.

$$f(\varepsilon,-\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} -8\varepsilon^2 < 0$$

donc $f(0,0)$ n'est pas un minimum local de f.

En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$:

$$H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

$tr(H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2})) = 40 > 0$
$det(H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2})) = 384 > 0$

Donc $H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

f admet donc un minimum local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, et $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8$.

Ainsi, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$ est un minimum local de f.

3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Étudions le signe de $f(x, y) + 8$:

$$f(x,y) + 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8$$

$$= x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 2(x+y)^2 + 8$$

$$= (x^2 - 2)^2 - 4 + (y^2 - 2)^2 - 4 + 2(x+y)^2 + 8$$

$$= (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x+y)^2$$

$$\geq 0$$

Donc -8 est le minimum global de f.

Exercice 5 : $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

5) $$f \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i) \end{array} \right.$$

$$g \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i - a \end{array} \right.$$

- f est $\mathcal{C}^1$: Soit $i \in [\![1;n]\!]$,

Soit $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^{*\,n-1}$,
$x_i \longmapsto f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ est dérivable :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \ln(x_i) + 1.$$

Donc comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\mathcal{C}^0$, le critère $\mathcal{C}^1$ s'applique : f est $\mathcal{C}^1$.

- g est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale.

~~$- \forall (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n*}$~~

$- \forall (x_1,\dots,x_n) \in \Sigma = g^{-1}(\{0\})$,

$\nabla g(x_1,\dots,x_n) = (1,\dots,1) \neq 0.$

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$, t.q. $f_{|\Sigma}$ atteint un extremum local en $(x_1, \dots, x_n)$.

D'après le théorème des extrema liés :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n)$

i.e. : $\begin{cases} \ln(x_1) + 1 = \lambda \cdot 1 \\ \vdots \\ \ln(x_n) + 1 = \lambda \cdot 1 \end{cases}$

i.e. : $x_1 = \dots = x_n$

Or, $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$,
donc $x_1 = \dots = x_n = \dfrac{a}{n}$.

Donc si $f_{|\Sigma}$ atteint un extremum local sur Σ, alors il vaut

$$f\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = a \ln\left(\frac{a}{n}\right)$$

et est atteint en l'unique point

$$\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right).$$