TD Correction

♡ **Exercice 25** (Cours) (endo espace euclidien)

On admet Q1 qui livre

$$\forall u \in S_n^+(E), \exists! v \in S^+(E), v^2 = u$$

Q2) But : $\forall u \in GL(E), \exists! (w,s) \in O(E) \times S^{++}(E), u = w \circ s$

On fixe $u \in GL(E)$

Étudions l'unicité : Supposons qu'il existe $(w,s) \in O(E) \times S^{++}(E), u = w \circ s$

Alors $u^* \circ u \in S^{++}(E)$.

- $u^* \circ u$ autoadjoint
- Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\langle u^*(u(x)), x \rangle = \|u(x)\|^2 > 0$ $(u \in GL(E))$

$$u^* \circ u = s^* \circ \overset{w^{-1}}{\overbrace{w^*}} \circ w \circ s = s^2$$

s est alors unique par Q1.

s est inversible car $s \in S^{++}(E)$

On a alors bien $w = u \circ s^{-1}$ unique

Étudions l'existence $u^* \circ u \in S^{++}(E)$

$$\exists s \in S^+(E), u^* \circ u = s^2$$

$$\underset{\det(s)^2}{\underset{\shortparallel}{\det(s^2)}} = \det(u^* \circ u) = \det(u)^2 > 0$$

Ainsi, s est inversible et donc $S^{++}(E)$

On pose $w = u \circ s^{-1} \in GL(E)$

$s \circ s = u^* \circ u$

Donc $s = s^{-1} \circ u^* \circ u$

et donc $\underbrace{s \circ u^{-1}}_{} = s^{-1} \circ u^*$

$(u \circ s^{-1})^{-1} = w^{-1}$

$w^* = (u \circ s^{-1})^* = (s^{-1})^* \circ u^*$

$w^* = w^{-1}$ revient à montrer que $(s^{-1})^* = s^{-1}$

Soit $(x, y) \in E$

$s \in GL(E)$, donc

$\exists (\alpha, \beta) \in E^2$, $x = s(\alpha)$ et $y = s(\beta)$

$$\begin{aligned} \langle s^{-1}(x), y \rangle &= \langle x, (s^{-1})^*(y) \rangle \\ &= \langle \alpha, s(\beta) \rangle \\ &= \langle \underbrace{s(\alpha)}_{= x}, \underbrace{\beta}_{= s^{-1}(y)} \rangle \end{aligned}$$

Par l'unicité de l'adjoint, $(s^{-1})^* = s^{-1}$

Ainsi, $w \in O(E)$

$\exists! (w, s) \in O(E) \times S^{++}(E)$, $u = w \circ s$

Q3) But : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists! (M, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}), \; A = MS$

Soit B_0 base orthonormée de E.

$\exists! u \in \mathcal{L}(E), \; A = Mat_{B_0}(u)$

$\det(u) = \det(A) \neq 0$, donc $u \in GL(E)$

<u>Existence</u> Par Q2, $\exists (w, s) \in O(E) \times S^{++}(E), \; u = w \circ s$

$$A = \underbrace{Mat_{B_0}(w)}_{\in O_n(\mathbb{R})} \underbrace{Mat_{B_0}(s)}_{\in S_n^{++}(\mathbb{R})} \quad (B \text{ base orthonormée})$$

En posant $M = Mat_{B_0}(w)$, $S = Mat_{B_0}(s)$, on obtient l'existence.

<u>Unicité</u> Soit $(M, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = MS$

$$\exists (w, s) \in \mathcal{L}(E)^2, \; M = Mat_{B_0}(w), \; S = Mat_{B_0}(s)$$

Puisque $(M, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$,
on a $(w, s) \in O_n(E) \times S_n^{++}(E)$

Par injection de $Mat_{B_0}(\cdot)$:

$u = w \circ s$

Par Q2, (w, s) est unique
Donc (M, S) est unique.

Q4) π bien défini car $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})^2$

π bijective:

- π injective: se déduit de l'unicité Q3
- π surjective: se déduit de l'existence Q3.

π est continue car polynomiale en les coefficients du couple de matrices en argument.

π^{-1} continue. Par caractérisation séquentielle:

Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} M \in GL_n(\mathbb{R})$

Soit $k \in \mathbb{N}$,

$\exists! (\Omega_k, S_k) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\pi^{-1}(M_k) = (\Omega_k, S_k)$

$O_n(\mathbb{R})$ compact, donc $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\nearrow\nearrow$ telle que

$\Omega_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, et $M_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $S_{\varphi(k)} = \Omega_{\varphi(k)}^{-1} M_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$

(Produit matriciel et inverse continus)

Puisque $\pi^{-1}(M_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} (\Omega, S)$

$\underbrace{M_{\varphi(k)}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} M} = \Omega_{\varphi(k)} S_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} ~~MS~~ \ \Omega S$

Par unicité de la limite, $\Pi = \Omega S$

Or $S = \Omega^{-1}\Pi \in GL_n(\mathbb{R})$
Donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Par unicité de la décomposition,

$$\pi_1^{-1}(\Pi_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \pi_1^{-1}(\Pi)$$

$$\text{Ie } (\Omega_k, S_k) \longrightarrow (\Omega, S) = \pi^{-1}(\Pi)$$

$(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a une ! val d'adhérence, $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ compact

Donc $\Omega_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \Omega$ et [...] $S_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} S$

Exercice 3 (TD calcul diff 2)

Q1) $f(x, 0) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, donc f n'a pas de maximum global

Q2) $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$
Soit $r \in \mathbb{R}_{\geq 2}$,
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que ~~xx~~ $\max(|x|, |y|) \geq r \geq ?$

1er cas $|x| = \|(x,y)\|_\infty$

$f(x,y) \geq x^4 - 4xy$
$4xy \leq 4|x||y| \leq 4x^2$

$f(x,y) \geq x^4 - 4x^2 = \underbrace{x^2}_{\geq r^2}\underbrace{(x^2-4)}_{\geq r^2-4} \geq r^2(r^2-4)$

- 2^e cas $|y| = \|(x,y)\|_\infty$

$f(x,y) = f(y,x) \geq r^2(r^2-4)$

D'où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\|(x,y)\|_\infty \geq r \Rightarrow f(x,y) \geq \underbrace{r^2(r^2-4)}_{} \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$

(Q3) On a $f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\|_\infty \to +\infty]{} +\infty$

$\exists r > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\infty((0,0),r)}, f(x,y) \geq f(0,0)$

$K = \overline{B_\infty((0,0),r)}$ compact (fermé, bornée partie de $\mathbb{R}^2$)

D'après le thm des bornes atteintes, comme f $\mathcal{C}^0$ sur K (car polynomiale),
$\exists (x_m, y_m) \in K, \forall (x,y) \in K^2, f(x_m,y_m) \leq f(x,y)$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

- Si $(x,y) \in K$, $f(x,y) \geq f(x_m,y_m)$
- Sinon, $f(x,y) \geq f(0,0) \geq f(x_m,y_m)$ $((0,0) \in K)$

Donc $f(x_m,y_m)$ et un minimum global de f.

Étude des extremas locaux

On raisonne par analyse-synthèse. f est $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale

(A) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = (0,0)$ $\quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$, donc $\begin{cases} y^9 = y \\ y^3 = x \end{cases}$, ainsi $\begin{cases} y^9 - y = 0 \\ y^3 = y \end{cases}$

$y = \pm 1$ si $y \in \mathbb{R}$

par conséquent, $\begin{cases} y = 0 \text{ ou } y^8 = 1 \\ y^3 = x \end{cases}$

D'où $(0,0), (1,1), (-1,-1)$ candidats

(S) $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$\nabla f(1,1) = (0,0)$

$\nabla f(-1,-1) = (0,0)$

Comme $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, si (x,y) est un extremum local, alors $(x,y) \in \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}$

• Étude de $(0,0)$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr}(H_f(0,0)) = 0$

$\det(H_f(0,0)) = -16$ Pas de C-S

• $\operatorname{Spec}(H_f(0,0)) = \{-4, 4\}$, donc $H_f(0,0) \notin S_2^+(\mathbb{R})$

$-H_f(0,0) \notin S_2^+(\mathbb{R})$

f n'atteint pas d'extremum local en $(0,0)$

• Alternative

$$f(t,t)-f(0,0)=2t^4-4t^2 \underset{t\to 0}{\sim} -4t^2<0$$

$f(0,0)$ n'est pas un min local.

$$f(t,-t)-f(0,0) \underset{t\to 0}{\sim} 4t^2>0$$

$f(0,0)$ n'est pas un max local.

• Étude de $(1,1)$

$$H_f(1,1)=\begin{pmatrix}12 & -4\\ -4 & 12\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} tr(H_f(1,1))=24>0 \\ \det(H_f(1,1))=128>0\end{array}$$

Donc f atteint un minimum local en $(1,1)$. $f(1,1)=-2$

De manière analogue, f atteint un minimum local en $(-1,-1)$

$$f(-1,-1)=-2$$

Nécessairement, -2 est le minimum global.

Remarque:

$$f(x,y)+2=x^4+y^4-4xy+2 \geqslant x^4+y^4-2x^2-2y^2+1+1$$
$$=(x^2-1)^2+(y^2-1)^2$$

$$xy\leqslant \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$$

Atteint pour $(x,y)=\begin{cases}(1,1)\\(-1,-1)\end{cases}$

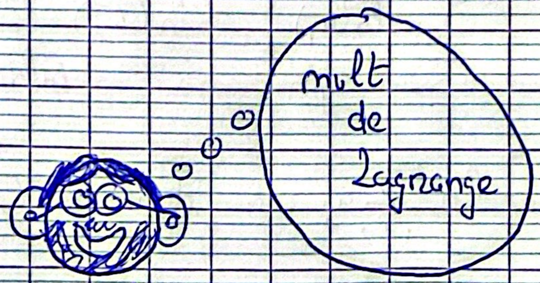
Exercice 5

On saute Q1, Q2, Q3, Q4. $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(Q5) $f \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[^n \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i) \end{array} \right.$

$\Sigma = \{(x_1,\dots,x_n) \in]0;+\infty[^n \mid x_1+\dots+x_n = a\}$

Extrema loc de $f|_\Sigma$



Lucas. A

$g \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[^n \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array} \right.$, on a $\Sigma = g^{-1}(\{a\})$.

On applique le critère $\mathcal{C}^1$ à f.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$, soit $(x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$x \mapsto \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j \ln(x_j) + x\ln(x)$ est dérivable

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \ln(x_i)+1 \end{array} \right.$ existe et est continue

Donc $f \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}_+^*)^n, \mathbb{R})$.

(A) Soit $\omega = (a_1, \dots, a_n) \in \Sigma$ telle que $f|_\Sigma$ atteigne un extremum en ω.

$\nabla f|_\Sigma(\omega) = (\ln(a_1)+1, \dots, \ln(a_n)+1)$

$\nabla g(\omega) = (1, \dots, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\nabla f|_\Sigma(\omega) = \lambda \nabla g(\omega)$

Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\ln(a_i)+1 = \lambda$

Donc $\ln(a_1) = \dots = \ln(a_n)$

Donc $a_1 = \dots = a_n$ (ln est injective)

Or $\sum_{i=1}^{n} a_i = a$, donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $a_i = \frac{a}{n}$

(S) ~~non~~

(Q4) $f|_\Sigma$ minorée par $f\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = a\ln\left(\frac{a}{n}\right)$

$\varphi \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln(x) \end{array} \right.$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et $\forall t \in]0;+\infty[$, $\varphi'(t) = 1 + \ln(t)$

$\varphi' \nearrow$, donc φ convexe

Par inégalité de Jensen,

$$\underbrace{\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right)}_{\varphi\left(\frac{a}{n}\right)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$$

D'où $\frac{a}{n} \ln\left(\frac{a}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f(x_1, \dots, x_n)$