TD – Calcul différentiel 1

Exercice de la banque CCINP n°33. — *On pose*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad f\,(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et $f\,(0,0) = 0$.

1. *Démontrer que* f *est continue sur* $\mathbf{R}^2$.
2. *Démontrer que* f *admet des dérivées partielles en tout point de* $\mathbf{R}^2$.
3. f *est-elle de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}^2$ *? Justifier.*

Exercice de la banque CCINP n°52. — *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On considère l'application définie sur* $\mathbf{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Prouver que, pour tout* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) *Justifier que le domaine de définition de* f *est bien* $\mathbf{R}^2$.
   (b) *Déterminer* α *pour que* f *soit continue sur* $\mathbb{R}^2$.
3. *Dans cette question, on suppose que* $\alpha = 0$.
   (a) *Justifier l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ *et les calculer.*
   (b) *Justifier l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *et donner leur valeur.*
   (c) f *est-elle de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°57. —

1. *Soit* f *une fonction de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{R}$.
   (a) *Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de* f *en* $(0,0)$.
   (b) *Donner la définition de «*f *différentiable en* $(0,0)$*».*
2. *On considère l'application définie sur* $\mathbf{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbf{R}^2$.
   (b) *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}^2$.

Exercice de la banque CCINP n°58. —

1. *Soit* E *et* F *deux* $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit* $a \in E$ *et soit* $f\colon E \longrightarrow F$ *une application. Donner la définition de «* f *différentiable en* a *».*
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* n. *Soit* $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *une base de* E. *On pose*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

et

$$\forall (x,y) \in E\times E \quad \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$$

On admet que $\|.\|_\infty$ *est une norme sur* E *et que* $\|.\|$ *est une norme sur* $E \times E$. *Soit* $B\colon E\times E \longrightarrow \mathbf{R}$ *une forme bilinéaire sur* E.

(a) Prouver que

$$\exists C \in \mathbf{R}^+ \quad \forall (x,y) \in E \times E \quad |B(x,y)| \leqslant C \, \|x\|_\infty \, \|y\|_\infty$$

(b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 1 ★☆☆ — *On considère deux fonctions*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ et que la fonction g est discontinue en $(0,0)$.

`continuiteFonctionDeuxVariables` [indication(s)]

Exercice 2 ★☆☆ — *Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}^2$ par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Démontrer que les fonctions f et g admettent une dérivée directionnelle suivant tout vecteur en $(0,0)$.*
2. *Démontrer que les fonctions f et g ne sont pas continues en $(0,0)$.*

`deriveeDirectionnelleDiscontinue`

Exercice 3 ★☆☆ — *Soit $P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{C}[X]$, où $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Posons*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,y) & \longmapsto & P(x+iy) \end{array} \right.$$

Démontrer que f possède des dérivées partielles au point $(0,0)$ et les exprimer en fonction des coefficients de P.

`deriveesPartiellesFonctionPolynomialeComplexe` [corrigé]

Exercice 4 ★☆☆ — *Soit l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + xy + y^2 \end{array} \right.$$

et (a,b) un point de $\mathbf{R}^2$. Démontrer que l'application f est différentiable en (a,b) et préciser sa différentielle $\mathrm{d}f(a,b)$ en ce point.

`differentiabiliteDifferentiellePolynomeDeuxVariables` [corrigé]

Exercice 5 ★☆☆ — *Soient Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et deux applications $f, g \in F^\Omega$. On suppose que les applications f et g sont différentiables en un point a de Ω.*

1. *Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Justifier que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ existent.*
2. *On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Démontrer que les différentielles $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ sont égales.*

`applicationsDifferentiablesMemeDeriveesPartielles` [corrigé]

Exercice 6 ★★☆ — *Soit l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, xyz) \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la fonction f est différentiable en tout point $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y,z).*
2. *On dit que f est une submersion en un point (x,y,z) de $\mathbf{R}^3$ si l'application $\mathrm{d}f(x,y,z) \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2\right)$ est surjective. On note*
$$U := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ f \text{ est une submersion au point } (x,y,z)\right\}.$$
   (a) *Démontrer que $\mathbf{R}^3 \setminus U$ est la réunion de quatre droites que l'on explicitera.*
   (b) *Justifier que U est une partie ouverte de $\mathbf{R}^3$.*

`lieuSubmersion`

Exercice 7 ★★☆ — *On munit $\mathbf{R}^2$ de sa norme euclidienne, définie par*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad ||\,(x,y)\,|| := \sqrt{x^2+y^2}$$

Soit la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

$$f(x,y) = (\sin(x+2y), \cos(2x+y))$$

1. *Démontrer que la fonction f est différentiable en tout vecteur $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y).*
2. *Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, l'application $\mathrm{d}f(x,y) \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2\right)$ est 3-lipschitzienne.*

`differentielleLipschitzienne`

Exercice 8 ★★☆ — *Soient $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E et $a \in E$. Démontrer que l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \langle\, u(x)\,,\, x \,\rangle \end{array} \right.$$

est différentiable en a et calculer sa différentielle en a.

`differentiabiliteDifferentielleProduitScalaireTordu`

Exercice 9 ★★☆ — *Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, r un réel strictement positif $\Omega :=]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[\subset \mathbf{R}^2$ et une application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & f(x_1,x_2) \end{array} \right.$$

On suppose que

(H1) *pour tout $x \in \Omega$, la fonction f admet une dérivée partielle en x suivant la variable x_1 et suivant la variable x_2 ;*

(H2) *pour tout $x \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0_{\mathbf{R}}$.*

1. *Démontrer que Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.*
2. *Justifier que la fonction f est différentiable sur Ω et préciser sa différentielle.*
3. *Démontrer que l'application f est constante sur Ω.*

`deriveesPartiellesNullesSurCarre`

Exercice 10 ★★☆ — *Soient $n \geqslant 2$ un nombre entier et Tr l'application trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer toutes les applications $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$, différentiables sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, telles que*

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \mathrm{d}f(A) = \mathrm{Tr}$$

`applicationsDifferentiablesDifferentielleEgaleTrace`

Exercice 11 ★★☆ — *Soit*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

une application différentiable sur $\mathbf{R}^2$.

1. *Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ fixé. On définit la fonction g par*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(tx,ty) \end{array} \right.$$

Démontrer que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

2. *On suppose que f est homogène, i.e. que*

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(tx,ty) = t\, f(x,y)$$

   (a) *Démontrer que pour tout $(x,y,t) \in \mathbf{R}^3$*

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\; x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\; y$$

   (b) *En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que*

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x,y) = \alpha x + \beta y$$

`fonctionsHomogenes`

Exercice 12 ★★☆ — *On se propose de déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ différentiables sur $\mathbf{R}^2$ et qui vérifient*

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)$$

1. *Soient $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ fixé. Démontrer que l'application*

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(x+t,y+t) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\tau'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t,y+t)$$

2. *Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbf{R}^2$ telle que*

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)$$

   (a) *Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

   (b) *Soient a,b,c,d quatre réels fixés et soit l'application*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(au+bv,cu+dv) \end{array} \right.$$

   Démontrer que l'application g est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de f.

   (c) *En choisissant $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ de telle sorte que*

   (H1) *pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$;*

   (H2) *la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$*

   démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}$, telle que

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x,y) = \varphi(x-y)$$

3. *Soit une fonction $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}$. On lui associe la fonction f définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x-y) \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et que

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)$$

4. *Formuler une conclusion soignée pour répondre à l'objectif exposé au début de l'exercice.*

`applicationsInvariantesTranslationPremiereBissectrice`

Exercice 13 ★★★ — *Soient* $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. *Déterminer toutes les fonctions* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ *telles que*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b$$

`equationDeriveesPartiellesLineaireOrdre1`

Exercice 14 ★★☆ — *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\,]-1,1[\,, \mathbf{R})$.

1. *Démontrer que l'ensemble de définition* $\mathcal{D}$ *de l'application*

$$g\colon (x,y) \longmapsto f\left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{ch}(y)}\right)$$

   est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
2. *Déterminer* f *pour que*

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{D} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

`rechercheCnsFonctionHarmonique`

Exercice 15 ★★☆ — *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. *Démontrer que*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = y$$

si et seulement s'il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *telle que*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x,y) = \frac{x\,y^2}{2} + \varphi(x) + \psi(y)$$

`equationDeriveesPartiellesBasiqueOrdre2`

Exercice 16 ★★★ — *Soit* $\Omega :=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. *Déterminer les applications* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbf{R})$ *telles que*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega \quad x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

On pourra considérer le changement de variables donné par $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

`equationDeriveesPartiellesOrdre2` [corrigé]

---

continuiteFonctionDeuxVariables [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 1

- Démontrer $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{||\cdot||_2} f(0,0) = 0$, i.e.

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[||(x,y)||_2\to 0]{} 0$$

en commençant par majorer x^2y^2 par une quantité dépendant de $||(x,y)||_2$.

- Démontrer la discontinuité de g en $(0,0)$ à l'aide du critère séquentiel. Pour cela, exhiber deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) qui convergent vers 0, mais telles que la quantité $g(x_n, y_n)$ ne tend pas vers $g(0,0) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

derivéesPartiellesFonctionPolynomialeComplexe [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 3

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

- *Dérivée partielle par rapport à la variable x, i.e. dérivée directionnelle par rapport au vecteur e_1.*
  Soit $t \in \mathbf{R}^*$.
  $$\frac{f((0,0)+t\,e_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{P(t)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\,t^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\,t^{k-1}$$
  Nous en déduisons
  $$\frac{f((0,0)+t\,e_1)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1$$
  Donc la fonction f admet une dérivée partielle première en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a_1$$
- *Dérivée partielle par rapport à la variable y, i.e. dérivée directionnelle par rapport au vecteur e_2.*
  Soit $t \in \mathbf{R}^*$.
  $$\frac{f((0,0)+t\,e_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{P(i\,t)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\,(it)^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\,i^k\,t^{k-1}$$
  Nous en déduisons
  $$\frac{f((0,0)+t\,e_2)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,i^{k+1}\,t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1\,i$$
  Donc la fonction f admet une dérivée partielle seconde en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a_1\,i$$

`differentiabiliteDifferentiellePolynomeDeuxVariables` [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 4

(a) *Différentiabilité de l'application f sur $\mathbf{R}^2$.*
Nous vérifions les hypothèses du critère $\mathcal{C}^1$.

- La fonction
$$f(\,\cdot\,,b)\colon x \longmapsto f(x,b) = x^3 + xb + b^2$$
est polynomiale, donc dérivable en a. Ainsi la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ existe et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f(\,\cdot\,,b)'(a) = 3a^2 + b$$

- La fonction
$$f(a,\,\cdot\,)\colon y \longmapsto f(a,y) = a^3 + ay + y^2$$
est polynomiale, donc dérivable en b. Ainsi la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existe et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f(a,\,\cdot\,)'(b) = a + 2b$$

- Des deux points précédents, nous déduisons que la fonction f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$ données par
$$\frac{\partial f}{\partial x} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 + y \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + 2y \end{array} \right.$$
Comme ces deux applications sont polynomiales, elles sont continues sur $\mathbf{R}^2$.

Le critère $\mathcal{C}^1$ s'applique et livre le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbf{R}^2$. L'application f est donc différentiable au point (a,b).

(b) *Différentielle de l'application f en (a,b).*
Comme l'application $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est différentiable en (a,b), nous savons que, pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$
$$\mathrm{d}f(a,b)\cdot(h_1,h_2) = \langle\, \nabla(f)(a,b)\,,\,(h_1,h_2)\,\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,h_2 = (3a^2+b)\,h_1 + (a+2b)\,h_2$$
où $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^2$.

applicationsDifferentiablesMemeDeriveesPartielles [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 5

1. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$, et fixons une norme N_F sur F. Comme f est différentiable en a

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}\left(\|\, h \,\|_2\right)$$

i.e.

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a) \cdot h}{\|\, h \,\|_2} \xrightarrow[h \to 0_{\mathbf{R}^n}]{} 0_F$$

Comme $t\, e_i \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_{\mathbf{R}^n}$, nous en déduisons, par composition de limites, que

$$\frac{f(a+t\, e_i) - f(a) - \mathrm{d}f(a) \cdot (t\, e_i)}{\|\, t\, e_i \,\|_2} \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_F$$

Comme $\mathrm{d}f(a)$ est linéaire et $\|\, e_i \,\|_2 = 1$, il vient

$$\frac{f(a+t\, e_i) - f(a) - t\, \mathrm{d}f(a) \cdot e_i}{|t|} \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_F$$

i.e.

$$N_F\left(\frac{f(a+t\, e_i) - f(a)}{t} - \mathrm{d}f(a) \cdot e_i\right) \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_{\mathbf{R}}$$

Ainsi

$$\frac{f(a+t\, e_i) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} \mathrm{d}f(a) \cdot e_i$$

Nous en déduisons que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_i$$

De même, $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ existe et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}g(a) \cdot e_i$$

2. D'après la question 1 et l'hypothèse sur les dérivées partielles de f et g en a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\mathrm{d}f(a) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}g(a) \cdot e_i$$

Ainsi, les applications linéaires $f, g \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^n, F\right)$ coïncident sur la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Elles sont donc identiques.

equationDeriveesPartiellesOrdre2 [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 16

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbf{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega \quad x^2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

(a) Pour tout $(x,y) \in \Omega$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & xy \\ v & = & x/y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{uv} \\ y & = & \sqrt{u/v} \end{array} \right.$$

Aussi introduit-on l'application

$$h \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\dfrac{u}{v}}\right) \end{array} \right.$$

Cette dernière est de classe $\mathcal{C}^2$, car ses applications composantes

$$h_1 \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \sqrt{uv} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad h_2 \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{array} \right.$$

sont des composées des fonctions

$$\left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ (u,v) & \longmapsto & uv \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ (u,v) & \longmapsto & \dfrac{u}{v} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right.$$

qui sont toutes $\mathcal{C}^2$. En effet un polynôme en deux variables est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert, une fonction rationnelle en deux variables est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert où son dénominateur ne s'annule pas et la racine carrée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

(b) La fonction

$$g = f \circ h \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(h_1(u,v), h_2(u,v)) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^2$.

(c) Posons

$$* := h(u,v) = (h_1(u,v), h_2(u,v)) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$$

et fixons $(u,v) \in \Omega$. D'après la règle de la chaîne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v) \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \sqrt{\frac{u}{v}} - \frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \end{aligned}$$

En appliquant à présent, non seulement la règle de la chaîne, mais aussi le théorème de Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(*)\, \frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(*)\, \frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v)\right) \sqrt{\frac{u}{v}} + \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{1}{\sqrt{uv}} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(*)\, \frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v)\right) \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{1}{\sqrt{u}\, v^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) + \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(*)\, \frac{1}{v} + \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{1}{\sqrt{uv}} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(*)\, \frac{1}{v} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{1}{\sqrt{u}\, v^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{1}{\sqrt{uv}} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{1}{\sqrt{u}\, v^{3/2}} + \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2} \\ &= \frac{1}{2u}\left(\frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \sqrt{\frac{u}{v}} - \frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}}\right) + \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2} \\ &= \frac{1}{2u}\, \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) + \underbrace{\frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2}}_{=:k(u,v)} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse faite sur f

$$k(u,v) = \frac{1}{4uv} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) uv - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) \frac{u}{v}\right)}_{=0} = 0$$

Cette étude nous livre

$$\forall (u,v) \in \Omega \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{2u} \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

(d) Fixons $v_0 \in]0,+\infty[$. La fonction

$$\left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v_0) \end{array} \right.$$

étant solution de l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{2u}\, y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\,]0,+\infty[\,,\mathbf{R})$, il vient

$$\forall\, u \in]0,+\infty[\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v_0) = \frac{\partial g}{\partial v}(1,v_0)\, \sqrt{u}$$

L'étude ayant été réalisée pour un réel strictement positif v_0 quelconque, nous en déduisons

$$\forall (u,v) \in \Omega \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial v}(1,v)\, \sqrt{u}$$

(e) Fixons $(u_0,v_0) \in \Omega$. D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$g(u_0,v_0) - g(u_0,1) = \int_1^{v_0} \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v)\ \mathrm{d}v = \sqrt{u_0}\ \int_1^{v_0} \frac{\partial g}{\partial v}(1,v)\ \mathrm{d}v = \sqrt{u_0}\ (g(1,v_0) - g(1,1))$$

L'étude ayant été réalisée pour un couple $(u_0,v_0) \in \Omega$ quelconque, nous en déduisons

$$\forall (u,v) \in \Omega \quad g(u,v) = g(u,1) + \sqrt{u}\ (g(1,v) - g(1,1))$$

(f) Soit $(x,y) \in \Omega$. D'après ce qui précède

$$f(x,y) = g\left(xy, \frac{x}{y}\right) = g\,(xy,1) + \sqrt{xy}\ \left(g\left(1,\frac{x}{y}\right) - g(1,1)\right) = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\ \ \psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

où les applications φ et ψ sont définies par

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g(t,1) \end{array} \right. \qquad \psi \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g(1,t) - g(1,1) \end{array} \right.$$

Comme les applications

$$\left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (t,1) \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (1,t) \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathcal{C}^2$, les applications φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^2$ (composées d'applications de classe $\mathcal{C}^2$).

(g) Conclusion. Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbf{R})$ vérifie

$$\forall (x,y) \in \Omega \quad x^2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

alors il existe deux applications $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\,]0,+\infty[\,,\mathbf{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \Omega \quad f(x,y) = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\ \ \psi\left(\frac{x}{y}\right)$$