Un corrigé du devoir surveillé n°7

Hélène Fontaine, Michel Schweitzer, DB

1. Séries entières et jeu de pile ou face

Notations.

- $\mathbf{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
- $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$:

$$H_j = \frac{1}{j!}\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$$

- Pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On note $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
- $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbf{Z} \ : \ a \leqslant n \leqslant b\}$

1.1. Utilisation de séries entières

1.1.1. Une première formule

Q1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1.

Notons f sa somme. Pour tout $x \in \,]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Q2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} n\,x^n$.

Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n\,x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n^\alpha a_n x^n$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ ont même rayon de convergence.

Donc la série entière $\sum_{n \geqslant 0} n x^n$ a également pour rayon de convergence 1.
De plus, par propriété de dérivation de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in\,]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Q3. Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \binom{n}{k} x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

Soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. Pour tout $n \geqslant k$ on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ et donc :

$$\binom{n}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

Donc la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \binom{n}{k} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\dfrac{1}{k!} \sum_{n \geqslant 0} n^k x^n$, qui vaut 1 par la « règle n^α » rappelée ci-dessus.
La dérivée k-ième de f est donnée pour $x \in\,]-1,1[$ par $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ (justification par récurrence sur k) et par ailleurs en dérivant k fois la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ sur son intervalle ouvert de convergence on obtient pour $x \in\,]-1,1[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = x^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

1.1.2. Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note $f_k \colon x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k\, x^n$.

Q4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme précisé à la question précédente, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} n^k x^n$ est égal à 1. Donc la fonction f_k est donc définie sur $]-1,1[$.

Q5. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbf{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j}\, H_j$.

Pour tout $\ell \in [\![0,k]\!]$, H_ℓ est un polynôme à coefficients réels de degré ℓ. D'après le théorème des degrés échelonnés (version forte), la famille $(H_0, \ldots, H_k)$ est une base de $\mathbf{R}_k[X]$.

Comme $X^k \in \mathbf{R}_k[X]$, il existe un unique $(\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbf{R}^{k+1}$ telle que

$$(\star) \qquad X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \, H_j$$

Q6. Pour $k \in \mathbf{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Pour $k = 0$, on a directement $\alpha_{0,0} = 1$.
Soit $k \geqslant 1$, alors en évaluant la relation $(\star)$ en 0 on obtient, compte tenu de $H_k(0) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$, que $\alpha_{k,0} = 0$.
En identifiant les coefficients des termes de degré k dans $(\star)$, absents dans H_j si $j < k$, on obtient $\dfrac{\alpha_{k,k}}{k!} = 1$ et donc $\alpha_{k,k} = k!$.

Q7. Pour tout $(j,k) \in \mathbf{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}$.

Soient deux entiers j et k tels que $1 \leqslant j \leqslant k$.

En évaluant la relation $(\star)$ en j, on obtient $j^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j)$. Si $j < i$ alors $X - j$ est un facteur de H_i et donc $H_i(j) = 0$. En revanche si $j \geqslant i$ on obtient :

$$H_i(j) = \frac{1}{i!} \prod_{\ell=0}^{i-1} (j - \ell) = \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{i!} = \binom{j}{i}$$

On obtient finalement $j^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i} \binom{j}{i}$ et, en isolant le terme $i = j$:

$$\alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i} \binom{j}{i}.$$

Q8. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation :

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \, X^j \, (1-X)^{k-j}$$

Soit k un entier naturel. Soit x un réel de $]-1,1[$.

- Par définition, $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k \, x^n$. Or d'après Q5, $n^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n)$. Donc $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) x^n$.

  Par linéarité de la somme de séries convergentes, $f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} H_j(n) x^n$.

  Or par définition $H_j(n) = \begin{cases} \binom{n}{j} & \text{si } n \geqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Mais par convention $\dbinom{n}{j} = 0$ si $j < n$. Donc :

$$H_j(n) = \binom{n}{j}$$

Ainsi $f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n$. D'après la question 3, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n = \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}}$. Ainsi :

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}}$$

- Soit P_k et Q_k deux polynômes tel que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et $f(x) = \frac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$. Alors pour tout $x \in]-1,1[$, $P_k(x) = Q_k(x)$. Comme le polynôme $P_k - Q_k$ possède une infinité de racines (tous les nombres de $]-1,1[$), le polynome $P_k - Q_k$ est le polynôme nul.

Finalement pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \qquad \text{et} \qquad P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$$

Q9. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P_{k+1} = X\,(1-X)\,P_k' + (k+1)\,X\,P_k$.

Soit k un entier naturel. Par définition :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$$

En tant que somme de série entière de rayon de convergence 1, f_k est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f_k'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1}$$

Donc :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f_{k+1}(x) = x f_k'(x)$$

Or :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

Donc :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f_k'(x) = \frac{(1-x)P_k'(x) + (k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$$

Alors :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f_{k+1}(x) = \frac{x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$$

Par unicité du polynôme P_{k+1} :

$$P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$$

Q10. Calculer explicitement P_0, P_1, P_2 et P_3.

Clairement $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. À l'aide de la relation de récurrence obtenue en Q9, on en déduit :

$$P_2 = X(1-X) + 2X^2 = X^2 + X$$

et

$$P_3(X) = X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X) = 2X^2 + X - 2X^3 - X^2 + 3X^3 + 3X^2 = X^3 + 4X^2 + X$$

Q11. Déterminer, pour tout $k \in \mathbf{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

Q10 nous invite à démontrer par réccurence que sur k que P_k est un polynôme de degré k et que son coefficient dominant $[P_k]_k$ vaut 1.

(I) P_0, P_1, P_2 et P_3 sont des polynôme de degrés respectifs 0, 1, 2 et 3 et leur coefficient dominant vaut 1.

(H) Soit k un entier naturel. Supposons que P_k est un polynôme de degré k et que son coefficient dominant vaut 1. D'après Q9 :

$$P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$$

Donc P_{k+1} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k+1$ et

$$[P_{k+1}]_{k+1} = -k\,[P_k]_k + (k+1)\,[P_k]_k = [P_k]_k = 1$$

Donc P_{k+1} est un polynôme de degré $k+1$ et de coefficient dominant à 1.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, P_k est un polynôme de degré k et que son coefficient dominant vaut 1.

Q12. Calculer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}\,P_k\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indication : on pourra étudier la question pour $k \in \{1,2,3\}$ afin d'établir une conjecture.

Nous calculons, pour tout $x \in]0,1[$:

$$x^2\,P_1\left(\frac{1}{x}\right) = x = P_1(x) \qquad\qquad x^3\,P_2\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right) = x + x^2 = P_2(x)$$

Nous démontrons, par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$, que, pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}\,P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

(I) L'assertion a déjà été établie pour $k \in \{1,2\}$.

(H) Soit k un entier naturel non nul. Supposons que pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.
D'après Q9, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$. Donc, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{array}{rcl} x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) & = & x^{k+2}\left(\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ & = & x^k\left((x-1)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)xP_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

Donc en dérivant, nous obtenons, pour tout $x \in]0,1[$:

$$(k+1)x^kP_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-1}P_k'\left(\frac{1}{x}\right) = P_k'(x)$$

puis :

$$\begin{array}{rcl} P_{k+1}(x) & = & x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x) \\ & = & x(1-x)\left((k+1)x^kP_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-1}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right) + (k+1)xP_k(x) \\ & = & (k+1)x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^k(1-x)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) - (k+1)x^{k+2}P_k\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)xP_k(x) \\ & = & x^k\left((x-1)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)xP_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) + (k+1)x\underbrace{\left(-x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) + P_k(x)\right)}_{=0} \\ & = & x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Ainsi par le principe de récurrence, pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

Q13. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.

Soit k un entier naturel non nul.
D'après Q11, $[P_k]_k = 1$ et de même par récurrence, on montrerait que $[P_k]_0 = 0$. Donc $[P_k]_0 = [P_k]_{k+1} = 0$ (P_k est de degré k).
Comme, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\sum_{i=1}^{k} [P_k]_i \, x^i = P_k(x) = x^{k+1}\, P\left(\frac{1}{x}\right) = x^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{[P_k]_i}{x^i} = \sum_{i=1}^{k} [P_k]_i \, x^{k+1-i} = \sum_{i=1}^{k} [P_k]_{k+1-i} \, x^i$$

le polynôme :

$$\sum_{i=1}^{k} \left([P_k]_i - [P_k]_{k+1-i}\right) \, X^i$$

possède une infinité de racines (tous les nombres de $]0,1[$). Il s'agit donc du polynôme nul, d'où pour tout $i \in [\![0, k+1]\!]$, $[P_k]_i = [P_k]_{k+1-i}$.

1.1.3. Une dernière formule

Q14. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est développable en série entière au voisinage de 0. On exprimera les coefficients de la série entière qui apparaît à l'aide de coefficients binomiaux et on précisera le rayon de convergence R de cette série entière.

Pour $x \neq 0$ fixé et $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n = \dbinom{2n}{n} |x^n| > 0$. On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\,(2n)!}\,|x| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\,|x| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 4|x|$$

On déduit alors du critère de d'Alembert pour les séries numériques que si $|x| < \dfrac{1}{4}$ alors la série de terme général u_n converge, et que si $|x| > \dfrac{1}{4}$ alors cette même série diverge. On en déduit que $R = \dfrac{1}{4}$.

Par développement en série entière de référence on a, pour tout x tel que $|4x| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (-4x)^n$$

où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\,\frac{(2n)!}{2^n\,n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Ainsi, pour tout $x \in I = \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-4x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$$

Q15. En déduire que, pour tout $x \in\,]-R, R[\setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x}}$. On en déduit qu'une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est donnée par $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{1-4x}}{2}$ et que la primitive qui s'annule en 0 est $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

Par primitivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on en déduit que, pour tout $x \in I$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

et après division par $x \neq 0$, que, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Q16. En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)$$

Les séries des deux questions précédentes ayant pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$, la série entière obtenue par produit de Cauchy a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{4}$ et, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \right) \\
&= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \, \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \\
&= \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in I \setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)$$

Q17. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$.

Or, toujours d'après le développement en série entière obtenu en Q14, pour $x \in I \setminus \{0\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right) &= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} x^n
\end{aligned}$$

Avec le résultat de Q16, il vient, pour $x \in I \setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} x^n$$

Notons que cette identité vaut également pour $x = 0$.
Par unicité d'un développement en série entière sur un voisinage de 0, il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}$$

1.2. Probabilités

Dans cette deuxième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

1.2.1. Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi de Poisson de paramètre n.

Q18. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

Soient k un entier naturel et n un entier naturel non nul.

$$\mathbf{P}(X = n, Y = k) = \mathbf{P}(X = n)\,\mathbf{P}_{X=n}(Y = k) = p(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!}$$

Q19. Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$ et exprimer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(Y = k)$ à l'aide de la fonction f_k définie en 1.1.2.

- D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X :

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y = 0)$$

  Alors :

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}e^{-n} = \frac{pe^{-1}}{1-(1-p)e^{-1}}$$

  Ainsi $\mathbf{P}(Y = 0) = \dfrac{p}{e-1+p}$.

- Soit k un entier non nul. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y = k).$$

  Alors :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \frac{p}{(1-p)k!}\; f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)$$

  Ainsi $\mathbf{P}(Y = k) = \dfrac{p}{(1-p)k!}\; f_k\left(\dfrac{1-p}{e}\right)$.

Q20. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) &= \frac{p}{e-1+p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!}\; f_k\left(\frac{1-p}{e}\right) \\
&= \frac{p}{e-1+p} + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^k \left(\frac{1-p}{e}\right)^n \\
&= \frac{p}{e-1+p} + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^k \left(\frac{1-p}{e}\right)^n \qquad \text{[théorème de Fubini, cas positif]} \\
&= \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{(1-p)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \\
&= \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{(1-p)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n (e^n - 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{(1-p)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\right)\\
&= \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{(1-p)}\left(\frac{1}{1-(1-p)} - \frac{1}{1-\frac{1-p}{e}}\right)\\
&= \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{(1-p)} \times \frac{e-1+p-ep}{p(e-1+p)}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Q21. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{P}\,(Y=k)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(Y=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)(k-1)!} f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^{k+1}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^{k+1}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \qquad \text{[théorème de Fubini, cas positif]}\\
&= \frac{p}{(1-p)} \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}\\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1-p}{e}\right)^n e^n\\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(1-p)^n\\
&= \frac{p}{1-p} \times \frac{1-p}{(1-(1-p))^2}\\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

1.2.2. Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne face ».
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit A_n et B_n par :

- A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;
- B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple, si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.
Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ». On admet que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, A_n et B_n sont des événements.

Q22. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide des variables $X_1, \ldots, X_{2n}$ et en déduire $\mathbf{P}\,(A_n)$.

D'une part, $A_n = (X_1 + \ldots + X_{2n} = n)$. D'autre part, comme $X_1, \ldots, X_{2n}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$, $X_1 + \ldots + X_{2n}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Donc :

$$\mathbf{P}(A_n) = \binom{2n}{n} p^n\,(1-p)^n$$

Q23. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont incompatibles.

Soit n et k deux entiers distincts. $B_n \cap B_k$ est l'événement «pour la première fois, il y a autant de piles que deux faces à l'issue des $2n$ et $2k$ lancers». Il faudrait se décider au rang $2n$ ou $2k$, les deux en même temps n'est pas possible «pour la première fois».
Ainsi $B_n \cap B_k = \emptyset$ ou encore B_n et B_k sont incompatibles.

Q24. Montrer que C est un événement.

Pour qu'il y ait exactement autant de piles que de faces, il faut un nombre pair de lancers. Donc $C = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.
Comme une tribu est stable par réunion dénombrable et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{A}$.

Q25. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)\, \mathbf{P}(A_{n-k})$.

Remarquons que $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_n)$. Par additivité de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)\, \mathbf{P}_{B_k}(A_n)$$

Or :

$$\forall k \in [\![1, k]\!] \qquad \mathbf{P}_{B_k}(A_n) = \mathbf{P}(A_{n-k})$$

car sachant que la première fois qu'il y a autant de piles que de faces est au $2k^{\text{ème}}$ lancer, pour qu'il y ait autant de piles que de faces est au $2n^{\text{ème}}$ lancer, il faut (et il suffit) que les $2(n-k)$ lancers entre le $(2k+1)^{\text{ème}}$ lancer et le $2n^{\text{ème}}$ comportent autant de piles que de faces.
Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)\, \mathbf{P}(A_{n-k})$.

Q26. À l'aide notamment de la formule obtenue en Q17, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{P}(B_n) = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} \big(p(1-p)\big)^n$$

Procédons par récurrence forte sur n.

(I) $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}((X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0 \cap X_2 = 1)) = 2p(1-p) = \frac{2}{1}\binom{1-1}{2-2}(p(1-p))^1$

(H) Soit n un entier naturel non nul. Supposons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbf{P}(B_k) = \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}\big(p(1-p)\big)^k$$

Alors d'après la question précédente, $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(B_k)\, \mathbf{P}(A_{n+1-k})$. Donc :

$$\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{\mathbf{P}(A_0)}\left(\mathbf{P}(A_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)\, \mathbf{P}(A_{n+1-k})\right)$$

D'après Q22, $\mathbf{P}(A_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$. Donc :

$$\mathbf{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)\binom{2(n+1-k)}{n+1-k}(p(1-p))^{n+1-k}$$

Et par hypothèse de récurrence :

$$\mathbf{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}\big(p(1-p)\big)^k \binom{2(n+1-k)}{n+1-k}(p(1-p))^{n+1-k}$$

Ainsi :

$$\mathbf{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$$

D'après l'identité obtenue en Q17 :

$$\mathbf{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \left(\binom{2n+2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n-2n}{n-n}\right)\big(p(1-p)\big)^{n+1}$$

Donc $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2(n+1)-2}{n+1-1}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

Q27. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Démontrer que $\mathbf{P}\,(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.
Indication : on pourra utiliser la formule obtenue en Q15.

Nous avons remarqué en Q24 que $C = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. Par σ-additivité de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(B_n)$$

D'après la question précédente :

$$\mathbf{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^{n}$$

Et par changement d'indice :

$$\mathbf{P}(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$$

Or $p \in]0,1[\setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Donc $p(1-p) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{(2p-1)^2}{4} \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right[$. D'après l'identité obtenue en Q15 :

$$\mathbf{P}(C) = 2p(1-p)\frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p(1-p)}$$

Ainsi $\mathbf{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.

Q28. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Démontrer que C est un événement presque sûr.

Remarquons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1}$ converge (absolument). En effet d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{e^{2n}} \frac{(e^n)^2}{(n^n\sqrt{2\pi n})^2}\frac{1}{n4^n}$$

Donc :

$$\binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\; n^{\frac{3}{2}}}$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge absolument (série de Riemann), nous déduisons le résultat annoncé du théorème de comparaison pour les séries absolument convergentes.
Nous en déduisons que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(x \longmapsto \binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}\right)$ converge normalement, donc uniformé-

ment, sur $\left[\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right]$. En effet :

$$\left\| x \longmapsto \binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}\right\|_{\infty,\left[\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right]} = \binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1}$$

Comme de plus toute fonction polynomiale est continue sur $\left[\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right]$, la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}$ est continue sur $\left[\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right]$, en particulier en $\frac{1}{4}$. Nous en déduisons que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} = 2 \qquad \text{[cf. Q15]}$$

Ainsi $\mathbf{P}(C) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 1$.

2. Étude de sommes doubles

2.1. Théorèmes de Fubini

Q29. Énoncer le théorème de Fubini pour une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ de nombres réels positifs.

Cf. théorème 86 du polycopié de cours « Procédés sommatoires discrets ».

Q30. Énoncer le théorème de Fubini pour une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ de nombres complexes.

Cf. théorème 110 du polycopié de cours « Procédés sommatoires discrets ». L'hypothèse fondamentale de sommabilité de la famille double doit être mentionnée.

2.2. Une première application

Soit $x \in]-1,1[$.

Q31. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n\,x^n}{1-x^n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} n\,x^{n(1+k)}$.

- Puisque $|x|<1$, on a :
$$\left|\frac{nx^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |nx^n|$$
Or $\sum nx^n$ converge (Q2). Donc d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}$ converge absolument.
- Posons, pour $(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}$, $a_{n,k} = nx^{n(1+k)} = nx^n(x^n)^k$. Pour tout n fixé, la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} a_{n,k}$ est absolument convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{nx^n}{1-x^n}$. Ainsi :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$$

Q32. Montrer que la série $\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n\,x^n}{1-x^n}$.

Considérons de nouveau la famille $(a_{n,k} = nx^n(x^n)^k)_{(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}}$ introduite à la question précédente.

- De la question précédente, nous déduisons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{n,k}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,|x|^n}{1-|x|^n} < +\infty$$

  Grâce au théorème de Fubini (cas positif), nous en déduisons que la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}}$ est sommable.

- Le théorème de Fubini (cas complexe) livre également :
  (a) la convergence absolue de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_{n,k}$;
  (b) la convergence absolue de la série $\sum_{k\geqslant 0} a_{n,k}$ (ce que nous savons déjà) ;
  (c) la convergence absolue de la série $\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k}$;
  (d) la convergence absolue de la série $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$ (ce que nous savons déjà) ;
  (e) l'identité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$$

  Or pour tout $k\in\mathbf{N}$ fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{1+k})^n = \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2} \qquad [\text{Q3 appliquée à } x \leftarrow x^{1+k} \in]-1,1[]$$

  Après réindexation, on déduit de (c) que la série $\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge. D'après (e) et le résultat de la question précédente, la somme de la série $\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ est égale à celle de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}$.

2.3. Une deuxième application

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q33. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $u_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3(k+1)}$.

On a :

$$\frac{1}{k^3(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^4} > 0$$

D'après le cours sur les séries de Riemann et le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^3(k+1)}$ converge. Donc, quel que soit $n\in\mathbf{N}^*$, le nombre $u_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3(k+1)}$ existe bien.

Q34. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Posons, pour $(n,k)\in(\mathbf{N}^*)^2$:

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<n \\ \dfrac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k\geqslant n \end{cases}$$

qui est une famille de nombres positifs ou nuls. On remarque que pour tout n fixé, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = u_n$ donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \in [0, +\infty]$$

D'autre part, pour k fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{k^3(k+1)} = \frac{1}{k^3(k+1)}\,\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2k^2}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

D'après le théorème de Fubini (cas positif) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{\pi^2}{12}$$

2.4. Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -1 & \text{si } i = j \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j \end{cases}$

Q35. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Soit $i \in \mathbf{N}$ fixé, alors la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} b_{i,j}$ est convergente car $(b_{i,j})_{j\geqslant i+1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j-i}} = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = -1 + 1 = 0$$

En conséquence la série de terme général $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ est convergente car c'est la série nulle. Le nombre $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et est nul.

Q36. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Soit $j \in \mathbf{N}$ fixé. Alors la série $\sum_{i\geqslant 0} b_{i,j}$ est convergente car $(b_{i,j})_{i\geqslant 0}$ est nulle à partir d'un certain rang, et :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{2^{j-i}} - 1 = \frac{1}{2^j}\,\frac{1-2^j}{1-2} - 1 = -\frac{1}{2^j}$$

Donc la série de terme général $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Donc le nombre $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{-1}{2^j} = -2$.

Q37. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

Ainsi les nombres $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existent mais ne sont pas égaux. Ceci ne contredit pas le théorème de Fubini, puisque l'on a ici $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |b_{i,j}| = +\infty$.

2.5. Un deuxième contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbf{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ j & \text{si } i = j \\ -2\,i\,3^{i-j} & \text{si } i < j \end{cases}$

Q38. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Comme dans la partie précédente, pour $i\in\mathbf{N}$ fixé, la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} c_{i,j}$ est convergente car géométrique de raison $\frac{1}{3}$ à partir d'un certain rang. De plus :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} = i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} 3^{i-j} = i - 2i\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = i - 2i\frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}\right)} = i - 2i\,\frac{1}{2} = 0$$

Ainsi le nombre $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ existe et est égal à 0.

Q39. Soit $j\in\mathbf{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

Soit $j\in\mathbf{N}$. La série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ est convergente car nulle à partir d'un certain rang et :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1}(-2i3^{i-j}) + j = j - \frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i$$

Supposons $j\geqslant 1$. La fonction :

$$f\colon x\longmapsto \sum_{i=0}^{j-1} x^i = \frac{x^j-1}{x-1}$$

est dérivable sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall\, x>1 \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{j-1} i x^{i-1} = \frac{j x^{j-1}(x-1) - (x^j-1)}{(x-1)^2}$$

En particulier $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} i3^i = 3f'(3) = 3\frac{2j\,3^{j-1} - (3^j-1)}{4}$ et ainsi

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j}\,\frac{2j\,3^j - 3(3^j-1)}{4} = j - j + \frac{3(3^j-1)}{2\times 3^j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}},$$

Ce résultat étant également valable pour $j=0$ car dans ce cas $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = 0$.

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

Q40. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?

On remarque que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$, la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$ est donc grossièrement divergente. On est à nouveau dans un cas où la famille n'est pas sommable, ce qui explique que les deux sommes doubles puissent avoir un comportement différent.

3. Décomposition de Dunford

Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes deux à deux distinctes de u et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives, de sorte que le polynôme caractéristique de u s'écrit :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

3.1. Sous-espaces caractéristiques

Q41. On pose, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $N_k := \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k\, \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$. Démontrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{r} N_k$.

Soient k, ℓ des entiers distincts de $[\![1, r]\!]$. Les polynômes $X - \lambda_k$ et $X - \lambda_\ell$ sont irréductibles, unitaires et distincts. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique polynomiale, les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ et $(X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$ sont premiers entre eux.
Comme les polynômes $(X - \lambda_1)^{m_1}, \ldots (X - \lambda_r)^{m_r}$ sont deux à deux premiers entre eux, nous pouvons appliquer le lemme des noyaux pour obtenir :

$$\operatorname{Ker}\left(\chi_u(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} N_k$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $\operatorname{Ker}\left(\chi_u(u)\right) = E$.
Ainsi avons-nous établi :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} N_k$$

Q42. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. On note $Q_k := \displaystyle\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{r} (X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$. Justifier qu'il existe deux polynômes A_k, B_k de $\mathbf{C}[X]$ tels que :

$$(X - \lambda_k)^{m_k}\, A_k + Q_k\, B_k = 1$$

puis démontrer que la projection p_k de E sur N_k parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{r} N_\ell$ est un polynôme d'endomorphisme en u, i.e. $p_k \in \mathbf{C}[u]$.

Les polynômes $X - \lambda_1, \ldots, X - \lambda_r$ sont irréductibles, unitaires et distincts. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique polynomiale, les polynômes :

$$(X - \lambda_k)^{m_k} \qquad \text{et} \qquad Q_k := \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{r} (X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$$

sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Bézout :

$$\exists\, (A_k, B_k) \in \mathbf{C}[X]^2 \qquad (X - \lambda_k)^{m_k}\, A_k + Q_k\, B_k = 1$$

Nous en déduisons que :
$$(u-\lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}\circ A_k(u)+Q_k(u)\circ B_k(u)=\mathrm{id}_E$$
Soit $x\in E$. De la décomposition de id_E précédente, nous déduisons la décomposition de x suivante.
$$x=\underbrace{(u-\lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}\circ A_k(u)(x)}_{=:y}+\underbrace{Q_k(u)\circ B_k(u)(x)}_{=:z}$$
Comme :
$$Q_k(u)(y)=Q_k(u)\circ(u-\lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}\circ A_k(u)(x)=A_k(u)\circ\chi_u(u)(x)=0_E$$
et :
$$(u-\lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}(z)=(u-\lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}\circ Q_k(u)\circ B_k(u)(x)=B_k(u)\circ\chi_u(u)(x)=0_E$$
il vient $z\in\mathrm{Ker}\left((u-\lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$ et :
$$y\in\mathrm{Ker}\left(Q_k(u)\right)=\mathrm{Ker}\left(\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{r}(X-\lambda_\ell)^{m_\ell}(u)\right)=\bigoplus_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{r}N_\ell\qquad\text{[lemme des noyaux]}$$
Comme :
$$x=\underbrace{z}_{\in\mathrm{Ker}((u-\lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k})}+\underbrace{y}_{\in\bigoplus_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{r}N_\ell}$$
il vient :
$$p_k(x)=z=Q_k(u)\circ B_k(u)(x)$$
Ceci étant vrai pour un vecteur x quelconque de E, nous en déduisons :
$$p_k=Q_k(u)\circ B_k(u)\in\mathbf{C}[u]$$

3.2. Existence de la décomposition de Dunford

Q43. Démontrer qu'il existe deux endomorphimes d et n de E tels que :
(a) $u=d+n$;
(b) d est diagonalisable ;
(c) n est nilpotent ;
(d) $d\circ n=n\circ d$.
Indication : on pourra chercher l'endomorphisme d de E dans l'ensemble $\mathrm{Vect}\,(p_1,\dots,p_r)$.

Une telle décomposition de u est appelée « décomposition de Dunford de u », bien qu'il soit plus légitime de la nommer « décomposition de Jordan-Chevalley ».

Analyse. Supposons qu'il existe des nombres complexes $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ tels que les endomorphismes de E définis par :
$$d:=\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\,p_k\in\mathrm{Vect}\,(p_1,\dots,p_r)\subset\mathbf{C}[u]\qquad\text{et}\qquad n:=u-d\in\mathbf{C}[u]$$
vérifient les conditions (b), (c), (d).
Soient $k\in[\![1,r]\!]$ et $x_k\in N_k=\mathrm{Im}\,(p_k)$. Alors :
$$x_k=p_k(x_k)\qquad[p_k\text{ est un projecteur}]$$
Soit $\ell\in[\![1,r]\!]\setminus\{k\}$. Alors :
$$p_\ell(x_k)\in\mathrm{Im}\,(p_\ell)=N_\ell$$
Comme $p_\ell\in\mathbf{C}[u]$ et N_k est le noyau d'un polynôme d'endomorphisme en u, p_ℓ stabilise N_k. Ainsi :
$$p_\ell(x_k)\in N_k$$
Comme les sous-espaces vectoriels N_k et N_ℓ sont en somme directe :
$$p_\ell(x_k)\in N_\ell\cap N_k=\{0_E\}$$

Nous en déduisons que :
$$d(x_k) = \alpha_k\, p_k(x_k) = \alpha_k\, x_k$$
Supposons désormais que x_k est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ_k. Notons que x_k appartient bien à N_k car :
$$x_k \in E_{\lambda_k}(u) := \operatorname{Ker}(u - \lambda_k\ \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}\right) =: N_k$$
Alors :
$$\lambda_k\, x_k = u(x_k) = d(x_k) + n(x_k) = \alpha_k\, x_k + n(x_k)$$
et x_k est un vecteur propre de n pour la valeur propre $\lambda_k - \alpha_k$. Comme n est nilpotent, son unique valeur propre est 0, d'où $\alpha_k = \lambda_k$.

Synthèse. Notre analyse nous invite à introduire les endomorphismes d et n de E définis par :
$$d := \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, p_k \in \operatorname{Vect}(p_1, \ldots, p_r) \subset \mathbf{C}[u] \qquad \text{et} \qquad n := u - d \in \mathbf{C}[u]$$
et à vérifier qu'ils satisfont bien les conditions (a), (b), (c), (d).

(a) Par construction, $u = n + d$.

(d) Comme la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathbf{C}[u]$ est commutative, $d \in \mathbf{C}[u]$ et $n \in \mathbf{C}[u]$, $d \circ n = n \circ d$.

(b) Soient $k \in [\![1, r]\!]$ et $x_k \in N_k$. D'après l'étude réalisée dans l'analyse :
$$d(x_k) = \lambda_k\, x_k$$
Nous en déduisons que toute base de E adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{r} N_k$ est formée de vecteurs propres pour d. L'endomorphisme d est donc diagonalisable.

(c) Posons $m := \max\{m_1, \ldots, m_r\}$. Soient $k \in [\![1, r]\!]$ et $x_k \in N_k$. Nous savons déjà que :
$$n(x_k) = u(x_k) - d(x_k) = u(x_k) - \lambda_k\, x_k = (u - \lambda_k\ \mathrm{id}_E)(x_k)$$
Comme $n \in \mathbf{C}[u]$ et N_k est le noyau d'un polynôme d'endomorphisme en u, n stabilise N_k. Nous en déduisons (raisonnement par récurrence omis) que :
$$n^{m_k}(x_k) = (u - \lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}(x_k) = 0_E \qquad [x_k \in N_k := \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k\ \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)]$$
A fortiori, $n^m(x_k) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Nous savons qu'il existe un (unique) r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in N_1 \times \ldots \times N_r$ tel que :
$$x = x_1 + \ldots + x_r$$
Nous en déduisons que :
$$n^m(x) = n^m(x_1) + \ldots + n^m(x_r) = 0_E + \ldots + 0_E = 0_E$$

3.3. Unicité de la décomposition de Dunford

Q44. Soient n_1, n_2 deux endomorphismes nilpotents de E tels que $n_1 \circ n_2 = n_2 \circ n_1$. Démontrer que l'endomorphisme $n_1 + n_2$ de E est nilpotent.

Notons ν_1 le nilindice de n_1 et ν_2 le nilindice de n_2. Comme les endomorphismes n_1 et n_2 commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir :
$$(n_1 + n_2)^{\nu_1 + \nu_2} = \sum_{k=0}^{\nu_1 + \nu_2} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k} n_1^k \circ n_2^{\nu_1 + \nu_2 - k}$$
Si $k \in [\![\nu_1, \nu_1 + \nu_2]\!]$, alors $n_1^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc :
$$\binom{\nu_1 + \nu_2}{k} n_1^k \circ n_2^{\nu_1 + \nu_2 - k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si $k \in [\![0, \nu_1 - 1]\!]$, alors $\nu_1 + \nu_2 - k \geqslant \nu_2 + 1$ et $n_2^{\nu_1+\nu_2-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans ce cas, on a également :

$$\binom{\nu_1 + \nu_2}{k} n_1^k \circ n_2^{\nu_1+\nu_2-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Nous en déduisons que $(n_1 + n_2)^{\nu_1+\nu_2} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q45. Soient d_1, d_2 deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d_1)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d_2)$ soient diagonales.

Comme d_1 est diagonalisable :

$$E = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Spec}(d_1)} E_\alpha(d_1)$$

Soit $\alpha \in \mathrm{Spec}(d_1)$. Comme d_1 et d_2 commutent, l'endomorphisme d_2 stabilise $E_\alpha(d_1)$. Comme d_2 est diagonalisable, son induit sur $E_\alpha(d_1)$ (qui est donc bien défini) est également diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}_\alpha$ de $E_\alpha(d_1)$ formée de vecteurs propres pour d_2. Une telle base est bien sûr également formée de vecteurs propres pour d_1.
En concaténant les bases $\mathcal{B}_\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{Spec}(d_1)$) ainsi construites, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres pour d_1 et d_2. Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d_1)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d_2)$ sont donc diagonales.

Q46. Soient d_1 et n_1 deux endomorphismes de E tels que :
(a) $u = d_1 + n_1$;
(b) d_1 est diagonalisable ;
(c) n_1 est nilpotent ;
(d) $d_1 \circ n_1 = n_1 \circ d_1$.

Démontrer que $d_1 = d$ et $n_1 = n$, où n et d ont été construits à la question 43.
Indication : les endomorphismes d et n sont des polynômes d'endomorphismes en u.

Comme d_1 commute avec d_1 et n_1, d_1 commute avec u, donc avec tout polynôme d'endomorphisme en u. En particulier d_1 et d commutent. De la question 45, nous déduisons que l'endomorphisme $d - d_1$ est diagonalisable.
Comme n_1 commute avec n_1 et d_1, n_1 commute avec u, donc avec tout polynôme d'endomorphisme en u. En particulier n_1 et n commutent. De la question 44, nous déduisons que l'endomorphisme $n_1 - n$ est nilpotent.
Ainsi l'endomorphisme :

$$d - d_1 = n_1 - n \qquad [\text{conséquence de } u = n + d = n_1 + d_1]$$

est diagonalisable et nilpotent. Son polynôme minimal est donc scindé à racines simples et divise X^p (théorème de Cayley-Hamilton). Il est donc égal à X, d'où :

$$d - d_1 = n_1 - n = 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad [\text{le polynôme minimal est un polynôme annulateur}]$$

3.4. Polynôme caractéristique/minimal de la composante diagonalisable

Q47. Démontrer que $\chi_d = \chi_u$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{r} N_k$. D'après notre réponse à la question 43 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \mathrm{diag}\left(\lambda_1 I_{\dim(N_1)}, \ldots, \lambda_r I_{\dim(N_r)}\right)$$

d'où :

$$\chi_d = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\dim(N_k)}$$

D'après le cours sur les sous-espaces caractéristiques, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $m_k = \dim(N_k)$. Ainsi :

$$\chi_d = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k} = \chi_u$$

Q48. Que vaut le polynôme minimal π_d de d ?

D'après la question précédente :

$$\mathrm{Spec}(d) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$$

Les racines de π_d sont donc précisément les complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Comme d est diagonalisable, π_d est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$. En ajoutant que π_d est unitaire, nous en déduisons que :

$$\pi_d = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$$