Devoir surveillé n°7

lundi 24 février, 8h15-12h15

▶ *Sujet MPI.* — Les élèves de MPI résolvent les problèmes **1 et 2**.

▶ *Sujet MPI*.* — Les élèves de MPI* résolvent les problèmes **1 et 3**.

1. Séries entières et jeu de pile ou face

Notations.

- $\mathbf{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
- $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$:

$$H_j = \frac{1}{j!}\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$$

- Pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On note $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
- $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbf{Z} \ : \ a \leqslant n \leqslant b\}$

1.1. Utilisation de séries entières

1.1.1. Une première formule

Q1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

Q2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} n\,x^n$.

Q3. Pour $k\in\mathbf{N}$, montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et calculer, pour tout $x\in]-1,1[$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n$.

1.1.2. Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k\in\mathbf{N}$, on note $f_k\colon x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}n^k\,x^n$.

Q4. Montrer que, pour tout $k\in\mathbf{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

Q5. Soit $k\in\mathbf{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_{k,0},\ldots,\alpha_{k,k})$ dans $\mathbf{R}^{k+1}$ telle que $X^k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\,H_j$.

Q6. Pour $k\in\mathbf{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Q7. Pour tout $(j,k)\in\mathbf{N}^2$ tel que $1\leqslant j\leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j}=j^k-\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

Q8. Montrer que, pour tout $k\in\mathbf{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x\in]-1,1[$, $f_k(x)=\dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation :

$$P_k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\,X^j\,(1-X)^{k-j}$$

Q9. Montrer que, pour tout $k\in\mathbf{N}$, $P_{k+1}=X\,(1-X)\,P_k'+(k+1)\,X\,P_k$.

Q10. Calculer explicitement P_0, P_1, P_2 et P_3.

Q11. Déterminer, pour tout $k\in\mathbf{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

Q12. Calculer, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, pour tout $x\in\,]0,1[$, $x^{k+1}\,P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Indication : on pourra étudier la question pour $k\in\{1,2,3\}$ afin d'établir une conjecture.

Q13. En déduire, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$ et pour tout $j\in[\![0,k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.

1.1.3. Une dernière formule

Q14. Démontrer que la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est développable en série entière au voisinage de 0. On exprimera les coefficients de la série entière qui apparaît à l'aide de coefficients binomiaux et on précisera le rayon de convergence R de cette série entière.

Q15. En déduire que, pour tout $x\in\,]-R,R[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Q16. En déduire que, pour tout $x\in\,]-R,R[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)$$

Q17. En déduire, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}\dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k}$.

1.2. Probabilités

Dans cette deuxième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

1.2.1. Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi de Poisson de paramètre n.

Q18. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

Q19. Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$ et exprimer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(Y = k)$ à l'aide de la fonction f_k définie en 1.1.2.

Q20. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$.

Q21. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(Y = k)$.

1.2.2. Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne face ».
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit A_n et B_n par :

- A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;
- B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple, si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.
Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ». On admet que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, A_n et B_n sont des événements.

Q22. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide des variables $X_1, \ldots, X_{2n}$ et en déduire $\mathbf{P}(A_n)$.

Q23. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont incompatibles.

Q24. Montrer que C est un événement.

Q25. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)\,\mathbf{P}(A_{n-k})$.

Q26. À l'aide notamment de la formule obtenue en Q17, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{P}(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\Big(p(1-p)\Big)^n$$

Q27. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Démontrer que $\mathbf{P}(C) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}$.
Indication : on pourra utiliser la formule obtenue en Q15.

Q28. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Démontrer que C est un événement presque sûr.

2. Étude de sommes doubles

2.1. Théorèmes de Fubini

Q29. Énoncer le théorème de Fubini pour une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ de nombres réels positifs.

Q30. Énoncer le théorème de Fubini pour une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ de nombres complexes.

2.2. Une première application

Soit $x \in]-1,1[$.

Q31. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n\,x^n}{1-x^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} n\,x^{n(1+k)}$.

Q32. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n\,x^n}{1-x^n}$.

2.3. Une deuxième application

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q33. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = n \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.

Q34. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

2.4. Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbf{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -1 & \text{si } i = j \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j \end{cases}$

Q35. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q36. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q37. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

2.5. Un deuxième contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbf{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ j & \text{si } i = j \\ -2\,i\,3^{i-j} & \text{si } i < j \end{cases}$

Q38. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q39. Soit $j \in \mathbf{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

Q40. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?

3. Décomposition de Dunford

Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes deux à deux distinctes de u et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives, de sorte que le polynôme caractéristique de u s'écrit :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

3.1. Sous-espaces caractéristiques

Q41. On pose, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $N_k := \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k \, \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$. Démontrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{r} N_k$.

Q42. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. On note $Q_k := \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{r} (X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$. Justifier qu'il existe deux polynômes A_k, B_k de $\mathbf{C}[X]$ tels que :

$$(X - \lambda_k)^{m_k} A_k + Q_k B_k = 1$$

puis démontrer que la projection p_k de E sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{r} N_\ell$ est un polynôme d'endomorphisme en u, i.e. $p_k \in \mathbf{C}[u]$.

3.2. Existence de la décomposition de Dunford

Q43. Démontrer qu'il existe deux endomorphimes d et n de E tels que :

(a) $u = d + n$;
(b) d est diagonalisable ;
(c) n est nilpotent ;
(d) $d \circ n = n \circ d$.

Indication : on pourra chercher l'endomorphisme d de E dans l'ensemble $\operatorname{Vect}(p_1, \dots, p_r)$.

Une telle décomposition de u est appelée « décomposition de Dunford de u », bien qu'il soit plus légitime de la nommer « décomposition de Jordan-Chevalley ».

3.3. Unicité de la décomposition de Dunford

Q44. Soient n_1, n_2 deux endomorphismes nilpotents de E tels que $n_1 \circ n_2 = n_2 \circ n_1$. Démontrer que l'endomorphisme $n_1 + n_2$ de E est nilpotent.

Q45. Soient d_1, d_2 deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(d_1)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(d_2)$ soient diagonales.

Q46. Soient d_1 et n_1 deux endomorphismes de E tels que :

(a) $u = d_1 + n_1$;
(b) d_1 est diagonalisable ;
(c) n_1 est nilpotent ;
(d) $d_1 \circ n_1 = n_1 \circ d_1$.

Démontrer que $d_1 = d$ et $n_1 = n$, où n et d ont été construits à la question 43.

Indication : les endomorphismes d et n sont des polynômes d'endomorphismes en u.

3.4. Polynôme caractéristique/minimal de la composante diagonalisable

Q47. Démontrer que $\chi_d = \chi_u$.

Q48. Que vaut le polynôme minimal π_d de d ?