

Un corrigé du devoir surveillé n°6

d'après Philippe Patte, Mustapha Laamoum et Ahmed Hamani

| | |
|---|----|
| 1. Formule Zêta alternée de Riemann (CCINP-MPI) | 1 |
| 1.1. Généralités | 1 |
| 1.2. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même | 3 |
| 2. De la diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un \mathbf{C} -espace vectoriel (CCINP-MPI) | 4 |
| 2.1. Lemme de décomposition des noyaux, sous-espaces caractéristiques et projecteurs | 5 |
| 2.2. Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité | 7 |
| 3. Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents (Mines Ponts-MPI) | 10 |
| 3.1. Généralités sur les endomorphismes nilpotents | 11 |
| 3.2. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien | 12 |
| 3.3. Deux lemmes. | 13 |
| 3.4. Démonstration du théorème de Gerstenhaber. | 16 |

► *Sujet MPI.* — Les élèves de MPI résolvent les parties **1,2**.

► *Sujet MPI*.* — Les élèves de MPI* résolvent les parties **1,3**.

1. Formule Zêta alternée de Riemann (CCINP-MPI)

On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ .

1.1. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .

Soit $x \in \mathbf{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

2. Calculer $F(1)$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On calcule

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-t)^{k-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Si nous démontrons que

$$\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \underset{n \rightarrow 0}{=} o(1)$$

nous pourrons donc en déduire que $F(1) = \ln(2)$. Or

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Nous appliquons finalement le théorème d'encadrement pour obtenir le résultat désiré.

3. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \geq 2$, $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est indépendante de n et convergente, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[2, +\infty[$. Comme, pour tout $n \geq 2$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que, pour $n = 1$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$.

4. *Dérivabilité de F*

- (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x} \right)_{n \geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est de \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et $h'_x : t \mapsto \frac{t^{x-1}(1-x \ln t)}{t^{2x}}$.
 Donc h'_x est négative sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$ et positive sur $]0, e^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et croissante sur $]0, e^{1/x}]$.
 On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $E(e^{1/x}) + 1$.

- (b) Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
 En déduire que F est une fonction de \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

$f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} e^{-x \ln n}$ est de \mathcal{C}^1 et $f'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.
 Soit $a > 0$. On pose $N_a = E(e^{1/a}) + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x} \right)_{n \geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ;
 donc la série alternée $\sum_{n \geq N_a} f'_n(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n , $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

Donc $\sup_{x \geq a} |\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$;
- la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

5. *Lien avec ζ*

Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

Pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.
 Comme $2^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

1.2. **Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même**

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x , de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. *Étude de la convergence*

(a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F , de la série produit $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; donc la série produit de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right)^2 = (F(x))^2$.

(b) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \frac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1) \frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$$

Pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne

converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

7. Cas où $x = 1$

On suppose dans cette question 7. que $x = 1$.

(a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

$$\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right). \text{ Donc}$$

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \\ &= (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \\ &= 2(-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2} \frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

(b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$.

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n} \left(H_n - \frac{1}{n} \right) - \frac{H_n}{n+1} \\ &= H_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

« Classiquement », $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\sum_{n \geq 2} c_n(1)$ converge.

2. De la diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un C-espace vectoriel (CCINP-MPI)

Dans ce problème, E est un C-espace vectoriel de dimension finie.

2.1. Lemme de décomposition des noyaux, sous-espaces caractéristiques et projecteurs

1. *Un exemple.* Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Le polynôme caractéristique de A est $(X - 1)(X - 5)$. Comme il est scindé à racines simples sur \mathbf{R} , la matrice A est diagonalisable sur \mathbf{R} .
 On vérifie facilement que : $\Pi_1^2 = \Pi_1$, $\Pi_2^2 = \Pi_2$ ainsi Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteur.
 $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$, $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$ et $\Pi_1\Pi_2 = 0$

2. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux : si P_1, P_2, \dots, P_r sont des éléments de $\mathbf{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T , si u est un endomorphisme de E , alors :

$$\text{Ker}[T(u)] = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.

Justifier que $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

Soit $x \in \text{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ donc $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$ ce qui donne $x \in \text{Ker}[(PQ)(u)]$, ainsi $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$).

On applique le théorème de Bézout : Il existe $A, B \in \mathbf{C}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Ce qui donne

$$\text{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

Donc si $x \in \text{ker } P(u) \cap \text{ker } Q(u)$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{ker } P(u) \cap \text{ker } Q(u) = \{0\}$.
 On a $\text{ker } (P \times Q)(u) \subset \text{ker } P(u) + \text{ker } Q(u)$ et si $x \in \text{ker } (P \times Q)(u)$, alors :

$$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \text{ker } Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \text{ker } P(u)}.$$

En effet, $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ et $P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$. Donc $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$
 Finalement on a montré : $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal. On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1}P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.

Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbf{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

On a $\pi_u = P_1^{k_1}P_2^{k_2}$, P_1 et P_2 sont premiers entre eux, $Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$. En effet, les diviseurs irréductibles sur \mathbf{C} de Q_1 (resp. Q_2) sont les diviseurs irréductibles de P_1 (resp. P_2), d'après le théorème fon-

damental de l'arithmétique polynomiale. Q_1 et Q_2 n'ont donc aucun diviseur irréductible sur \mathbf{C} en commun, donc aucun diviseur de degré supérieur ou égal à un en commun, toujours d'après le théorème fondamental de l'arithmétique polynomiale.

Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne l'existence deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbf{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1}P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$.

4. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$. Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \dots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E .

Il existe des polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ donc

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \dots + R_m(u) \circ Q_m(u) = id_E$$

par suite $\sum_{i=1}^m p_i = id_E$.

Soit i, j des entiers distincts de $\{1, 2, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_iR_j)(u) \circ (Q_iQ_j)(u) \end{aligned}$$

et $Q_iQ_j = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \frac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}P_j^{k_j}}$. Comme $P_i^{k_i}P_j^{k_j}$ divise π_u dans $\mathbf{C}[X]$, π_u divise Q_iQ_j . Ce dernier est donc annulateur de u d'où $p_i \circ p_j = 0$.

Soit i dans $\{1, 2, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^m p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m p_i \circ p_j \end{aligned}$$

or si $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$ donc $p_i^2 = p_i$, et p_i est un projecteur.

Les p_i seront appelés projecteurs associés à u .

5. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

(avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace propre caractéristique associé à λ_i .

Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$.

Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux (puissances de polynômes irréductibles, unitaires, deux à deux distincts de $\mathbf{C}[X]$), le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\text{Ker } \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_u(u) = 0$ donc $\text{Ker } \chi_u(u) = E$ d'où

$$E = \bigoplus_{i=1}^m N_i$$

6. Démontrer que $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m$.

Soit $(y_1, \dots, y_m) \in \text{Im } p_1 \times \dots \times \text{Im } p_m$ tels que $y_1 + \dots + y_m = 0$, il existe x_1, \dots, x_m dans E vérifiant $y_i = p_i(x_i)$ pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$. Soit i, j distinct dans $\{1, \dots, m\}$ alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

ce qui donne

$$p_i(y_1) + \dots + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc $(y_1, \dots, y_m) = (0, \dots, 0)$, ce qui prouve que la somme $\text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$ est directe.

On a $\text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m \subset E$ et $p_1 + \dots + p_m = \text{id}_E$ donc pour tout x dans E on a

$$x = p_1(x) + \dots + p_m(x)$$

donc $x \in \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$. Par suite $E \subset \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$, d'où $E = \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_m$.

7. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \text{Im } p_i$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a π_u divise $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et l'ensemble des racines de π_u

est exactement le spectre de u , donc $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ avec $0 < \beta_i \leq \alpha_i$, on a alors $P_i^{k_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, à

l'indice i près.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $y_i = p_i(x_i) \in \text{Im } p_i$ ($x_i \in E$). Puisque $P_i^{k_i}$ divise $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et

$$P_i^{k_i}(p_i) = \pi_u(u) = 0$$

il vient $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(p_i) = 0$. Par suite $y_i \in N_i$ et $\text{Im } p_i \subset N_i$.

D'autre part $E = \text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$ donc

$$\dim(\text{Im } p_1) \oplus \dots \oplus \dim(\text{Im } p_m) = \dim(N_1) \oplus \dots \oplus \dim(N_m)$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tel que $\text{Im } p_i \neq N_i$ donc $\dim(\text{Im } p_i) < \dim(N_i)$ par suite

$$\dim(\text{Im } p_1) \oplus \dots \oplus \dim(\text{Im } p_m) < \dim(N_1) \oplus \dots \oplus \dim(N_m)$$

ce qui est absurde donc $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ on a $\dim(\text{Im } p_i) = \dim(N_i)$ et $\text{Im } p_i = N_i$.

2.2. Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

8. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

u est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est exactement le spectre de u . Ainsi

$$\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$$

9. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$. Donner sans détails, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$, puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Avec un peu de détails, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec $a_i = \left[\frac{P_i(X)}{\pi_u(X)} \right]_{X=\lambda_i} = \left[\frac{1}{Q_i(X)} \right]_{X=\lambda_i} = \theta_i$ donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

Cette relation donne

$$1 = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^m \theta_i Q_i$$

suivant les notation de Q9 on a pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = \theta_i Q_i(u) = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

10. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

On suppose que $\deg \pi_u > 1$. On a $1 = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i}$ donc

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{X - \lambda_i + \lambda_i}{X - \lambda_i} \pi_u \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \theta_i \right) \pi_u + \sum_{i=1}^m \theta_i \lambda_i Q_i(X) \end{aligned}$$

De la relation $\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$ on a $\frac{x}{\pi_u(x)} = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{x}{x - \lambda_i}$ et on fait tendre x vers $+\infty$, on obtient $\sum_{i=1}^m \theta_i = 0$, d'où

$$X = \sum_{i=1}^m \theta_i \lambda_i Q_i(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)} \quad (*)$$

Par substitution de X par u on obtient

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i.$$

Si $\deg \pi_u = 1$: la relation (*) n'a pas de sens, mais on a $\pi_u = X - \lambda_1$ et $u = \lambda_1 \cdot p_1$ avec $p_1 = id_E$.

11. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer la matrice A^2 et justifier que la matrice A est diagonalisable.

$A^2 = 4I_4$. La matrice A est annihilée par le polynôme $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$, scindé à racines simples sur \mathbf{R} . Elle est donc diagonalisable sur \mathbf{R} .

- (b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A . On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

$X^2 - 4$ est annulateur de A et π_A divise $X^2 - 4$, A n'est pas de la forme αI_4 donc nécessairement $\deg \pi_A \geq 2$ par suite $\pi_A = X^2 - 4$ (π_A est unitaire par définition).
 On a

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{\theta_1}{X - 2} + \frac{\theta_2}{X + 2}$$

avec $\theta_1 = \left[\frac{X - 2}{\pi_u(X)} \right]_{X=2} = \frac{1}{4}$ et $\theta_2 = \left[\frac{X + 2}{\pi_u(X)} \right]_{X=-2} = \frac{-1}{4}$, donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{X + 2} + \frac{1}{X - 2} \right)$$

et $Q_1 = X - 2$, $Q_2 = X + 2$.
 Par suite $\Pi_1 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(-2)} = \frac{-1}{4}(A - 2I_4)$ et $\Pi_2 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(2)} = \frac{1}{4}(A + 2I_4)$.
 On trouve

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(-A + 2I_4) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (c) Calculer, pour tout entier naturel q , A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2 .

On a les relations :
 $A = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2$
 $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_1 = 0$
 $\Pi_1^k = \Pi_1$, $\Pi_2^k = \Pi_2$ pour tout entier naturel k .
 On obtient pour tout entier naturel k $A^k = \lambda_1^k \Pi_1 + \lambda_2^k \Pi_2$, donc

$$A^k = 2^k \Pi_1 + (-2)^k \Pi_2 = 2^k (\Pi_1 + (-1)^k \Pi_2).$$

Ainsi pour tout entier naturel k on a

$$A^{2k} = 4^k I_4 \text{ et } A^{2k+1} = 4^k A$$

12. On note $\mathbf{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{C}[v]$ est égale au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v .

On a $\mathbf{C}[v] = \{P(v), P \in \mathbf{C}[X]\}$, posons $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$.
 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de P par π_v :

$$P = Q\pi_v + R \text{ avec } \deg R \leq d - 1,$$

par substitution on a

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v),$$

donc $P(v) \in \text{Vect} \{id_E, v, \dots, v^{d-1}\}$ et $\mathbf{C}[v] \subset \text{Vect} \{id_E, v, \dots, v^{d-1}\}$. L'inclusion réciproque est claire. Par suite $\dim \mathbf{C}[v] \leq d$.
 Si on suppose que $\dim \mathbf{C}[v] \leq d - 1$ alors la famille $\{id_E, v, \dots, v^{d-2}\}$ est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de v de degré inférieur à $d - 1$ ce qui contredit le fait que π_v est annulateur de degré minimal égal à d . Donc $\dim \mathbf{C}[v] = d$.

13. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$. Démontrer que la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}[u]$.

On a $\deg \pi_u = m = \dim \mathbf{C}[u]$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ dans \mathbf{C}^m tels que $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m = 0$, on compose par p_j , sachant que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_i \circ p_i = p_i$, on obtient $\alpha_j = 0$ ($p_j \neq 0$). Ainsi (p_1, \dots, p_m) est libre.

(p_1, \dots, p_m) est une famille de vecteurs de $\mathbf{C}[u]$, libre de cardinal m . Donc c'est une base de $\mathbf{C}[u]$.

14. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}[u]$?

Si u non diagonalisable, par exemple nilpotent non nul, alors π_u n'est pas à racines simples et $\deg \pi_u > m$. Donc la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) n'est pas génératrice et n'est pas une base de $\mathbf{C}[u]$.

15. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E , tels que, pour tout entier naturel q , on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit u un endomorphisme de E , \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que, pour tout entier naturel q , on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$.

Démontrer que u est diagonalisable.

On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$.

Donc pour tout polynôme P on a $P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$. En particulier le polynôme $P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ est annulateur à racines simples, donc u est diagonalisable.

3. Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents (Mines Ponts-MPI)

Dans tout le problème on considère des \mathbf{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit que u est *nilpotent* lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé *nilindice* de u , et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \text{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.

Un sous-espace vectoriel \mathcal{V} de $\mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite *stricte* lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber. Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n > 0$, et \mathcal{V} un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim(\mathcal{V}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim(\mathcal{V}) = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de \mathcal{V} est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du problème sont largement indépendantes les unes des autres. La partie 3.1 est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie 3.2, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie 3.3, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **B**). Dans l'ultime partie 3.4, les résultats des

parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E .

3.1. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\text{Tr}(u^k) = 0$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, alors il existe $r \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^r = 0$. Donc, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $(u^k)^p = (u^p)^k = 0$, d'où $u^k \in \mathcal{N}(E)$. Ainsi u^k est trigonalisable, $\text{Spec}(u^k) = \{0\}$ et par suite $\text{Tr}(u^k) = 0$.

2. On fixe une base \mathcal{B} de E . On note $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans \mathcal{B} est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

Soit $f \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$, alors $\chi_f = X^n$, donc par théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$, donc $f \in \mathcal{N}$.
 L'endomorphisme nul est de matrice nulle dans la base \mathbf{B} , donc appartient à $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$.
 Soit $f, g \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$, alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ sont triangulaires supérieures strictes, donc pour tous $\alpha \in \mathbf{R}$ et tous (i, j) tel que $i \geq j$

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + \alpha g))_{i,j} = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))_{i,j} + \alpha (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g))_{i,j} = 0$$

donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + \alpha g) \in T_n^{++}(\mathbf{R})$.

On conclut que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent.

$\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est isomorphe à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, donc de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Soit \mathcal{B} une base de E . Montrer que

$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [[1, n]]$$

Soit $\nu(u)$ le nilindice de $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$, alors $u \in \mathcal{N}(E)$, donc $\chi_u = X^n$ ce qui entraîne que $u^n = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton). Par suite $\nu_u \in [[1, n]]$, d'où les inclusions

$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\} \subset \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} \subset [[1, n]]$$

Soit $k \in [[1, n]]$ et notons $\mathbf{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. L'endomorphisme u défini dans la base \mathbf{B} par $u(e_j) = 0$ pour $j \in [[1, n-k+1]]$ et $u(e_j) = e_{j-n+k-1}$ pour $j \in [[n-k+2, n]]$ est d'indice de nilpotence $\nu_u = k$ et $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$, donc $k \in \{\nu_u \mid u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\}$, ce qui assure l'égalité entre ces ensembles.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E , ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

Supposons que la famille est liée. Alors il existe une famille $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ non nulle telle que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$.

Considérons $j = \min\{k \in [[0, p-1]] : \alpha_k \neq 0\}$, alors

$$\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$$

et en composant $p-1-j$ fois par u , on obtient $\alpha_j u^{p-1}(x) = 0$, ce qui est en contradiction avec $\alpha_j \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \dots, \beta_{q-1}$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$, alors en composant par u^q , on obtient

$$\alpha_0 u^q(x) + \alpha_1 u^{q+1}(x) + \dots + \alpha_{r-1} u^{p-1}(x) = 0$$

où on a posé $r = p - q \geq 0$. La liberté de la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ impose que $\alpha_0 = \dots = \alpha_{r-1} = 0$.

On obtient donc

$$\sum_{i=r}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$$

et en composant successivement par $u^{q-1}, u^{q-2}, \dots, u$, on aura successivement

$$\alpha_r u^{p-1}(x) + \beta_0 u^{q-1}(y) = 0, \dots, \alpha_{p-2} u^{p-1}(x) + \beta_{q-2} u^{q-1}(y) = 0$$

et la liberté de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ entraînera

$$(\alpha_r, \beta_0) = \dots = (\alpha_{p-2}, \beta_{q-2}) = (0, 0)$$

et finalement $\alpha_{p-1} u^{p-1}(x) + \beta_{q-1} u^{q-1}(y) = 0$. Par suite $(\alpha_{p-1}, \beta_{q-1}) = (0, 0)$.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p . Dédurre de la question précédente que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\text{Im } u^{p-1} = \text{Im } u \cap \text{Ker } u$ et $\text{Im } u^{p-1}$ est de dimension 1.

Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice $p \geq n-1$.

Si $p = n$, alors $\mathbf{B}' = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(x), \dots, u^{n-1}(x)) \quad , \quad \text{Ker}(u) = \text{Vect}(u^{n-1}(x)) \quad , \quad \text{Im}(u^{n-1}) = \text{Vect}(u^{n-1}(x))$$

et on a bien le résultat attendu.

Si $p = n-1$, alors $(x, u(x), \dots, u^{n-2}(x))$ est libre. On la complète en une base de E , $\mathbf{B}' = (x, u(x), \dots, u^{n-2}(x), y)$. Alors $u^{n-1}(y) = 0$ et d'après la question précédente, $(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y))$ est liée. En effet, sinon, nous aurions $\mathbf{B}' \cup \{y, u(y)\}$ libre avec un cardinal supérieur ou égal à $n+1$.

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(x), \dots, u^{n-2}(x), u(y))$$

$$\text{Ker}(u) \subset \text{Vect}(u^{n-2}(x), y)$$

$$\text{Im}(u^{n-2}) = \text{Vect}(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y)) = \text{Vect}(u^{n-2}(x))$$

Ainsi $\dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$.

Si $y \in \text{Ker}(u)$, $u(y) = 0$, donc par liberté de $(u(x), \dots, u^{n-2}(x), y)$, $y \notin \text{Im}(u)$, donc

$$\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \text{Vect}(u^{n-2}(x)) = \text{Im}(u^{n-2})$$

Si $y \notin \text{Ker}(u)$, alors $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(u^{n-2}(x))$.

3.2. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (-|-))$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E, (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im } u \subset \text{Vect}(x)\}$.

Pour tout $z \in E$, $a, b \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$

$$((a + \alpha b) \otimes x)(z) = (a + \alpha b|z).x = (a|z).x + \alpha(b|z).x = (a \otimes x)(z) + \alpha(b \otimes x)(z) = ((a \otimes x + \alpha b \otimes x))(z)$$

Notons $\varphi : E \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par

$$\forall a \in E, \quad \varphi(a) = a \otimes x$$

Soit $a \in \text{Ker}(\varphi)$, alors

$$\forall z \in E, \quad \varphi(a)(z) = (a|z).x = 0$$

Or $x \neq 0$, donc avec $z = a$, on obtient $(a|a) = \|a\|^2 = 0$, donc $a = 0$, ce qui assure l'injectivité de φ .
 Pour tout $a \in E$, $\varphi(a) = a \otimes x$ est linéaire et $\text{Im}(\varphi(a)) \subset \text{Vect}(x)$. Donc

$$\text{Im}(\varphi) \subset \{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$$

Complétons x en une base de E , $\mathbf{B}' = (x, e_2, \dots, e_n)$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)$ si, et seulement si, la matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\dim(\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}) = n = \dim(E)$. Ce qui entraîne que φ est bijective de E vers $\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\text{Tr}(a \otimes x) = (a|x)$.

$(a \otimes x)(x) = (a|x).x$, donc en considérant la base précédente \mathbf{B}' , on aura

$$\text{Tr}(a \otimes x) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathbf{B}'}(a \otimes x)) = a_1 = (a|x)$$

3.3. Deux lemmes.

On considère ici un \mathbf{R} -espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit \mathcal{V} un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u)$$

appelé *nilindice générique* de \mathcal{V} (cet indice est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble \mathcal{V}^\bullet formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\text{Im} u^{p-1}$ pour u dans \mathcal{V} ; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \text{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soient u et v dans \mathcal{V} . Alors $\text{Tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k .

Lemme B. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de \mathcal{V} .

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, (u + tv)^k = \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

Débutons par l'unicité. Soient $g_0, \dots, g_k \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\sum_{i=0}^k t^i g_i = 0$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^k 1^i g_i = 0 \\ \sum_{i=0}^k 2^i g_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^k (k+1)^i g_i = 0 \end{array} \right.$$

La matrice de ce système linéaire est la matrice de Vandermonde $V(1, 2, \dots, k+1)$, qui est inversible. Ainsi $g_0 = \dots = g_k = 0$.

Démontrons l'existence, par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$.

Pour $k = 1$, $(u + tv)^1 = u + tv = t^0 u + t^1 v$, donc $f_0^{(1)} = u$, $f_1^{(1)} = v$.

Supposons qu'on a le résultat pour un certain $k \geq 2$, alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} (u + tv)^{k+1} &= (u + tv)^k (u + tv) \\ &= \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} (u + tv) \\ &= \sum_{i=0}^k (t^i f_i^{(k)} u + t^{i+1} f_i^{(k)} v) \\ &= \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k+1} t^i f_{i-1}^{(k)} v \\ &= f_0^{(k)} u + \sum_{i=1}^k t^i (f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v) + t^{k+1} f_k^{(k)} v \end{aligned}$$

ce qui donne $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u$, $f_{k+1}^{(k+1)} = f_k^{(k)} v$ et pour $i \in [[1, k]]$, $f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v$.

Toujours par récurrence.

$f_0^{(1)} = u$, et si $f_0^{(k)} = u^k$, alors

$$f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u = u^k u = u^{k+1}$$

$f_1^{(1)} = v$ et si $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$, alors

$$f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)} u + f_0^{(k)} v = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-i} + u^k v = \sum_{i=0}^k u^i v u^{k-i}$$

9. Montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

Soit $t \in \mathbf{R}$. Comme $u, v \in \mathcal{V}$, $u + tv \in \mathcal{V}$. L'endomorphisme $u + tv$ est nilpotent et par suite $(u + tv)^p = 0$. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'unicité établie à la question précédente nous livre $f_1^{(p)} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\text{Tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme **A**.

Soit $t \in \mathbf{R}$. Par linéarité de la trace, on obtient

$$\text{Tr}(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^k \text{Tr}(u^i v u^{k-i}) = \sum_{i=0}^k \text{Tr}(u^k v) = (k+1) \text{Tr}(u^k v)$$

L'endomorphisme $u + tv$ est nilpotent. Il en est de même pour $(u + tv)^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. Cela entraîne que, pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$0 = \text{Tr}((u + tv)^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \text{Tr}(f_i^{(k+1)})$$

Nous remarquons une fonction polynômiale nulle sur \mathbf{R} . Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\text{Tr}(f_i^{(k+1)}) = 0$, c'est à dire $\text{Tr}(u^k v) = 0$, ce qui valide le lemme **A**.

11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \text{Im } u^{p-1}$.

Comme E est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes. Par définition

$$\mathcal{V}^* = \{x \in E : \exists u \in \mathcal{V}, x \in \text{Im}(u^{p-1})\}$$

Comme

$$f_1^{(p-1)}(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((u + tv)^{p-1}(y) - f_0^{(p-1)}(y) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left((u + tv)^{p-1} \left(\frac{1}{t} y \right) - u^{(p-1)} \left(\frac{1}{t} y \right) \right)$$

$f_1^{(p-1)}(y)$ est limite d'une fonction à valeurs dans $K(\mathcal{V})$ qui est fermé, comme sous-espace vectoriel de dimension finie. Donc $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

Comme $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$, $\sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = -v u^{p-1}$. Par suite

$$u f_1^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} = \sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = -v u^{p-1}$$

donc $u \left(f_1^{(p-1)}(y) \right) = -v \left(u^{p-1}(y) \right)$.

Soit $x \in \text{Im}(u^{p-1})$. Alors, il existe $y \in E$ tel que $x = u^{p-1}(y)$. Par suite

$$v(x) = v \left(u^{p-1}(y) \right) = -u \left(f_1^{(p-1)}(y) \right) \in u(K(\mathcal{V}))$$

vu que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im } u^{p-1}$. Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

D'après la question 11

$$\forall x \in \text{Im}(u^{p-1}) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$$

i.e.

$$\forall x \in \text{Im}(u^{p-1}) \quad \mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V}))$$

On remarque que $u(\text{Vect}(x)) = \{0\}$, donc

$$K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + u(K(\mathcal{V})) \subset \text{Vect}(x) + u^2(K(\mathcal{V})) \subset \dots \subset \text{Vect}(x) + u^k(K(\mathcal{V}))$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$. Donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $y_k \in K(\mathcal{V})$ tel que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.

Pour $k = p$, $y = \lambda_p x + u^p(y_p) = \lambda_p x \in \text{Vect}(x)$, donc $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$.

De l'inclusion précédente

$$\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V})) \subset u(\text{Vect}(x)) \subset \{0\}$$

donc $\mathcal{V}x = \{0\}$.

3.4. Démonstration du théorème de Gerstenhaber.

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n . Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n - 1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent \mathcal{V}' de $\mathcal{L}(E')$ on a $\dim \mathcal{V}' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

et si en outre $\dim \mathcal{V}' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de \mathcal{V}' est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n , ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent \mathcal{V} de $\mathcal{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(-|-)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \text{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H . Pour $u \in \mathcal{W}$, on note \bar{u} l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H, \bar{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\bar{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} : \bar{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{V}}$ et \mathcal{Z} sont des sous-espaces vectoriels respectifs de $E, \mathcal{V}, \mathcal{L}(H)$ et \mathcal{V} .

On considère l'application linéaire

$$\varphi \begin{cases} \mathcal{V} & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{cases}$$

et on observe que $\mathcal{V}x = \text{Im}(\varphi), \mathcal{W} = \text{Ker}(\varphi)$.

On considère l'application linéaire

$$\psi \begin{cases} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{L}(H) \\ u & \longmapsto & \bar{u} \end{cases}$$

et on observe que $\overline{\mathcal{V}} = \text{Im}(\psi), \mathcal{Z} = \text{Ker}(\psi)$.

14. Montrer que

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

On applique le théorème du rang aux applications φ et ψ . On obtient

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{V}x) \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}})$$

ce qui donne l'égalité

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}}).$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que

$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z}.$$

et montrer qu'alors $x \in L^\perp$.

Par définition $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} : \bar{u} = 0\}$. Or, pour tout $u \in \mathcal{W}, \bar{u} = 0$ si, et seulement si

$$\forall z \in H \quad \bar{u}(z) = \pi(u(z)) = 0$$

Cette condition équivaut à

$$\forall z \in H, u(z) \in \text{Vect}(x)$$

qui se réécrit $u(H) \subset \text{Vect}(x)$.

Donc

$$\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} : u(H) \subset \text{Vect}(x)\}$$

Or d'après la question 6, l'application $a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E dans

$$\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$$

Notons L le sous-espace de E image réciproque de

$$\mathcal{Z} \subset \{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$$

par cette application. Alors

$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x : a \in L\}$$

De plus \mathcal{Z} et L sont isomorphes. Ainsi ont-ils même dimension.

Soit $a \in L$. L'application $a \otimes x \in \mathcal{Z}$, donc est nilpotente. Par suite grâce à la question 7

$$\text{Tr}(a \otimes x) = (a|x) = 0$$

Nous avons établi que $x \in L^\perp$.

16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **A** que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

Soit $v \in \mathcal{V}$. Montrons que $v(x) \in L^\perp$. Soit $a \in L$, alors pour tout $z \in E$

$$(a \otimes v(x))(z) = (a|z).v(x) = v((a|z)x) = v((a \otimes x)(z)) = (v \circ (a \otimes x))(z)$$

donc $a \otimes v(x) = v \circ (a \otimes x)$. En appliquant le lemme **A** avec $k = 1$, on obtient

$$\text{Tr}(v \circ (a \otimes x)) = \text{Tr}(a \otimes v(x)) = (a|v(x)) = 0$$

donc $v(x) \in L^\perp$.

D'après le lemme **A**

$$0 = \text{Tr}(u^k \circ a \otimes x) = (a|u^k(x))$$

donc $u^k(x) \in L^\perp$.

17. Justifier que $\lambda.x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

S'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda x = u(x)$. Donc $\lambda \in \text{Spec}(u)$. Or u est nilpotent, donc $\lambda = 0$. Ceci contredit $\lambda \neq 0$.

D'après les deux questions précédentes, $\mathcal{V}x \subset L^\perp$ et $\text{Vect}(x) \subset L^\perp$. Or $\text{Vect}(x)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{V}x$, donc l'inclusion $\mathcal{V}x \subset L^\perp$ est stricte, d'où $\dim(\mathcal{V}x) < \dim(L^\perp)$ et par suite

$$\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) < \dim(L^\perp) + \dim(L) = n$$

c'est à dire $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) \leq n - 1$.

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\bar{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

π est la projection orthogonale de E sur H donc, pour tout $z \in H$, $\pi(z) = z$. Ainsi

$$\bar{u}^0(z) = z = \pi(u^0(z))$$

Supposons que, pour tout $z \in H$, $\bar{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$, pour un certain $k \in \mathbf{N}^*$.

Tout $z \in E$ se décompose par $z = \alpha x + y$ où $\alpha \in \mathbf{R}$ et $y \in H$. Soit $u \in \mathcal{W}$. Comme $u(x) = 0$, il vient

$$u(z) = u(y) \quad \text{et} \quad \pi(z) = y$$

d'où $u(\pi(z)) = u(y) = u(z)$.

Alors, pour tout $z \in H$

$$\bar{u}^{k+1}(z) = \bar{u}(\bar{u}^k(z)) = \bar{u}(\pi(u^k(z))) = \bar{u}(u^k(z)) = \pi(u(u^k(z))) = \pi(u^{k+1}(z))$$

ce qui achève la récurrence.

Soit $u \in \mathcal{W}$. u étant nilpotent, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Ainsi $\bar{u}^k = \pi \circ u^k = 0$ donc $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent.

19. Démontrer que

$$\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

$\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ nilpotent et $\dim(H) = n - 1$, donc par hypothèse de récurrence,

$$\dim(\bar{\mathcal{V}}) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

donc avec l'égalité de la question 14 et l'inégalité de la question 17, on obtient

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) + \dim(\bar{\mathcal{V}}) \leq n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$

20. Démontrer que

$$\dim \bar{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim(L) = n.$$

et

$$L^\perp = \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

De l'inégalité de la question 17 et l'égalité de la question 14, on tire $\dim(\bar{\mathcal{V}}) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Or par hypothèse de récurrence $\dim(\bar{\mathcal{V}}) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Donc $\dim(\bar{\mathcal{V}}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Avec ces résultats, l'égalité de la question 14 entraîne que, $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n - 1$, donc

$$\dim(\text{Vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n$$

On a les inclusions entre sous-espaces, $\text{Vect}(x) \subset L^\perp$ et $\mathcal{V}x \subset L^\perp$. Donc $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^\perp$. De plus on a égalité de dimensions, donc $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x = L^\perp$.

D'après la question 16, pour tout $v \in \mathcal{V}$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $v^k(x) \in L^\perp$, donc $v^k(x) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

21. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de \mathcal{V} est supérieur ou égal à $n - 1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de \mathcal{V} est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

D'après la question 18, $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathcal{L}(H)$, de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ et $\dim(H) = n - 1$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base \mathbf{B}' de H tel que pour tout $v \in \mathcal{W}$, $\text{Mat}_{\mathbf{B}'}(\bar{v})$ est triangulaire supérieure stricte. Soit $v \in \mathcal{L}(H)$ de matrice dans la base \mathbf{B}' de taille $n - 1$, est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

alors $v^{n-2} \neq 0$. Considérons $u \in \mathcal{V}$ dont la restriction à H est égal à v , alors $u^{n-2} \neq 0$, donc le nilindice générique de \mathcal{V} est supérieur ou égale à $n - 1$. Si $\mathcal{V}x = \{0\}$, alors pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$. On considère la base de E , $\mathbf{B} = \mathbf{B}' \cup \{x\}$, alors tout élément $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte-tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ (l'ensemble \mathcal{V}^\bullet a été défini dans la partie 3.3). On note p le nilindice générique de \mathcal{V} , et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im} u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n - 1$ d'après la question 21.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\text{Im} v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. On pourra utiliser les résultats des questions 5 et 20.

Si $v^{p-1} = 0$, alors $\text{Im}(v^{p-1}) = \{0\} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Si $v^{p-1} \neq 0$, alors le nilindice de v est $p \geq n - 1$, donc d'après la question 5, $\text{Im}(v^{p-1}) = \text{Im}(v) \cap \text{Ker}(v)$ et $\dim(v^{p-1}) = 1$.

$v(x) \neq 0$, considérons $j = \max\{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket : v^k(x) \neq 0\}$. Alors $v^{j+1}(x) = 0$, donc

$$v^j(x) \in \text{Im}(v) \cap \text{Ker}(v) = \text{Im}(v^{p-1})$$

Par suite $\text{Im}(v^{p-1}) = \text{Vect}(v^j(x))$. D'après par la question 20, $v^j(x) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

23. On suppose qu'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\text{Im} v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

$v_0(x) \neq 0$, donc il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\pi_j(v_0(x)) = (v_0(x))_j \neq 0$ où π_j la j -ième projection qui livre la j -ième composante d'un vecteur de E dans une base fixée.

Soit $z \in E$. Considérons une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}$ nulle sur $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, et la fonction polynomiale

$$P : t \mapsto \pi_j((v + tv_0)(x)) \cdot \varphi((v + tv_0)^{p-1}(z))$$

de degré inférieur ou égal à p . D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$,

$$\forall z \in E \quad (v + tv_0)^{p-1}(z) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$. Ainsi donc P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

Or $\pi_j(v_0(x)) \neq 0$, donc

$$t \mapsto \pi_j((v + tv_0)(x))$$

est non nul, ce qui impose

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi((v + tv_0)^{p-1}(z)) = 0$$

En particulier pour $t = 0$, $\varphi(v^{p-1}(z)) = 0$, ceci pour toute forme φ nulle sur $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. En particulier pour les projections qui envoient un vecteur sur les composantes dans $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. On obtient $v^{p-1}(z) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraîne que $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24. Conclure.

On vient de montrer que pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc

$$\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

Par suite

$$K(\mathcal{V}) = \text{Vect}\left(\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \text{Im}(v^{p-1})\right) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

ce qui entraîne par le lemme **B**, que $\mathcal{V}x = \{0\}$. D'après la question 21, il existe une base de E dans laquelle tout $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire stricte.