Devoir surveillé n°6

samedi 1er février, 8h15-12h15

▶ *Sujet MPI.* — Les élèves de MPI résolvent les parties **1,2**.

▶ *Sujet MPI*.* — Les élèves de MPI* résolvent les parties **1,3**.

1. Formule Zêta alternée de Riemann (CCINP-MPI)

On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

1.1. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Calculer $F(1)$.
3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[2,+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   (b) Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
   En déduire que F est une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
5. *Lien avec ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

   Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

1.2. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. *Étude de la convergence*
   (a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.
   (b) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geqslant \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.
   En déduire, pour $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.
7. *Cas où $x = 1$*
   On suppose dans cette question 7. que $x = 1$.
   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.
   En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

2. De la diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un C-espace vectoriel (CCINP-MPI)

Dans ce problème, E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.1. Lemme de décomposition des noyaux, sous-espaces caractéristiques et projecteurs

1. *Un exemple.* Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
   Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.
2. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux : si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbf{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E, alors :
   $$\mathrm{Ker}[T(u)] = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_r(u)).$$
   L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

   Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.

   Justifier que $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

   Démontrer que : $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

   Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal. On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbf{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

   Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \ldots + R_m Q_m = 1$.

4. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$. Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

   et chaque p_i est un projecteur de E.

   Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

5. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

   (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace propre caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$.
6. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\ p_1 \oplus \mathrm{Im}\ p_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\ p_m$.
7. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Im}\ p_i$.

2.2. Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

8. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?
9. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$. Donner sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$, puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.
10. Démontrer que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).
11. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
    (a) Calculer la matrice A^2 et justifier que la matrice A est diagonalisable.
    (b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.
    (c) Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.
12. On note $\mathbf{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{C}[v]$ est égale au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.
13. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$. Démontrer que la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}[u]$.

14. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}[u]$?
15. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q \; p_i$.

    Nous allons étudier une « réciproque ».

    Soit u un endomorphisme de E, $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q \; f_i$. Démontrer que u est diagonalisable.

3. Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents (Mines Ponts-MPI)

Dans tout le problème on considère des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est *nilpotent* lorsqu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé *nilindice* de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite *stricte* lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim(\mathcal{V}) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim(\mathcal{V}) = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du problème sont largement indépendantes les unes des autres. La partie 3.1 est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie 3.2, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie 3.3, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **B**). Dans l'ultime partie 3.4, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E.

3.1. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.
2. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Montrer que
$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_B\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [[1, n]]$$
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geqslant q \geqslant 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.
5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geqslant n-1$ et $p \geqslant 2$ alors $\mathrm{Im}\, u^{p-1} = \mathrm{Im}\, u \cap \ker u$ et $\mathrm{Im}\, u^{p-1}$ est de dimension 1.

3.2. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (-|-))$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est lineaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E)\ :\ \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.
7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{Tr}(a \otimes x) = (a|x)$.

3.3. Deux lemmes.

On considère ici un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u)$$

appelé *nilindice générique* de $\mathcal{V}$ (cet indice est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geqslant 2$.
On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soient u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{Tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme B. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i\ f_i^{(k)}.$$

   Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9. Montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.
10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{Tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire le validité du lemme **A**.
11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$. Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

3.4. Démonstration du théorème de Gerstenhaber.

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n-1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$ on a $\dim \mathcal{V}' \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ rt si en outre $\dim \mathcal{V}' = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n , ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(-|-)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \mathrm{Vect}\,(x)^{\perp}, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \,|\, v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H,\, \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \,|\, u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} : \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.
14. Montrer que
$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$
15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \,|\, a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z}.$$
et montrer qu'alors $x \in L^{\perp}$.
16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **A** que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.
17. Justifier que $\lambda.x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leqslant n - 1.$$
18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.
19. Démontrer que
$$\dim \mathcal{V} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

20. Démontrer que
$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim(L) = n.$$
et
$$L^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x.$$
En déduire que $\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.
21. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte-tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.
On choisit x dans $\mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^{\bullet}$ a été défini dans la partie 3.3). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geqslant n-1$ d'après la question 21.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 5 et 20.*
23. On suppose qu'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$.
24. Conclure.