Un corrigé du devoir surveillé n°5

dont une partie est issue de documents écrits par MM. Devulder, Larochette, Lucas et Troesch

1. Formule de Taylor avec reste intégral 1
2. Inégalité de Kolmogorov 2
3. Séries trigonométriques 3
3.1. Deux résultats théoriques 3
3.2. Définition de la notion de série trigonométrique 4
3.3. Exemples de séries trigonométriques 4
3.4. Une condition suffisante pour la convergence normale 5
3.5. Une condition nécessaire pour la convergence normale 5
3.6. Autres propriétés 6
4. Minimum global d'une fonction de deux variables 7
4.1. Une condition nécessaire pour atteindre un minimum global en un point 7
4.2. Inégalité arithmético-géométrique 8
4.3. Minimum de $f\colon (x,y) \longmapsto x+y+\dfrac{1}{xy}$ 8
5. Une fonction continue nulle part dérivable 9
5.1. Un résultat théorique 9
5.2. Définition et continuité de la fonction de Weierstraß 10
5.3. La fonction de Weierstraß n'est nulle part dérivable 10
5.4. Un résultat de densité pour les fonctions continues et nulle part dérivables 12
6. Fonctions harmoniques 12
6.1. Notations 12
6.2. Quelques propriétés des fonctions harmoniques 13
6.3. Fonctions harmoniques à variables séparables 14
6.4. Fonctions harmoniques radiales 15

▶ *Sujet MPI.* — Les élèves de MPI résolvent les parties **1,2,3,4**.

▶ *Sujet MPI*.* — Les élèves de MPI* résolvent les parties **1,2,5,6**.

1. Formule de Taylor avec reste intégral

1. Énoncer la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale pour une fonction vectorielle.

> Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I,E)$. Alors
> $$\forall\,(a,x) \in I^2 \quad f(x) = \sum_{k=0}^{p} (x-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \cdot f^{(p+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Démontrer la formule énoncée à la question 1.

> On raisonne par récurrence sur l'entier $p \in \mathbf{N}$.
> - *Initialisation.* Pour $p=0$, la formule de Taylor avec reste intégrale est conséquence du théorème fondamental de l'analyse.
> - *Hérédité.* Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que la formule de Taylor avec reste intégrale soit vraie pour les fonctions de $\mathcal{C}^p(I,E)$. Soient $f \in \mathcal{C}^{p+2}(I,E)$ et $(a,x) \in I^2$. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, l'hypothèse de récurrence livre
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{p} (x-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \cdot f^{(p+1)}(t)\ \mathrm{d}t}_{=:R_p(f,a,x)}$$
> Notons
> $$g \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{(x-t)^p}{p!} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad B \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

de sorte que

$$R_p(f,a,x) = \int_a^x B\left(g, f^{(p+1)}\right)(t)\ \mathrm{d}t$$

Les fonctions

$$G \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & -\dfrac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} \end{array} \right.$$

et $f^{(p+1)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, nous pouvons appliquer la formule d'intégration par parties à $R_p(f,a,x)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} R_p(f,a,x) &= \left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}\cdot f^{(p+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x B\left(G, f^{(p+2)}\right)(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}\cdot f^{(p+1)}(x-a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}\cdot f^{(p+2)}(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p}(x-a)^k\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}\cdot f^{(p+1)}(x-a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}\cdot f^{(p+2)}(t)\ \mathrm{d}t$$

qui est la formule voulue.

2. Inégalité de Kolmogorov

Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, E)$ telle que les fonctions f et f'' soient bornées. On pose

$$M_0 := \sup_{x\in\mathbf{R}} ||\, f(x)\, || \qquad \text{et} \qquad M_2 := \sup_{x\in\mathbf{R}} ||\, f''(x)\, ||$$

1. Démontrer que, pour tout $(x,h)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^*$, $||\, f'(x)\, || \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.

D'après la deuxième inégalité triangulaire et l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$h\, ||\, f'(x)\, || - ||\, f(x+h) - f(x)\, || \leqslant ||\, f(x+h) - f(x) - h\, f'(x)\, || \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2$$

d'où

$$h\, ||\, f'(x)\, || \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2 + ||\, f(x+h)-f(x)\, || \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2 + ||\, f(x+h)\, || + ||\, f(x)\, || \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2 + 2\, M_0$$

En divisant par $h>0$, il vient

$$||\, f'(x)\, || \leqslant 2\,\frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}\, h$$

2. Qu'en déduire pour f' ?

En spécialisant l'inégalité de la question 1 à $h=1$, nous obtenons que, pour tout $x\in\mathbf{R}$

$$||\, f'(x)\, || \leqslant 2\, M_0 + \frac{M_2}{2}$$

La fonction f' est donc bornée.

3. Démontrer que $\displaystyle\sup_{x\in\mathbf{R}} ||\, f'(x)\, || =: M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

En étudiant les variations de la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h & \longmapsto & 2\,\dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2}{2}\,h \end{array} \right.$$

on démontre qu'elle admet un minimum, atteint au point $h_m = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$. En spécialisant l'inégalité de la question 1 à $h = h_m$, il vient

$$||\, f'(x)\,|| \leqslant 2\,\frac{M_0}{h_m} + \frac{M_2}{2}\,h_m = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

En passant à la borne supérieure sur $x \in \mathbf{R}$, il vient $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

3. Séries trigonométriques

3.1. Deux résultats théoriques

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$, qui converge uniformément sur I. On pose

$$f \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f est continue sur I et que, pour tout segment $[a,b] \subset I$

$$\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Pour établir la continuité de f au point $a \in I$, on pourra remarquer que

$$\forall\,(N,x) \in \mathbf{N}\times I \quad |f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)|$$

- Soit $a \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse de convergence uniforme

$$\exists\,N \in \mathbf{N} \quad \forall\,n \geqslant N \quad \forall\,x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et en particulier

$$\forall\,x \in I \quad |f_N(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Par continuité de la fonction f_N en a

$$\exists\,\alpha > 0 \quad \forall\,x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,\cap I \quad |f_N(x) - f_N(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,\cap I$. Alors

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Nous avons ainsi établi que

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\alpha > 0 \quad \forall\,x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,\cap I \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

qui est la définition de la continuité de f en a. Ceci étant vrai pour a dans I quelconque, la fonction f est continue sur I.

- Soit $[a,b]$ un segment inclus dans I. D'après le premier résultat, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[a,b]$ (théorème des bornes atteintes). L'hypothèse de convergence uniforme nous livre

$$||\, f_n - f\,||_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_a^b ||\, f_n - f\,||_{\infty,[a,b]}\ \mathrm{d}t}_{=(b-a)\,||\, f_n - f\,||_{\infty,[a,b]}}$$

Nous concluons avec le théorème d'encadrement.

2. Énoncer une version des deux résultats obtenus à la question précédente pour les séries de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Alors

- la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I ;
- la série numérique $\displaystyle\sum \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

3.2. Définition de la notion de série trigonométrique

Dans ce qui suit, on appelle “série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels. On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbf{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$$

3.3. Exemples de séries trigonométriques

3. Démontrer que la série trigonométrique $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

On a

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbf{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \geqslant 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p - e^{ix}}$$

En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1}$$

Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4 - 2\cos(x)}{5 - 4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

4. Écrire la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.

En utilisant le développement en série de l'exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$

Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x)) \exp(i \sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

5. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbf{R}$.

Posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ et

$$u_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a_n \cos(nx) \end{array} \right.$$

(a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \dfrac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum u_n$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbf{R}$.

6. On admet que la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

La norme infinie sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

3.4. Une condition suffisante pour la convergence normale

7. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

On a

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

3.5. Une condition nécessaire pour la convergence normale

8. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

On a ($\langle \cdot , \cdot \rangle$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^2$)

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |a \cos(x) + b \sin(x)| = |\langle (a, b) , (\cos(x), \sin(x)) \rangle| \leq \|(a, b)\| \cdot \|(\cos(x), \sin(x))\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, il y a un cas d'égalité :

- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a, b) \neq (0, 0)$, $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x), \sin(x))$.

9. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Posons

$$u_n \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \end{array} \right.$$

On suppose ici que $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbf{R}$ quand c'est le cas pour x si $n>0$)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2+b_n^2} \geqslant \left\{ \begin{array}{l} |a_n| \geqslant 0 \\ |b_n| \geqslant 0 \end{array} \right.$$

Par comparaison des séries positives, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

3.6. Autres propriétés

10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$. Justifier que $f\in C_{2\pi}$.

- La convergence normale sur $\mathbf{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ et cette dernière conserve la continuité (question 2). Les fonctions de la série étant continues sur $\mathbf{R}$, il en est de même de f.
- La convergence normale sur $\mathbf{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbf{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité. En effet

$$\forall\,(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R} \quad \sum_{n=0}^{N} a_n\cos(n(x+2\pi))+b_n\sin(n(x+2\pi)) = \sum_{n=0}^{N} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

et on peut passer à la limite en N pour obtenir la 2π-périodicité de la fonction f.

11. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx$ pour $n\neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx$ pour k et n entiers.

On effectue une linéarisation :

$$\forall\,(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R} \quad \cos^2(nx)=\frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)$$

On a donc

$$\forall n\geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx)+\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même

$$\forall\,(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R} \quad \sin(kx)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx))$$

La fonction $x\longmapsto\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$ (évident si $p=0$, par primitivation en $x\longmapsto -\dfrac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n,k\in\mathbf{N} \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx=0$$

12. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$: pour tout réel x, $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f)=a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k\neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx=0$.

Soit $n\in\mathbf{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos(kx)\cos(nx)+b_k\sin(kx)\cos(nx))\,dx$$

Posons encore, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$u_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \end{array} \right.$$

On a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |u_k(x)\cos(nx)| \leq |u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le segment $[-\pi, \pi]$. On peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\, dx \right)$$

d'après la question 2. Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

4. Minimum global d'une fonction de deux variables

4.1. Une condition nécessaire pour atteindre un minimum global en un point

Soit $\Omega :=]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable. On suppose qu'il existe $x_m \in \Omega$ tel que

$$\forall\, x \in \Omega \quad f(x_m) \leqslant f(x) \qquad [f \text{ atteint un minimum global en } x_m]$$

1. Soit h un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$. Démontrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall\, t \in]-r, r[\quad x_m + t\, h \in \Omega$$

puis que $\mathrm{d}f(x_m) \cdot h = 0$.

- Tout d'abord Ω est ouvert (produit d'ouverts). Ensuite l'application

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & x_m + t\, h \end{array} \right.$$

est continue (affine). Ainsi $\gamma^{-1}(\Omega)$ est-il un ouvert de $\mathbf{R}$. Comme $\gamma(0) = x_m \in \Omega$, 0 appartient à l'ouvert $\gamma^{-1}(\Omega)$ de $\mathbf{R}$. Il existe donc $r > 0$ tel que $]-r, r[\subset \gamma^{-1}(\Omega)$, i.e. tel que

$$\forall\, t \in]-r, r[\qquad \gamma(t) = x_m + t\, h \in \Omega$$

Dans la suite, on nomme abusivement encore γ la restritction de γ à l'intervalle $]-r, r[$.

- Comme γ est dérivable sur $]-r, r[$ (affine), elle y est également différentiable (fonction de la variable réelle). L'application

$$f \circ \gamma \left| \begin{array}{ccc}]-r, r[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(\gamma(t)) \end{array} \right.$$

est différentiable sur $]-r, r[$ (composée d'applications différentiables) ou, ce qui revient au même, dérivable sur $]-r, r[$ (fonction de la variable réelle). De plus, pour tout $t \in]-r, r[$

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}(f \circ \gamma)(t) \cdot 1_{\mathbf{R}} = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot (\mathrm{d}\gamma(t) \cdot 1_{\mathbf{R}}) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot h$$

Or, pour tout $t \in]-r, r[$

$$f(\gamma(t)) \geqslant f(x_m) = f(\gamma(0))$$

La fonction $f \circ \gamma \colon\ ]-r, r[\longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable sur $]-r, r[$ et atteint un minimum en 0, qui est un point intérieur. D'après le cours de MP2I

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(\gamma(0)) \cdot h = \mathrm{d}f(x_m) \cdot h$$

2. En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_m) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_m) = 0$.

Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$. D'après la question précédente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_m) := D_{e_1} f(x_m) = \mathrm{d}f(x_m) \cdot e_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_m) := D_{e_2} f(x_m) = \mathrm{d}f(x_m) \cdot e_2 = 0$$

4.2. Inégalité arithmético-géométrique

3. Démontrer que, pour tout $(a, b, c) \in]0, +\infty[^3$, $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

- La fonction ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\ln'' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$ donc ln est concave sur $]0, +\infty[$.
- L'inégalité de Jensen appliquée à $a, b, c \in]0, +\infty[$ avec des poids tous égaux à $\dfrac{1}{3}$ donne alors

$$\ln \frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln \sqrt[3]{abc},$$

donc, par croissance de l'exponentielle, $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

4.3. Minimum de $f\colon (x, y) \longmapsto x + y + \dfrac{1}{xy}$

Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y & \longmapsto & x + y + \dfrac{1}{xy} \end{array} \right.$$

4. Justifier que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle en tout point de Ω.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ car il s'agit d'une fonction rationnelle en deux variables. De plus, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{1}{y^2 x}.$$

On en déduit que

$$\forall\, (x, y) \in]0, +\infty[^2 \quad \forall\, (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \mathrm{d}f(x, y) \cdot (h_1, h_2) = \left(1 - \frac{1}{x^2 y}\right) h_1 + \left(1 - \frac{1}{y^2 x}\right) h_2$$

5. Démontrer qu'il existe un unique point $(a, b) \in \Omega$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. On a

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) & = & 0 \end{array} \right.$$

si et seulement si $x^2 y = xy^2 = 1$. En raisonnant par analyse-synthèse, on démontre que

$$x^2 y = xy^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (1, 1)$$

Le seul point (a, b) où les deux dérivées partielles de f s'annulent simultanément est $(a, b) = (1, 1)$.

6. On suppose que f possède un minimum global m. Déterminer la valeur de m.

D'après la question 2, si fonction f atteint un minimum global au point (a, b) alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) =$

0. De la question précédente, nous déduisons que, si f possède un minimum global, alors ce dernier vaut $f(1,1)=3$.

7. La fonction f possède-t-elle un minimum global ?

En appliquant la question 3, on a

$$\forall\,(x,y)\in\,]0,+\infty[^2\quad f(x,y)\geqslant 3\sqrt[3]{x\cdot y\cdot\frac{1}{xy}}=3=f(1,1)$$

Donc f présente un minimum global en $(1,1)$ qui vaut 3

5. Une fonction continue nulle part dérivable

5.1. Un résultat théorique

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$, qui converge uniformément sur I. Démontrer que la fonction

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\end{array}\right.$$

est continue sur I. Pour établir la continuité de f au point $a\in I$, on pourra remarquer que

$$\forall\,(N,x)\in\mathbf{N}\times I\quad |f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(a)|+|f_N(a)-f(a)|$$

Soit $a\in I$. Soit $\varepsilon>0$. D'après l'hypothèse de convergence uniforme

$$\exists\,N\in\mathbf{N}\quad\forall\,n\geqslant N\quad\forall\,x\in I\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

et en particulier

$$\forall\,x\in I\quad |f_N(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

Par continuité de la fonction f_N en a

$$\exists\,\alpha>0\quad\forall\,x\in\,]a-\alpha,a+\alpha[\,\cap I\quad |f_N(x)-f_N(a)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $x\in\,]a-\alpha,a+\alpha[\,\cap I$. Alors

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(a)|+|f_N(a)-f(a)|\leqslant\varepsilon$$

Nous avons ainsi établi que

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\alpha>0\quad\forall\,x\in\,]a-\alpha,a+\alpha[\,\cap I\quad |f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon$$

qui est la définition de la continuité de f en a. Ceci étant vrai pour a dans I quelconque, la fonction f est continue sur I.

2. Énoncer une version du résultat obtenu à la question précédente pour les séries de fonctions.

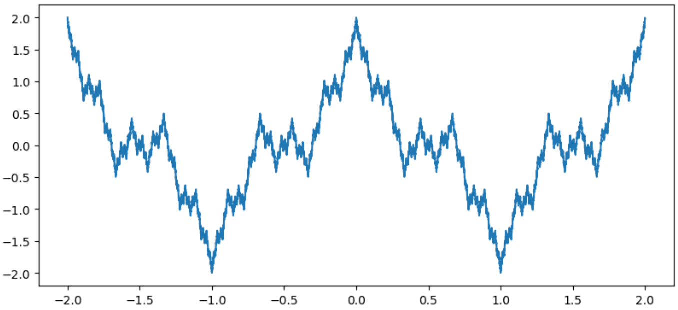
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Alors la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

5.2. Définition et continuité de la fonction de Weierstraß

Soient $b \in]0,1[$ et a un entier positif impair tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. On définit la fonction f par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \end{array} \right.$$

dont une esquisse de courbe est donnée ci-contre.



3. Justifier que f est définie sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & b^n \cos(a^n \pi x) \end{array} \right.$$

La fonction f_n est bornée sur $\mathbf{R}$ et

$$||\, f_n \,||_\infty = b^n$$

Comme $-1 < b < 1$ la série $\sum ||\, f_n \,||_\infty$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$, donc simplement convergente sur $\mathbf{R}$. Aussi f est-elle bien définie.

4. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbf{R}$. Comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, elle converge uniformément sur $\mathbf{R}$. D'après la question 2, la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

5.3. La fonction de Weierstraß n'est nulle part dérivable

Soient $x \in \mathbf{R}$, $h \in \mathbf{R}^*$ et $m \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$S_m(h) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{m-1} b^n \left(\cos(a^n \pi (x+h)) - \cos(a^n \pi x)\right)$$

et

$$R_m(h) = \frac{1}{h} \sum_{n=m}^{+\infty} b^n \left(\cos(a^n \pi (x+h)) - \cos(a^n \pi x)\right)$$

5. Démontrer que, pour tout $h \in \mathbf{R}^*$, $|S_m(h)| \leqslant \pi \dfrac{(ab)^m}{ab-1}$.

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x) = -(ab)^n \pi \sin(a^n \pi x) \qquad \text{donc} \qquad |f_n'(x)| \leqslant (ab)^n \pi$$

D'après l'inégalité des accroissements finis entre x et $x+h$

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| \leqslant |h|(ab)^n \pi$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En sommant cette inégalité sur $n \in [\![0, m-1]\!]$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{m-1} |f_n(x+h) - f_n(x)| \leqslant |h|\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = |h|\pi \frac{(ab)^m - 1}{ab-1} \leqslant \frac{|h|\pi(ab)^m}{ab-1}$$

car $ab - 1 > 0$ par hypothèse. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|S_m(h)| = \left| \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|f_n(x+h) - f_n(x)|}{|h|}$$

soit $|S_m(h)| \leqslant \dfrac{\pi(ab)^m}{ab-1}$.

Soit $\alpha_m = \left\lfloor a^m\, x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$ et $\beta_m = a^m\, x - \alpha_m$. On pose $h_m = \dfrac{1-\beta_m}{a^m}$.

6. Justifier que $|h_m| \leqslant \dfrac{3}{2\, a^m}$.

Par définition de la partie entière, $a^m x - \frac{1}{2} < \alpha_m \leqslant a^m x + \frac{1}{2}$. Ainsi

$$-\frac{1}{2} \leqslant a^m x - \alpha_m < \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}$$

Par conséquent, $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \beta_m \leqslant \dfrac{3}{2}$, donc $|1-\beta_m| \leqslant \dfrac{3}{2}$. On en déduit que $|h_m| = \dfrac{|1-\beta_m|}{a^m} \leqslant \dfrac{3}{2a^m}$.

7. Soit n un entier supérieur ou égal à m.

   (a) Démontrer que $\cos(a^n\, \pi\,(x+h_m)) = (-1)^{\alpha_m+1}$. Calculer de même $\cos(\pi\, a^{n-m}\, \alpha_m)$ et $\sin(\pi\, a^{n-m}\, \alpha_m)$ en fonction de α_m.

   Puisque a est impair $a \equiv 1\ [2]$, donc $a^{n-m} \equiv 1\ [2]$, donc $a^{n-m}(\alpha_m+1) \equiv (\alpha_m+1)\ [2]$. On en déduit que $a^{n-m}(\alpha_m+1)$ est de même parité que α_m+1.
   On a

$$x + h_m = x + \frac{1-\beta_m}{a^m} = \frac{a_m x - \beta_m + 1}{a^m} = \frac{\alpha_m + 1}{a^m}$$

   par définition de β_m. Alors

$$\cos(\pi a^n (x+h_m)) = \cos\left(a^{n-m}(\alpha_m+1)\pi\right) = (-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)} = (-1)^{\alpha_m+1}$$

   De la même manière, $a^{n-m}\alpha_m$ est de même parité que α_m, d'où

$$\cos\left(\pi a^{n-m}\alpha_m\right) = (-1)^{a^{n-m}\alpha_m} = (-1)^{\alpha_m} \quad \text{et} \quad \sin\left(\pi a^{n-m}\alpha_m\right) = 0$$

   (b) En déduire que $\cos(a^n\, \pi\, x) = (-1)^{\alpha_m}\, \cos(\pi\, a^{n-m}\, \beta_m)$.

   On en déduit que

$$\begin{aligned}
\cos(a^n \pi x) &= \cos\left(\pi a^{n-m}(\alpha_m + \beta_m)\right) \\
&= \cos\left(\pi a^{n-m}\alpha_m\right)\cos\left(\pi a^{n-m}\beta_m\right) - \sin\left(\pi a^{n-m}\alpha_m\right)\sin\left(\pi a^{n-m}\beta_m\right) \\
&= (-1)^{\alpha_m}\cos\left(\pi a^{n-m}\beta_m\right).
\end{aligned}$$

8. Démontrer que $|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|}$.

Il vient alors

$$\begin{aligned}
R_m(h_m) &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n \left(\cos(a^n\pi(x+h_m)) - \cos(a^n\pi x)\right) \\
&= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n \left((-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos\left(\pi a^{n-m}\beta_m\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n \left(1 + \cos\left(\pi a^{n-m}\beta_m\right)\right)
\end{aligned}$$

Les termes de la série ci-dessus sont positifs, car pour tout $y \in \mathbf{R}, 1+\cos y \geqslant 0$. Ainsi, la somme est supérieure à son premier terme, obtenu pour $n = m$. Par conséquent

$$|R_m(h_m)| = \frac{1}{|h_m|}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n\left(1+\cos\left(\pi a^{n-m}\beta_m\right)\right) \geqslant \frac{1}{|h_m|} b^m \left(1+\cos(\pi\beta_m)\right)$$

Or $-\dfrac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\cos(\pi\beta_m) \geqslant 0$. On en déduit que $|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|} = \dfrac{(ab)^m}{1-\beta_m}$.

9. Démontrer que $\left|\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| \geqslant \dfrac{2}{3}\,(ab)^m \cdot \dfrac{ab-\left(1+\frac{3}{2}\,\pi\right)}{ab-1}$.

On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{f\left(x+h_m\right)-f(x)}{h_m}\right| &= \left|S_m\left(h_m\right)+R_m\left(h_m\right)\right| \\ &\geqslant \left|R_m\left(h_m\right)\right|-\left|S_m\left(h_m\right)\right| \\ &\geqslant \frac{(ab)^m}{1-\beta_m}-\frac{\pi(ab)^m}{ab-1}=(ab)^m\frac{ab-1-\pi\left(1-\beta_m\right)}{\left(1-\beta_m\right)(ab-1)} \\ &\geqslant (ab)^m\frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{\left(1-\beta_m\right)(ab-1)} \\ &\geqslant \frac{2(ab)^m}{3}\cdot\frac{ab-\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}\end{aligned}$$

puisque $1-\beta_m \leqslant \dfrac{3}{2}$ et est positif.

10. Démontrer que f n'est dérivable en aucun réel x.

Par l'hypothèse sur ab, on a $\dfrac{ab-\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}>0$. De plus, $ab>1$, donc $\lim\limits_{m\to+\infty}(ab)^m=+\infty$. Ainsi

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{f\left(x+h_m\right)-f(x)}{h_m}\right|=+\infty.$$

Puisque $a>1$ (sinon on n'aurait pas $ab>1$, puisque $b<1$), $(h_m)_{m\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 . Ainsi, le résultat précédent contredit le critère séquentiel de la convergence du taux d'accroissement en x lorsque h tend vers 0. Ainsi f n'est pas dérivable en x. Le réel x ayant été choisi quelconque, la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$, alors qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$.

5.4. Un résultat de densité pour les fonctions continues et nulle part dérivables

Soient a, b des réels tels que $a<b$. On munit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ de la convergence uniforme.

11. Démontrer que
$$A := \left\{f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \;:\; f \text{ n'est dérivable en aucun point de } [a,b]\right\}$$
est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$.

Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Nommons g la restriction de la fonction de Weierstraß au segment $[a,b]$, qui est continue sur $[a,b]$ et nulle part dérivable sur $[a,b]$. D'après le théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a,b]$ telles que

$$||\,P_n-(g+f)\,||_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

i.e.

$$P_n-g \xrightarrow[n\to+\infty]{||\,\cdot\,||_\infty} f$$

Soit $n\in\mathbf{N}$. La fonction P_n-g est continue sur $[a,b]$ (P_n et g le sont), mais elle n'est dérivable en aucun point de $[a,b]$ (si P_n-g était dérivable en un point x de $[a,b]$ alors g le serait aussi, car P_n est dérivable en x). Nous avons établi que f est limite uniforme d'une suite de fonctions de A.

6. Fonctions harmoniques

6.1. Notations

- n désigne un entier strictement positif.
- On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.
- Si U est une partie de $\mathbf{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.

- Pour $a \in \mathbf{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit
$$D(a, R) = \{x \in \mathbf{R}^n \;:\; |x - a\| < R\}$$
La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a, R)}$.
- L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ par
$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U,\; \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$
- Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ est dite harmonique sur U si
$$\forall x \in U,\; \Delta f(x) = 0$$
L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(U)$.

6.2. Quelques propriétés des fonctions harmoniques

Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbf{R}$.

1. Démontrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$.

Pour $k \in \mathbf{N}$ et $i \in [\![1, n]\!]$, l'application
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{k+1}(U) & \longrightarrow & \mathcal{C}^k(U) \\ f & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \end{array}\right.$$
est linéaire. Donc par composition et somme l'application Δ est linéaire de $\mathcal{C}^2(U)$ vers $\mathcal{C}^0(U)$ or $\mathcal{H}(U)$ est le noyau de cette application linéaire ainsi $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$.

2. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U Ainsi toutes les dérivées partielles de f est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. En utilisant le théorème de Schwarz et la linéarité de la dérivation, on a
$$\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta f)$$
Comme f est harmonique et par dérivation de la fonction nulle, on a
$$\forall x \in U \quad \Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = 0$$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{H}(U)$. Puis on peut procéder par récurrence. L'initialisation venant d'être faite et pour l'hérédité, on utilise ce qui vient d'être fait en remarquant que
$$\forall\, k \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, i_1, \dots, i_{k+1} \in [\![1, n]\!] \quad \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right)$$
On a montré que toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

- *Analyse.* Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f^2 \in \mathcal{H}(U)$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et ainsi $\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$ d'où
$$\Delta(f^2) = 2f \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$$

Alors

$$\forall x \in U \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^2 = 0$$

Comme il s'agit de sommes de réels positifs, on a

$$\forall x \in U \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$$

donc

$$\forall x \in U \quad \nabla f(x) = 0_{\mathbf{R}^n}$$

or U est un ouvert connexe par arcs, donc f est constante sur U.

- *Synthèse.* On suppose que f est constante sur U alors f^2 également d'où

$$\forall x \in U \quad \Delta f(x) = 0 \ \text{ et } \ \Delta \left(f^2\right)(x) = 0$$

Ainsi f et f^2 sont harmoniques sur U.

- *Conclusion.* Si U est connexe par arcs, les fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$ sont les fonctions constantes.

4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

- Comme U est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$, ceci nous fournit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $r > 0$ tels que $D(a, r) \subset U$. Ainsi pour tout $t \in]a_1 - r, a_1 + r[$ (ensemble infini), on a $(t, a_2, \ldots, a_n) \in U$ ainsi la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$$

est clairement harmonique sur U sans y être constante.

- De plus

$$\forall x \in U \quad \Delta \left(\varphi^2\right)(x) = 2 \neq 0$$

donc $\varphi^2 = \varphi \times \varphi$ n'est pas harmonique sur U. Le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas nécessairement une fonction harmonique.

6.3. Fonctions harmoniques à variables séparables

On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbf{R}^2$ à variables séparables, c'est à dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$. On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, non identiquement nulles, et on pose

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ f(x, y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbf{R}^2$.

5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \ \text{ et } \ z'' - \lambda z = 0$$

On a f de classe $\mathcal{C}^2$ par produit car $(x, y) \longmapsto u(x)$ et $(x, y) \longmapsto v(y)$ le sont. On a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad 0 = \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$$

Comme v est non identiquement nulle, ceci nous fournit $t \in \mathbf{R}$ tel que $v(t) \neq 0$. En posant $\lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$, on a alors

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

donc

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad 0 = \Delta f(x, y) = -\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = \left(v''(y) - \lambda v(y)\right) u(x)$$

En prenant $t' \in \mathbf{R}$ tel que $u(t') \neq 0$, on a

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad 0 = v''(y) - \lambda v(y)$$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que u et v soient solutions respectives des équations $z'' + \lambda z = 0$ et $z'' - \lambda z = 0$.

6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

On note les équations différentielles

$$E_1 : \ z'' + \lambda z = 0 \ \text{ et } \ E_2 : \ \ z'' - \lambda z = 0$$

- Si $\lambda = 0$, les solutions de E_1 (ou E_2) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto Ax + B$$
avec A et $B \in \mathbf{R}$.
- Si $\lambda > 0$, les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme
$$t \mapsto A\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)$$
avec A et $B \in \mathbf{R}$. Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme
$$t \mapsto A'\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\lambda}\right) + B'\operatorname{sh}\left(t\sqrt{\lambda}\right)$$
avec A' et $B' \in \mathbf{R}$.
- Si $\lambda < 0$, les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme
$$t \mapsto A\cos\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + B\sin\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$$
avec A et $B \in \mathbf{R}$. Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme
$$t \mapsto A'\operatorname{ch}\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + B'\operatorname{sh}\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$$
avec A' et $B' \in \mathbf{R}$.
- Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et u et v solutions non nulles respectives de
$$E_1 : \ z'' + \lambda z = 0 \ \text{ et } \ E_2 : \ \ z'' - \lambda z = 0$$
Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et ainsi $f : (x, y) \longmapsto u(x)v(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.
Et on a :
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(y) - \lambda u(x)v(y) = 0$$
donc f est harmonique sur $\mathbf{R}^2$
- Conclusion. Les équations différentielles étant linéaire homogène d'ordre 2 leur solutions forment un plan vectoriel. Une fonction f à variables séparables sur $\mathbf{R}^2$ est harmonique non nulles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$, (A, B) et $(A', B') \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que
  — si $\lambda = 0$, $f : (x, y) \longmapsto (Ax + B)(A'y + B')$
  — si $\lambda > 0$, $f : (x, y) \longmapsto \left(A\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right)\left(A'\operatorname{ch}\left(y\sqrt{\lambda}\right) + B'\operatorname{sh}\left(y\sqrt{\lambda}\right)\right)$
  — si $\lambda < 0$, $f : (x, y) \longmapsto \left(A\operatorname{ch}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + B\operatorname{sh}\left(x\sqrt{-\lambda}\right)\right)\left(A'\cos\left(y\sqrt{-\lambda}\right) + B'\sin\left(y\sqrt{-\lambda}\right)\right)$

6.4. Fonctions harmoniques radiales

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On pose, pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$,

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

7. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$.

Les fonctions $(r, \theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ et $(r, \theta) \longmapsto r\sin(\theta)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$ par produits donc la fonction $(r, \theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$ par composantes de plus cette fonction est à valeurs dans l'ouvert $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ où f y est de classe $\mathcal{C}^2$ donc par composition g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur

$\mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$.

8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$, exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

On utilise la formule de la chaîne dont l'écriture abusive est :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ainsi

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

9. Exprimer également $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

On continue à appliquer la formule de la chaîne avec une écriture abusive en servant du calcul ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$$

puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathcal{C}^2$: on a successivement

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) \quad = \quad & \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ & + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \quad = \quad & -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \\ & + r\cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) \quad = \quad & -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ & + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r^2\sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ & + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{aligned}$$

10. Montrer que $f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$,

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

Soit $(r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$, on a à l'aide des calculs précédents

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \right)$$

On suppose que pour tout $(r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$, $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ avec ce qui précède

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R} \quad \Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0$$

Or pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en prenant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $r > 0$ et il existe $\theta \in \mathbf{R}$, tel que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et ainsi

$$\forall (x,y)\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \Delta f(x,y) = 0$$

d'où $f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. La réciproque est immédiate. Ainsi on a bien $f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$, $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$.

11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est à dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

- *Analyse.* On considère f une fonction harmoniques radiales de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On note g comme ci dessus. On peut alors trouver h fonction définie sur $]0,+\infty[$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R} \quad g(r,\theta) = h(r)$$

Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$ alors h l'est sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = h'(r) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = h''(r)$$

La question précédente donne alors

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R} \quad r^2 h''(r) + rh'(r) = 0$$

donc h' est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$tz' + z = 0$$

Une solution évidente est $t \mapsto 1/t$ ce qui nous fournit $A \in \mathbf{R}$ tel que $h' : r \longmapsto A/r$. Ce qui nous fournit $B \in \mathbf{R}$ tel que $h : r \longmapsto A\ln(r)+B$ donc $g : (r,\theta) \longmapsto A\ln(r)+B$ puis $f : (x,y) \longmapsto A\ln(\sqrt{x^2+y^2})+B$.
- *Synthèse.* On suppose qu'il existe A et $B \in \mathbf{R}$ tels que $f : (x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2)+B$ alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et radiale car la fonction

$$g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) = 2A\ln(r) + B$$

est indépendante de θ et on vérifie facilement que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R} \quad r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

donc $f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ d'après la question 10.
- *Conclusion.* Les fonctions harmoniques radiales de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont les fonctions

$$(x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2) + B$$

avec $A, B \in \mathbf{R}$.

12. Soient a, b, r_1, r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \text{ si } \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \text{ si } \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$

En se servant de la question précédente, on cherche A et $B \in \mathbf{R}$ tels que $\begin{cases} 2A\ln(r_1) + B = a \\ 2A\ln(r_2) + B = b \end{cases}$. On remarque que $A = \dfrac{b-a}{2\left(\ln(r_2) - \ln(r_1)\right)}$ et $B = \dfrac{\ln(r_2)a - \ln(r_1)b}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$ conviennent. Alors d'après la question 11, en prenant

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{(b-a)\ln(x^2+y^2) + 2\ln(r_2)a - 2\ln(r_1)b}{2\left(\ln(r_2) - \ln(r_1)\right)}$$

sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbf{R}) \\ \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \quad \text{si} \quad \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \quad \text{si} \quad \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$