Devoir surveillé n°5

samedi 11 janvier, 8h15-12h15

▶ *Sujet MPI.* — Les élèves de MPI résolvent les parties **1,2,3,4**.

▶ *Sujet MPI*.* — Les élèves de MPI* résolvent les parties **1,2,5,6**.

1. Formule de Taylor avec reste intégral

1. Énoncer la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale pour une fonction vectorielle.
2. Démontrer la formule énoncée à la question 1.

2. Inégalité de Kolmogorov

Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, E)$ telle que les fonctions f et f'' soient bornées. On pose

$$M_0 := \sup_{x\in\mathbf{R}} ||\, f(x)\, || \qquad \text{et} \qquad M_2 := \sup_{x\in\mathbf{R}} ||\, f''(x)\, ||$$

1. Démontrer que, pour tout $(x,h) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^*$, $||\, f'(x)\, || \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.
2. Qu'en déduire pour f' ?
3. Démontrer que $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} ||\, f'(x)\, || =: M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

3. Séries trigonométriques

3.1. Deux résultats théoriques

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$, qui converge uniformément sur I. On pose
$$f \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$
Démontrer que la fonction f est continue sur I et que, pour tout segment $[a,b] \subset I$
$$\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$
Pour établir la continuité de f au point $a \in I$, on pourra remarquer que
$$\forall\,(N,x) \in \mathbf{N}\times I \quad |f(x)-f(a)| \leqslant |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(a)| + |f_N(a)-f(a)|$$
2. Énoncer une version des deux résultats obtenus à la question précédente pour les séries de fonctions.

3.2. Définition de la notion de série trigonométrique

Dans ce qui suit, on appelle “série trigonométrique" une série de fonctions du type
$$\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$
où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels. On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbf{N}$, on notera
$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

3.3. Exemples de séries trigonométriques

3. Démontrer que la série trigonométrique $\sum\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.
Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$
(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).
4. Écrire la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.
5. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n\cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbf{R}$.
6. On admet que la série trigonométrique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

3.4. Une condition suffisante pour la convergence normale

7. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

3.5. Une condition nécessaire pour la convergence normale

8. Soient $a,b \in \mathbf{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x)+b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.
9. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

3.6. Autres propriétés

10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.
11. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx$ pour k et n entiers.
12. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\, dx = 0$.

4. Minimum global d'une fonction de deux variables

4.1. Une condition nécessaire pour atteindre un minimum global en un point

Soit $\Omega :=]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable. On suppose qu'il existe $x_m \in \Omega$ tel que

$$\forall x \in \Omega \quad f(x_m) \leqslant f(x) \qquad [f \text{ atteint un minimum global en } x_m]$$

1. Soit h un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$. Démontrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que
$$\forall t \in]-r, r[\quad x_m + t\, h \in \Omega$$
puis que $\mathrm{d}f(x_m) \cdot h = 0$.
2. En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_m) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_m) = 0$.

4.2. Inégalité arithmético-géométrique

3. Démontrer que, pour tout $(a, b, c) \in]0, +\infty[^3$, $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

4.3. Minimum de $f\colon (x, y) \longmapsto x + y + \dfrac{1}{xy}$

Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y & \longmapsto & x + y + \dfrac{1}{xy} \end{array} \right.$$

4. Justifier que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle en tout point de Ω.
5. Démontrer qu'il existe un unique point $(a, b) \in \Omega$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.
6. On suppose que f possède un minimum global m. Déterminer la valeur de m.
7. La fonction f possède-t-elle un minimum global ?

5. Une fonction continue nulle part dérivable

5.1. Un résultat théorique

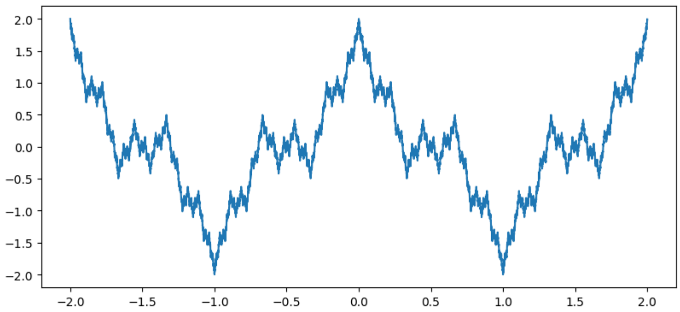
1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$, qui converge uniformément sur I. Démontrer que la fonction
$$f \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$
est continue sur I. Pour établir la continuité de f au point $a \in I$, on pourra remarquer que
$$\forall (N, x) \in \mathbf{N} \times I \quad |f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)|$$
2. Énoncer une version du résultat obtenu à la question précédente pour les séries de fonctions.

5.2. Définition et continuité de la fonction de Weierstraß

Soient $b \in]0,1[$ et a un entier positif impair tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. On définit la fonction f par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \end{array} \right.$$

dont une esquisse de courbe est donnée ci-contre.



3. Justifier que f est définie sur $\mathbf{R}$.
4. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

5.3. La fonction de Weierstraß n'est nulle part dérivable

Soient $x \in \mathbf{R}$, $h \in \mathbf{R}^*$ et $m \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$S_m(h) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{m-1} b^n \left(\cos(a^n \pi (x+h)) - \cos(a^n \pi x)\right)$$

et

$$R_m(h) = \frac{1}{h} \sum_{n=m}^{+\infty} b^n \left(\cos(a^n \pi (x+h)) - \cos(a^n \pi x)\right)$$

5. Démontrer que, pour tout $h \in \mathbf{R}^*$, $|S_m(h)| \leqslant \pi \dfrac{(ab)^m}{ab-1}$.

Soit $\alpha_m = \left\lfloor a^m x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ et $\beta_m = a^m x - \alpha_m$. On pose $h_m = \dfrac{1-\beta_m}{a^m}$.

6. Justifier que $|h_m| \leqslant \dfrac{3}{2\,a^m}$.
7. Soit n un entier supérieur ou égal à m.
   (a) Démontrer que $\cos(a^n \pi (x + h_m)) = (-1)^{\alpha_m + 1}$. Calculer de même $\cos(\pi\, a^{n-m} \alpha_m)$ et $\sin(\pi\, a^{n-m} \alpha_m)$ en fonction de α_m.
   (b) En déduire que $\cos(a^n \pi x) = (-1)^{\alpha_m} \cos(\pi\, a^{n-m} \beta_m)$.
8. Démontrer que $|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|}$.
9. Démontrer que $\left| \dfrac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \right| \geqslant \dfrac{2}{3} (ab)^m \cdot \dfrac{ab - \left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)}{ab-1}$.
10. Démontrer que f n'est dérivable en aucun réel x.

5.4. Un résultat de densité pour les fonctions continues et nulle part dérivables

Soient a, b des réels tels que $a < b$. On munit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ de la convergence uniforme.

11. Démontrer que

$$A := \left\{ f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \ : \ f \text{ n'est dérivable en aucun point de } [a,b] \right\}$$

est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$.

6. Fonctions harmoniques

6.1. Notations

- n désigne un entier strictement positif.
- On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.
- Si U est une partie de $\mathbf{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.
- Pour $a \in \mathbf{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit
$$D(a, R) = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ |x - a\| < R\}$$
La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a, R)}$.
- L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ par
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U, \ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$
- Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ est dite harmonique sur U si
$$\forall x \in U, \ \Delta f(x) = 0$$
L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(U)$.

6.2. Quelques propriétés des fonctions harmoniques

Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbf{R}$.

1. Démontrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.
3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.
4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

6.3. Fonctions harmoniques à variables séparables

On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbf{R}^2$ à variables séparables, c'est à dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$. On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, non identiquement nulles, et on pose
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ f(x, y) = u(x)v(y)$$
On suppose que f est harmonique sur $\mathbf{R}^2$.

5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations
$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$
6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

6.4. Fonctions harmoniques radiales

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On pose, pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$,
$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

7. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$.

8. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$, exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ en fonction de
$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$
9. Exprimer également $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
10. Montrer que $f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}$,
$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$
11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est à dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.
12. Soient a, b, r_1, r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que
$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x, y) = a \quad \text{si} \quad \|(x, y)\| = r_1 \\ f(x, y) = b \quad \text{si} \quad \|(x, y)\| = r_2 \end{cases}$$