Un corrigé du devoir surveillé n°4 — sujet MPI

Laurent Carrot, Jérémy Larochette, DB

Exercice I — Fonction Gamma (DB)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   - La fonction f_z est continue par morceaux sur $]1, +\infty[$.
   - Nous observons que
   $$|f_z(t)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}\, e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{\mathrm{Re}(z)-1} > 0$$
   D'après le théorème de comparaison pour les fonctions positives et les résultats sur les intégrales de Riemann, la fonction f_z est intégrale en 0^+ si et seulement si $1 - \mathrm{Re}\,(z) < 1$, i.e. si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.
   - Nous observons que
   $$|f_z(t)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}\, e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad \text{[croissances comparées]}$$
   Par comparaison à une intégrale de Riemann (de fonction positive) convergente, la fonction f_z est intégrable en $+\infty$.
   - Des trois points précédents, nous déduisons que $\mathcal{D}_\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$.
2. Comme $\mathrm{Re}\,(z+1) = \mathrm{Re}\,(z) + 1 > 1$, le complexe $z+1$ appartient bien à $\mathcal{D}_\Gamma$. Les fonctions
$$u\colon t \longmapsto t^z \qquad v\colon t \longmapsto -e^{-t}$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus
$$\left|-t^z\, e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(z)}\, e^{-t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \left|-t^z\, e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(z)}\, e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \qquad \text{[croissances comparées]}$$
Donc $[uv]_0^{+\infty}$ est bien défini et vaut 0. Nous en déduisons que les intégrales (que l'on sait converger d'après la question 1)
$$\int_0^{+\infty} t^z\, e^{-t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} z\, t^{z-1}\, e^{-t}\ \mathrm{d}t$$
sont égales (intégration par parties).
3. Nous raisonnons par récurrence.
   - Nous calculons
   $$\Gamma(0+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A} + 1 = 1 = 0!$$
   La formule demandée est donc vraie pour $n = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Gamma(n+1) = n!$. D'après la question 2
   $$\Gamma(n+2) = (n+1)\,\Gamma(n) = (n+1)\,n! = (n+1)!$$
   La formule est donc vraie au rang $n+1$.
4. La fonction
$$u \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$
est croissante, bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. Par théorème de changement de variable, les deux intégrales
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} 2\, e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$
ont même nature. Elles convergent d'après la question 1. Alors leurs valeurs sont égales, i.e.
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Exercice II — Règle de Raabe-Duhamel (DB)

5. Par hypothèse :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes strictement positifs, nous en déduisons :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante, donc majorée par son premier terme. Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \max\left\{\frac{u_k}{v_k} \ :\ k \in [\![0, n_0]\!]\right\}$$

et $u_n = \mathrm{O}\left(v_n\right)$.

6. Soient β un réel tel que $1 < \beta < \alpha$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta = 1 - \frac{\beta}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha-\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\alpha-\beta}{n} > 0.$$

Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

puis $u_n = \mathrm{O}\left(v_n\right)$ d'après la question précédente. Comme :

— $u_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$;

— pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^\beta} \geqslant 0$;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\beta}$ converge (critère de Riemann) ;

le théorème de comparaison livre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

7. Soient β un réel tel que $\alpha < \beta < 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\beta-\alpha}{n} > 0.$$

Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

puis $v_n = \mathrm{O}\left(u_n\right)$ d'après la question précédente. Comme :

— $\dfrac{1}{n^\beta} = \mathrm{O}\left(u_n\right)$;

— pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$;

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\beta}$ diverge (critère de Riemann) ;

le théorème de comparaison livre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

8. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k} > 0.$$
Alors :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
D'après les deux questions précédentes, la série $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$ converge si $b-a>1$ et diverge si $b-a<1$.
Si $b-a=1$, alors :
$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{a+k+1} = \frac{a}{a+n} \sim \frac{a}{n}.$$
Comme :
— $u_n \sim \frac{a}{n}$;
— pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{a}{n} \geqslant 0$;
— la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{n}$ diverge ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

9. D'après l'hypothèse
$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} + \underbrace{\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=:v_n} \qquad \left[v_n := \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) + \frac{1}{n}\right]$$
Par théorème de comparaison avec une série de Riemann (à termes positifs) convergente, la série $\sum v_n$ converge. Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k - \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + \mathrm{o}(1)$$
D'autre part
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
Nous en déduisons
$$\ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) - \gamma + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k}_{=:S} + \mathrm{o}(1)$$
puis
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} \times \underbrace{u_1 \times e^{-\gamma} \times e^S}_{:=C>0} \times e^{\mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n} > 0$$
Par comparaison avec une série de Riemann (à termes positifs) divergente, nous en déduisons que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice III — Transformation d'Abel (DB)

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right) + A_n b_n &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} + A_n b_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k'=1}^{n} A_{k'-1} b_{k'} + A_n b_n \qquad [\text{changement d'indice } k' = k+1] \\
&= A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} b_k - A_{n-1} b_n + A_n b_n \\
&= \underbrace{A_0}_{a_0} b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(A_k - A_{k-1}\right)}_{a_k} b_k + \underbrace{\left(A_n - A_{n-1}\right)}_{a_n} b_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k
\end{aligned}$$

11. D'après la question précédente :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right) + A_n b_n\ . \tag{1}$$

— Démontrons que la série $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ est (absolument) convergente. La suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |A_k| \leqslant M\ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |A_k(b_k - b_{k+1})| \leqslant M\ |b_k - b_{k+1}| = M\ (b_k - b_{k+1})$$

car la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Comme la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, la série télescopique $\sum b_k - b_{k+1}$ est convergente. Par linéarité, la série $\sum M\ (b_k - b_{k+1})$ converge.

D'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs, la série $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument, donc converge. Par définition même, la suite de ses sommes partielles converge. Donc, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ . \tag{2}$$

— Démontrons que la suite $(A_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. D'après le théorème de la limite monotone et le caractère unique de sa limite, 0 est la borne inférieure de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, 0 minore la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs ou nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |A_n b_n| \leqslant M b_n\ .$$

Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, le théorème d'encadrement nous livre $|A_n b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc :

$$A_n b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ . \tag{3}$$

— Conclusion. De (1), (2) et (3), nous déduisons :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ .$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ converge, donc la série $\sum a_n b_n$ converge.

12. Nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ converge. Comme la série $\sum \frac{a_n}{n}$ diverge, $\alpha \neq 1$ et donc $\alpha < 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_n}{n^\alpha} \times \frac{1}{n^{1-\alpha}} \; .$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de la question 11.

(H1) La série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ étant convergente, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente, donc bornée.

(H2) Comme $1-\alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de la question 11 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n}$, d'où une contradiction.

13. • Démontrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\cos(n\theta)}{n} = \cos(n\theta) \times \frac{1}{n} \; .$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de la question 11.

(H1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) && \left[\text{car } e^{i\theta} \neq 1, \text{ cf. } \theta \not\equiv 0\,[2\pi]\right] \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} \frac{-2\,i\,e^{i\frac{n\theta}{2}} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{-2\,i\,e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) && [\text{par factorisation par l'angle moitié}] \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}}_{\text{indépendant de } n} \; .$$

De cette étude, nous déduisons que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

(H2) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de la question 11 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

- Démontrons que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{\cos(n\theta)}{n}\right|$ diverge. Nous raisonnons par l'absurde et upposons que la série $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n}$ est convergente.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $|\cos(n\theta)|\leqslant 1$, $\cos^2(n\theta)\leqslant|\cos(n\theta)|$, donc :

$$0\leqslant \frac{\cos^2(n\theta)}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\frac{\cos(2n\theta)}{n}\leqslant\frac{|\cos(n\theta)|}{n}\ .$$

Par théorème de domination pour les séries à termes positifs :

$$\text{la série } \sum \frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\frac{\cos(2n\theta)}{n} \text{ converge.} \tag{4}$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties.

— Cas où $2\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$. D'après le point précédent, la série $\frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge. À l'aide de (4) et des résultats de linéarité sur les séries convergentes, nous en déduisons que la série $\sum\frac{1}{n}$ converge.

— Cas où $2\theta\equiv 0\ [2\pi]$. Le résultat (4) se ré-écrit alors : la série $\sum\frac{1}{n}$ converge.

Dans les deux cas, nous concluons à la convergence de la série harmonique, que l'on sait être divergente, d'où une contradiction.

14. - Cas où $\alpha\leqslant 0$. Alors $\left|\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right|=n^{-\alpha}$ ne tend pas vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est donc grossièrement divergente.
- Cas où $\alpha>0$ et $\theta\equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est une série de Riemann. Elle converge donc si et seulement si $\alpha>1$.
- Cas où $\alpha>0$ et $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$ La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si les deux séries :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\qquad\text{et}\qquad\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

convergent. En suivant la démarche exposée dans la question 13, nous démontrons que les deux séries précédentes convergent et donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

Exercice IV — Fonction et loi zêta (Laurent Carrot, Jérémy Larochette)

15. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x>1$ (série de Riemann), donc $D_\zeta=]1,+\infty[$.

16. - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n\ \left|\ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^x}\end{array}\right.$$

est décroissante.

- Nous en déduisons que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \end{array} \right.$$

est décroissante (somme d'un nombre fini de fonctions décroissantes).

- Fixons des réels $x, y \in D_\zeta$ tels que $x < y$. D'après le point précédent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} f_k(y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\zeta(y) \leqslant \zeta(x)$. La fonction ζ est donc décroissante sur D_ζ.

17. La fonction ζ est décroissante et positive (donc minorée par 0) sur D_ζ. D'après le théorème de la limite monotone, ζ possède une limite finie ℓ en $+\infty$ et

$$\ell = \inf_{x \in D_\zeta} \zeta(x) \geqslant 0$$

18. - Soit $x \in]1,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. tel que $n \geq 2$. Soit $g : t \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{t^x}$. g est décroissante sur $[1,+\infty[$ comme inverse d'une fonction croissante et positive.
    - Pour tout $t \in [n, n+1]$, $g(t) \leqslant g(n)$ (car g décroissante sur $[1,+\infty[$, donc sur $[n,n+1]$ (car $n \geq 2$)). D'où, par positivité de l'intégrale ($n \leqslant n+1$) :

$$\int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant \int_n^{n+1} g(n)dt, \quad \text{ie} \quad \int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant g(n) = \frac{1}{n^x}.$$

    - De même, por tout $t \in [n-1, n]$, $g(n) \leqslant g(t)$ (car g décroissante sur $[1,+\infty[$, donc sur $[n-1,n]$ (car $n \geq 2$)). D'où, par positivité de l'intégrale ($n-1 \leqslant n$) :

$$\int_{n-1}^{n} g(n)dt \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t)dt, \quad \text{ie} \quad \frac{1}{n^x} = g(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t)dt.$$

    - En mettant bout à bout les deux inégalités obtenues, on a bien :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1} n \frac{dt}{t^x}.$$

- Comme $x > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ converge (Riemann). D'où, en sommant l'encadrement précedemment obtenu pour tout $n = 2 \ldots + \infty$ (la série et les intégrales convergent), on obtient, grâce à la relation de Chasles,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt.$$

En ajoutant 1 à tous les membres de l'encadrement, on obtient :

$$1 + \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{\zeta(x)} \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$$

Enfin, comme

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}} \right]_1^{+\infty} \underbrace{=}_{x-1>0} \frac{1}{(x-1)}$$

on a bien l'encadrement souhaité :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

19. Comme

$$1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1} \qquad \text{et} \qquad 1+\frac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

nous déduisons de la question 18 et du théorème d'encadrement pour les équivalents

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$$

20. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement obtenu à la question 18, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$$

21.
- $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A} = \left(\frac{1}{a^x}\times\frac{1}{b^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est une « suite double produit » sommable car les séries $\sum \frac{1}{a^x}$ et $\sum \frac{1}{b^x}$ sont absolument convergentes (les termes sont positifs) de somme le produit des sommes, c'est-à-dire de somme $\zeta(x)^2$. En effet, les termes sont positifs, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{b\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(ab)^x}$ converge vers $\frac{\zeta(b)}{a^x}$ et $\sum_{a\in\mathbb{N}^*} \frac{\zeta(x)}{a^x}$ converge vers $\zeta(x)^2$.
- On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n = \{(a,b)\in A,\ ab=n\}$. Alors $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$.
- Par sommabilité et théorème de sommation par paquets, on peut écrire, la série étant convergente

$$\sum_{(a,b)\in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(ab)^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{n^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|A_n|}{n^x}.$$

Or $|A_n| = |\{(a,b)\in\mathbb{N}_*^2,\ n=ab\}| = \left|\left\{\left(a,\frac{n}{a}\right) \text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n\right\}\right| = d_n$.

Finalement, $\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}$.

22. Comme $(X\in a\mathbb{N}^*) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}(X=ak)$, on a par σ-additivité,

$$P(X\in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=ak) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)a^sk^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)a^s}$$

donc $P(X\in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.

23. $\Longleftarrow$. On a directement que si $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$ divise N, alors chacun des a_i divise N sans hypothèse de primalité relative.

$\Longrightarrow$. On montre le sens direct par récurrence simple. Soit, pour $n\geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$: « Si $a_1,\dots,a_n$ sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux, alors $a_1\cdots a_n$ divise N. ».

— Pour $n=2$, montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée. Soient a_1 et a_2 des diviseurs de n premiers entre eux. On a $k\in\mathbb{N}$ tel que a_2 divise $N=a_1k$. Comme $a_1\wedge a_2=1$, par lemme de Gauß, a_2 divise k donc a_1a_2 divise N.

— Soit un $n\geqslant 2$ pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soient $a_1,\dots,a_{n+1}$ des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux.

Comme $a_1,\dots,a_n$ sont des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux, par hypothèse de récurrence, $a_1\cdots a_n$ divise N.

Mais $a_1\cdots a_n$ et a_{n+1} sont premiers entre eux : en effet, aucun des a_i pour i entre 1 et n n'a de diviseur premier en commun avec a_{n+1} donc $a_1\cdots a_n$ ne peut en avoir lui aussi.

Ainsi, $a_1\cdots a_n$ et a_{n+1} sont deux diviseurs premiers entre eux de N, donc d'après le cas $n=2$, $a_1\cdots a_{n+1}$ divise N, ce qui établit la récurrence.

Ainsi, si $a_1, \dots, a_n$ sont premiers entre eux deux à deux, ils divisent N si et seulement leur produit divise N.

- Le résultat n'est plus valable si on suppose seulement $a_1, \dots, a_n$ premiers entre eux dans leur ensemble comme on le voit avec le contre-exemple : $6, 10, 15$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (aucun diviseur premier en commun) mais pas deux à deux, ils divisent tous 30, mais pas leur produit.

24. Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux deux à deux, et $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \dots, a_n)$ (avec $1 \leqslant r \leqslant n$), ils sont eux aussi deux à deux premiers entre eux donc la question précédente s'applique et

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{r}(X \in b_k\mathbb{N}^*)\right) &= P(b_1|X, \dots, b_r|X) \\ &= P(b_1 \cdots b_r|X) \qquad \text{[question 23]} \\ &= P(X \in b_1 \cdots b_r\mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{(b_1 \cdots b_r)^s} \qquad \text{[question 22]} \\ &= \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{b_k^s} \\ &= \prod_{k=1}^{r} P(X \in b_k\mathbb{N}^*) \qquad \text{[question 22]} \end{aligned}$$

donc, par définition, les $([X \in a_k\mathbb{N}^*])_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants.

25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $B_n = \bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)$ par définition de B_n. Or les $([X \notin p_k\mathbb{N}^*])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants en tant que complémentaires des $([X \in p_k\mathbb{N}^*])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ qui sont mutuellement indépendants d'après la question 24.
Donc

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \qquad \text{[question 22]}$$

26. Soit $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Alors $X(\omega)$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ divisible par aucun nombre premier : $X(\omega) = 1$, et la réciproque est vraie. Donc

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Or $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante,

$$P(B_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Vue la question précédente, on obtient bien $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \zeta(s)$.

27. On suppose par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_k}$ converge. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln u_n = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \qquad \text{et} \qquad -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$$

car $p_k \to +\infty$ (par exemple parce que $p_k \geqslant k$), par comparaison de séries à termes généraux positif, $\displaystyle\sum_k \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge, donc, par continuité de l'exponentielle, on a $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Soit $s > 1$. On a pour $k \in \mathbb{N}^*$, $1 < p_k \leqslant p_k^s$ donc $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geqslant \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \geqslant 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\ell \geqslant \zeta(s) \qquad \text{[inégalité obtenue pour un réel } s > 1 \text{ quelconque]}$$

Mais $\zeta(s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} +\infty$ d'après la question 19 et on obtient une contradiction. C'est donc que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p_k}$ diverge.