# Un corrigé du devoir surveillé n°4 — sujet MPI*

*par Édouard Lucas*

## Partie I – Préliminaires

1. (a) Soit $n \geqslant n_0$. On a avec Chasles : $\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(n+1) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))\mathrm{d}t$

   Commme $f$ est décroissante, on a $\forall t \in [n, n+1],\ f(n+1) - f(t) \leqslant 0$
   d'où $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leqslant 0$. D'autre part, toujours selon Chasles, on a

$$\gamma_n = f(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left( f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \right) = f(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} (f(k) - f(t))\,\mathrm{d}t$$

   Comme pour $k \geqslant n_0$, on a $\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) - f(t) \geqslant 0$ ; alors $\gamma_n \geqslant f(n) \geqslant 0$
   Ainsi la suite la suite $(\gamma_n)$ est décroissante et minorée par 0
   d'où $\boxed{\text{la suite } (\gamma_n)_{n \geqslant n_0} \text{ est monotone et convergente}}$

   (b) On applique ce qui précède à la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ qui est bien continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

   Donc la suite $\left( \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \right)_{n\geqslant 2} = \left( \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(2)) \right)_{n\geqslant 2}$ est convergente de limite que je note $\ell \in \mathbb{R}$.

   donc lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = \ell + \ln(\ln(2)) + o(1)$

   d'où $\boxed{\text{l'existence d'un réel } C = \ell + \ln(\ln(2)), \text{ tel que } \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1) \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty}$

   (c) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

   Soit $A > 0$. On a $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[ \frac{-1}{\ln(t)} \right]_{t=2}^{t=A} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}$ d'où $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{\ln(2)}$

   On a établi $\boxed{\text{la convergence de l'intégrale } \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t}$

   Comme en (b), on applique (a) à la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$ qui est bien continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$

   ce qui nous fournit $L \in \mathbb{R}$, limite de la suite $\left( \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t \right)_{n\geqslant 2}$ et on a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = L + \int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t + o(1) = L + \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} + o(1) \xrightarrow{n\to+\infty} L + \frac{1}{\ln(2)}$$

   on en déduit $\boxed{\text{la convergence de la série } \sum \dfrac{1}{k\ln^2(k)}}$ d'après celle de la suite de ses sommes partielles

2. Par croissance comparée, quand $k \longrightarrow +\infty$, on a $k^{3/2}\dfrac{\ln(k)}{k(k-1)} \sim \dfrac{\ln(k)}{k^{1/2}} \longrightarrow 0$

   d'où $\dfrac{\ln(k)}{k(k-1)} = o\left(\dfrac{1}{k^{3/2}}\right)$ or la série $\sum \dfrac{1}{k^{3/2}}$ est convergente

   donc par comparaison à une série à termes positifs $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{\ln(k)}{k(k-1)} \text{ est convergente}}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$.
On a par croissance de ln sur $[k-1, k]$, $\ln(k) \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t$
donc en utilisant Chasles : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant \int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t$
Puis à l'aide d'une intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on a :
$$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_{t=1}^{t=n} - \int_1^n \frac{t}{t}\mathrm{d}t = n\ln(n) - 0 - (n-1)$$
Ainsi $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ au moins égal à 2, on a l'inégalité : } \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant n\ln(n) - n + 1}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On a $\ln(n!) = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant (n-1)\ln(n) \leqslant n\ln(n)$ par croissance de ln et positivité de ln
Ainsi comme $\ln(1) = 0$, on a $n\ln(n) - n \leqslant n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant n\ln(n)$ à l'aide de (a)
puis comme $n\ln(n) > 0$, on a $-n \leqslant \ln(n!) - n\ln(n) \leqslant 0$
donc $\forall n \geqslant 2$, $|\ln(n!) - n\ln(n)| \leqslant n$ ainsi $\ln(n!) - n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n)$
On en déduit $\boxed{\text{l'estimation : } \ln(n!) = n\ln(n) + \mathcal{O}(n), \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\varphi_n$ la fonction $x \longmapsto x\ln(x) - \lambda x - \ln(n)$ définie sur $]0, +\infty[$.
$\varphi_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi_n' : x \longmapsto \ln(x) + 1 - \lambda$
La fonction $\varphi_n'$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (par somme)
Je note $a = \mathrm{e}^{\lambda-1}$ de sorte que $a > 0$ et $\varphi_n'(a) = 0$
donc par étude de signe, $\varphi_n$ est strictement décroissante sur $]0, a]$ et strictement croissante sur $[a, +\infty[$
Comme par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi_n(x) = -\ln(n) \leqslant 0$, on a $\forall x \in ]0, a]$, $\varphi_n(x) < -\ln(n) \leqslant 0$
donc $\varphi_n$ ne s'annule pas sur $]0, a]$
Par ailleurs $\varphi_n$ est continue et strictement croissante sur $[a, +\infty[$,
de plus $\varphi_n(a) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x) - \lambda) = +\infty > 0$
ainsi le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique :
il existe un unique $x \in [a, +\infty[$, tel que $\varphi_n(x) = 0$
On a justifié $\boxed{\text{l'existence et l'unicité d'un réel } x > 0 \text{ tel que } x\ln(x) - \lambda x = \ln(n)}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\varphi_1(r_n) = \ln(n)$
Comme $\varphi_1$ est strictement croissante sur $[a, +\infty[$ et que $r_n > a$ et $r_{n+1} > a$
On a $\varphi_1(r_n) = \ln(n) < \ln(n+1) = \varphi_1(r_{n+1})$ alors $r_n < r_{n+1}$
donc $(r_n)$ est croissante donc la suite $(r_n)$ admet une limite dans $[a, +\infty]$
Par l'absurde si on avait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = \ell \in [a, +\infty[$
Alors par continuité de $\varphi_1$, on aurait $\varphi_1(\ell) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi_1(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ Absurde
On a bien $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = +\infty}$
Quand $n \longrightarrow +\infty$,
on a $r_n(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(n)$ donc $\ln(r_n) + \ln(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(\ln(n))$
ce qui est légal car pour $n$ assez grand on a $\ln(r_n) - \lambda > 0$ car $\ln(r_n) \longrightarrow +\infty$
de plus $\ln(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(\ln(r_n)) + \ln\left(\dfrac{\ln(r_n) - \lambda}{\ln(r_n)}\right)$
comme $\ln(r_n) \longmapsto +\infty$, on a $\dfrac{\ln(r_n) - \lambda}{\ln(r_n)} \longrightarrow 1$ donc $\ln\left(\dfrac{\ln(r_n) - \lambda}{\ln(r_n)}\right) \longrightarrow 0$
d'où $\ln(\ln(r_n) - \lambda) \sim \ln(\ln(r_n)) = \mathrm{o}(\ln(r_n))$ par croissance comparée
donc $\ln(\ln(n)) \sim \ln(r_n)$ d'où $\ln(r_n) - \lambda \sim \ln(\ln(n))$ ainsi par produit : $r_n \ln(\ln(n)) \sim \ln(n)$
d'où $\boxed{\text{l'équivalence } r_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))} \text{ quand } n \longrightarrow +\infty}$

5. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $d_n(F) = \dfrac{1}{n}\mathrm{Card}(F_n)$

comme $F_n \subset F$, on a $0 \leqslant d_n(F) \leqslant \dfrac{\mathrm{Card}(F)}{n}$ d'où par théorème des gendarmes, on a $d_n(F) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\boxed{\text{Si } F \text{ partie finie de } \mathbb{N}^*, \text{ alors } F \text{ admet une densité égale à } d(F) = 0}$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je note $E = a\mathbb{N}^*$. et on a $E_n = \{ka \mid k \in [\![1, \lfloor n/a \rfloor]\!]\}$
donc $E_n$ est en bijection avec $\lfloor n/a \rfloor$ par stricte croissance de $k \longmapsto ka$
d'où $d_n(E) = \lfloor n/a \rfloor$ et ainsi $\dfrac{n}{a} - 1 \leqslant \mathrm{Card}(E_n) \leqslant \dfrac{n}{a}$ donc $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{n} \leqslant d_n(E) \leqslant \dfrac{1}{a}$
par théorème des gendarmes , on a $d_n(E) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{a}$ alors $\boxed{a\mathbb{N}^* \text{ admet une densité égale à } d(a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a}}$

iii. En faisant comme précédemment, on a $d_n(C) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ donc $\dfrac{\sqrt{n}-1}{n} \leqslant d_n(E) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

alors $\boxed{C \text{ admet une densité égale à } d(C) = 0}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je note : $E_1^n = E_1 \cap [\![1, n]\!]$ et $E_2^n = E_2 \cap [\![1, n]\!]$.
Les parties $E_1$ et $E_2$ étant disjointes, il en est de même pour $E_1^n$ et $E_2^n$
donc $\mathrm{Card}(E_1^n \cup E_2^n) = \mathrm{Card}(E_n) + \mathrm{Card}(E_n)$
donc $d_n(E_1 \cup E_2) = d_n(E_1) + d_n(E_2)$, par somme on a $d_n(E_1 \cup E_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(E_1) + d(E_2)$
donc $\boxed{E_1 \cup E_2 \text{ admet une densité égale à } d(d(E_1) + d(E_2)) = 0}$
En faisant de même, on a $d_n(\mathbb{N}^* \setminus E_1) = 1 - d_n(E_1)$
Par passage à la limite $\boxed{\mathbb{N}^* \setminus E_1 \text{ admet une densité égale à } 1 - d(E_1)}$

(c) Par l'absurde,
on suppose que $d$ est une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu formée de toutes ses parties.
d'après (a)ii, on a $\mathbb{N}^* = 1\mathbb{N}^*$ admet une densité égale à $d(\mathbb{N}^*) = 1/1 = 1$
Puis d'après (a)i, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{n\}$ admet une densité égale à 0
Comme $\mathbb{N}^* = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{n\}$ (réunion dénombrable disjointe), on a $1 = d(\mathbb{N}^*) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$ Absurde

$\boxed{\text{L'application } d \text{ n'est pas une probabilité sur l'ensemble } \mathbb{N}^* \text{ muni de la tribu formée de toutes ses parties}}$

6. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a $2^{2m+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$ selon le cours
donc $2^{2m+1} \geqslant \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1}$ car les termes sont tous positifs
de plus $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{2m+1-2m-1} = \binom{2m+1}{m}$ d'où on a bien $\boxed{\text{l'inégalité : } 2\binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m+1}}$

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![r+2, 2r+1]\!] \cap \mathcal{P}$.
On a $\binom{2r+1}{r} = \dfrac{(2r+1)!}{r!(r+1)!} \in \mathbb{N}^*$. donc $r!(r+1)!\binom{2r+1}{r} = (2r+1)!$
On a $(r+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times r \times (r+1)$
Comme $p \geqslant r+1$, $p$ n'apparaît dans aucun des facteurs premiers des entiers entre 1 et $r+1$
donc le nombre premier $p$ n'apparaît pas dans la décomposition en facteurs premiers de $r!(r+1)!$
donc $p \wedge (r!(r+1)!) = 1$ mais $p \mid (2r+1)!$ car $2 \leqslant p \leqslant 2r+1$
alors selon le théorème de Gauss, on a $p \mid (2r+1)!$
Ainsi les nombres premiers entre $r+2$ et $2r+1$ sont tous des diviseurs de $(2r+1)!$,
ils apparaissent donc tous dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier $\binom{2r+1}{r}$
Ainsi $\boxed{\text{l'entier } \displaystyle\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1 \\ p\in\mathcal{P}}} p \text{ divise l'entier } \binom{2r+1}{r}}$

(c) On va procéder par récurrence.

**Initialisation :** Pour $n = 2$, on a $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2 \\ p\in\mathcal{P}}} p = 2 \leqslant 16 = 4^n$

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. on suppose que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant k \\ p\in\mathcal{P}}} p \leqslant 4^k$

Montrons $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant n+1 \\ p\in\mathcal{P}}} p \leqslant 4^{n+1}$

**Premier cas :** $n+1$ n'est pas un nombre premier, donc $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant n+1 \\ p\in\mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathcal{P}}} p \leqslant 4^n \leqslant 4^{n+1}$

**Deuxième cas :** si $n+1$ est un nombre premier, alors $n+1$ est impair car $n+1 \geqslant 3$, on peut alors écrire $n+1 = 2r+1$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p = \left(\prod_{\substack{p \leqslant r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p\right)\left(\prod_{\substack{r+1<p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p\right)$$

On a d'après (b) : $\left(\prod_{\substack{r+1<p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p\right) \mid \binom{2r+1}{r}$ comme $\prod_{\substack{r+1<p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \geqslant 1$, on a $\prod_{\substack{r+1<p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leqslant \binom{2r+1}{r}$

donc d'après (a), on a $\prod_{\substack{r+1<p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leqslant \dfrac{2^{2r+1}}{2} = 4^r$

Par hypothèse de récurrence, on a : $\prod_{\substack{p \leqslant r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leqslant 4^{r+1}$ car $2 \leqslant r+1 \leqslant n$

Comme tous les facteurs sont positifs, on a

$$\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leqslant 4^r \times 4^{r+1} = 4^{2r+1} = 4^{n+1}$$

D'où le résultat (dans tous les cas)

**Conclusion :** On a montré par récurrence forte que

$\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ au moins égal à 2, l'inégalité } \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leqslant 4^n}$

7. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a $\left\{d \in [\![1, n]\!] \,\middle|\, p^k \mid d\right\} = \left\{tp^k \,\middle|\, t \in \mathbb{N}^* \text{ et } tp^k \leqslant n\right\}$
Si $p^k > n$, alors $\alpha_k = \operatorname{card}\left(\left\{tp^k \,\middle|\, t \in \mathbb{N}^* \text{ et } tp^k \leqslant n\right\}\right) = 0 = \lfloor n/p^k \rfloor$
Si $p^k \leqslant n$, alors $\left\{d \in [\![1, n]\!] \,\middle|\, p^k \mid d\right\} = \left\{tp^k \,\middle|\, t \in [\![1, \lfloor n/p^k \rfloor]\!]\right\}$
et donc $\alpha_k = \operatorname{card}\left(\left\{d \in [\![1, n]\!] \,\middle|\, p^k \mid d\right\}\right) = \operatorname{card}\left([\![1, \lfloor n/p^k \rfloor]\!]\right)$.
Dans tous les cas, on peut conclure à l'égalité $\boxed{\alpha_k = \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor}$

(b) On a $n! = \prod_{d=1}^{n} d$ donc $v_p(n!) = \sum_{d=1}^{n} v_p(d)$
Par ailleurs pour $k \in \mathbb{N}^*$, je note $B_k = \{d \in [\![1, n]\!] \mid v_p(d) = k\}$ et on a $\beta_k = \operatorname{Card}(B_k)$
or $[\![1, n]\!] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$, c'est une union disjointe
d'où $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{d \in B_k} v_p(d)\right)$ (somme presque nulle car seul un nombre de finis de $B_k$ est non vide )
or pour $d \in B_k$, on a $v_p(d) = k$, donc $\sum_{d \in B_k} v_p(d) = k\operatorname{Card}(B_k) = k\beta_k$
Ce qui justifie l'égalité $\boxed{v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k}$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, je note $A_k = \left\{d \in [\![1, n]\!] \,\middle|\, p^k \mid d\right\}$ et on a $\alpha_k = \operatorname{Card}(A_k)$
On remarque que $A_k = \left\{d \in [\![1, n]\!] \,\middle|\, p^k \mid d\right\} = \bigcup_{i \geqslant k} B_i$ (réunion disjointe) où $B_i$ est introduit à la question précédente

donc $\alpha_k = \sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i$ donc $\alpha_k - \alpha_{k+1} = \beta_k$
les sommes sont bien définies car les familles sont presque nulles, puis on effectue un changement d'indices
Ainsi $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\alpha_k$
donc $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)\alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$. En utilisant (a), on a l'égalité $\boxed{v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor}$

(d) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor \leqslant \dfrac{n}{p^k}$ et pour $k \geqslant 2$, on a $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor \geqslant 0$ et $\left\lfloor \dfrac{n}{p^1} \right\rfloor \geqslant \dfrac{n}{p} - 1$

Par ailleurs, la série géométrique de $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{n}{p^k}$ de raison $1/p \in ]0,1[$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}$

ce qui, à l'aide de (c), donne $\boxed{\text{l'encadrement : } \dfrac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p-1} \left( = \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)} \right)}$

8. Soit l'entier $n \geqslant 2$. On a à l'aide de changement d'indices :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k A_{k-1} = \varepsilon_1 A_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \left(A_k - A_{k-1}\right) - \varepsilon_n A_n$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k - \varepsilon_n A_n$ car $A_1 = a_1$ On a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n}$

9. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\left[ |X_N - \mathbb{E}(X_N)| \leqslant \dfrac{1}{2} a_N^{2/3} \right] = \left[ |X_N - a_N - B_N| \leqslant \dfrac{1}{2} a_N^{2/3} \right]$

Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $|t - B_N| \leqslant |t| + |b_N|$, on a donc

$$\left[ |X_N - \mathbb{E}(X_N)| \leqslant \frac{1}{2} a_N^{2/3} \right] \subset \left[ |X_N - a_N| \leqslant |b_N| + \frac{1}{2} a_N^{2/3} \right]$$

On a $a_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ alors $\dfrac{1}{2} a_N^{2/3} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$

et comme la suite $(b_N)_{N \geqslant 1}$ est bornée alors, pour $N$ entier assez grand, on a $|b_N| \leqslant \dfrac{1}{2} a_N^{2/3}$

et ainsi $\boxed{\left[ |X_N - \mathbb{E}(X_N)| \leqslant \dfrac{1}{2} a_N^{2/3} \right] \subset \left[ |X_N - a_N| \leqslant a_N^{2/3} \right]}$

(b) En passant aux complémentaire dans l'inclusion précédente on a : $\left[ |X_N - \mathbb{E}(X_N)| > \dfrac{1}{2} a_N^{2/3} \right] \supset \left[ |X_N - a_N| > a_N^{2/3} \right]$

d'où $\mathbb{P}\left( |X_N - a_N| > a_N^{2/3} \right) \leqslant \mathbb{P}\left( |X_N - \mathbb{E}(X_N)| > \dfrac{1}{2} a_N^{2/3} \right) \leqslant \mathbb{P}\left( |X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \dfrac{1}{2} a_N^{2/3} \right)$

Puis comme $X_N$ admet une variance, on peut appliquer l'inégalité de Pafnouti Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left( |X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \frac{1}{2} a_N^{2/3} \right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_N)}{\left( \frac{1}{2} a_N^{2/3} \right)^2} = \frac{4\mathbb{V}(X_N)}{a_N^{4/3}}$$

Or quand $N \longrightarrow +\infty$, on a $\dfrac{4\mathbb{V}(X_N)}{a_N^{4/3}} = \dfrac{4\mathcal{O}(a_N)}{a_N^{4/3}} = \mathcal{O}\left( a_N^{-1/3} \right)$

or $a_N^{-1/3} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ donc $\dfrac{4\mathbb{V}(X_N)}{a_N^{4/3}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ et $0 \leqslant \mathbb{P}\left( |X_N - a_N| > a_N^{2/3} \right) \leqslant \dfrac{4\mathbb{V}(X_N)}{a_N^{4/3}}$

On déduit avec les gendarmes que $\boxed{\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left( |X_N - a_N| > a_N^{2/3} \right) = 0}$

## Partie II - Deux résultats asymptotiques

1. (a) Soit $n$ un entier naturel non nul.

Si $n = 1$, on a $\ln(n!) = \ln(1) = 0$ et $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln(p) = 0$ (somme vide)

Sinon, on a $n! = \displaystyle\prod_{\substack{p | n! \\ p \in \mathcal{P}}} p^{v_p(n!)}$ or comme en 6(b), on a pour $p$ premier, $p | n! \iff p \in [\![2, n]\!]$

d'où $n! = \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} p^{v_p(n!)}$

en passant au logarithme, on a également l'égalité : $\boxed{\ln(n!) = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln(p)}$ dans ce cas également

(b) Soit $n$ un entier naturel non nul.

On a pour $p \in \mathcal{P}$, $\dfrac{v_p(n!)}{n} - \dfrac{1}{p(p-1)} \leqslant \dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{v_p(n!)}{n} + \dfrac{1}{n}$ en utilisant 7(d) car $n > 0$

Comme pour $p$ premier, on a $\ln(p) > 0$, on a

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p) v_p(n!)}{n} - \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p) v_p(n!)}{n} + \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{n}$$

donc en utilisant (a) : $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p) v_p(n!)}{n} = \frac{\ln(n!)}{n}$

et $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} = K$ série convergente à termes positifs d'après **I**-2

De plus $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{n} = \ln(4)$ d'après **I**-6(c)

On en déduit $\boxed{\text{l'encadrement : } \dfrac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)}$

(c) Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a d'après la question précédente :

$$\frac{\ln(n!) - n\ln(n)}{n} - K \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(n) \leqslant \frac{\ln(n!) - n\ln(n)}{n} + \ln(4)$$

Ainsi en utilisant **I**-3b) : $\dfrac{\ln(n!) - n\ln(n)}{n} = \mathcal{O}(1)$

donc les deux suites $\left(\dfrac{\ln(n!) - n\ln(n)}{n} - K\right)_n$ et $\left(\dfrac{\ln(n!) - n\ln(n)}{n} + \ln(4)\right)_n$ sont bornées

ainsi la suite $\left(\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(n)\right)_{n \geqslant 1}$ est également bornée

donc $\boxed{\text{quand l'entier } n \text{ tend vers } +\infty, \text{ on a : } \displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

Je pose également $\varepsilon_k = \dfrac{1}{\ln(k)}$ pour $k \geqslant 2$ et $\varepsilon_1 = 0$ , j'applique alors **I**-8 avec $a_1 = A_1 = \chi(1) = 0$ :

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \left(0 - \frac{1}{\ln(2)}\right) A_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}$

donc $\displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \in \mathcal{P}}} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}$ donc on a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ n \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}}$

(b) Quand $k$ tend vers $+\infty$, on a : $A_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{\substack{i \leqslant k \\ i \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(i)}{i} = \ln(k) + \mathcal{O}(1)$ d'après 1(c)

Par ailleurs $1/k \longrightarrow 0$ et donc $\ln(1 + 1/k) = 1/k + \mathcal{O}(1/k^2)$

et $\dfrac{1}{\ln(k+1)} = \dfrac{1}{\ln(k) + \ln(1+1/k)} = \dfrac{1}{\ln(k)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)\right)} = \dfrac{1 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)}{\ln(k)} = \dfrac{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)}{\ln(k)}$

donc $\ln(k)\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k+1)} = \left(1/k + \mathcal{O}(1/k^2)\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)\right) = 1/k + \mathcal{O}(1/k^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right)$

d'où $\ln(k)\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k+1)}A_k = \left(1/k+\mathcal{O}(1/k^2)\right)(\ln(k)+\mathcal{O}(1)) = \ln(k)/k+\mathcal{O}(1/k)+\mathcal{O}(\ln(k)/k^2)$

Ainsi $\ln(k)\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k+1)}A_k = \ln(k)/k+\mathcal{O}(1/k)$ car $\dfrac{k\ln(k)}{k^2} = \dfrac{\ln(k)}{k} \to 0$

d'où $\boxed{\text{l'égalité : } \dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k = \dfrac{1}{k\ln(k)} + O\left(\dfrac{1}{k\ln^2(k)}\right)}$

(c) En utilisant la question précédente, on a $\dfrac{A_n}{\ln(n)} = 1+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) = \mathcal{O}(1)$

En utilisant **I**-1(b), on a $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\ln^2(k)}$ est une série convergente

donc par comparaison à une série à termes positifs, (question précédente)

la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\left(\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k - \frac{1}{k\ln(k)}\right)$ converge

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} = \mathcal{O}(1)$

donc d'après (a), on a

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathcal{P}}}\frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k + \frac{A_n}{n} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} + \mathcal{O}(1)$$

Avec **I**-1(b) on peut déduire, quand l'entier $n$ tend vers $+\infty$, l'égalité : $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathcal{P}}}\frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)}$

## Partie III

1. (a) On peut écrire $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ où les $p_i \in \mathcal{P}$ sont distincts et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, par théorème de décomposition

Ainsi pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $p_i \geqslant 2 \geqslant 1$ et les $\alpha_i \geqslant 1$

donc $n \geqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i \geqslant \prod_{i=1}^{r} 2 = 2^r$ par croissance des $t \mapsto p_i^t$ sur $\mathbb{R}^+$

puis $\ln(n) \geqslant r\ln(2)$ par croissance de ln et comme $\ln(2) > 0$ on a $\boxed{\text{l'inégalité : } \omega(n) = r \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}}$

(b) Soit $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$.

On reprend les notations précédentes en ordonnant les $p_i$ : $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$

On remarque que $p_1 \geqslant 2$ et en cas d'existence on $p_2 \geqslant 3$

de plus comme pour $i \geqslant 2$, on a $p_i$ impair, on a donc $p_{i+1} \geqslant 2 + p_i$

ce qui permet de montrer par récurrence que $\forall i \in [\![2,r]\!],\ p_i \geqslant 2i-1 \geqslant 0$

Ainsi $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \geqslant 2\prod_{i=2}^{r} p_i \geqslant 2\prod_{i=2}^{r}(2i-1)$

À l'aide d'un changement d'indice, on obtient $\boxed{n \geqslant 2\displaystyle\prod_{k=1}^{r-1}(2k+1)}$ donc

$$\ln(n) \geqslant \ln(2) + \sum_{k=1}^{r-1}\ln(2k+1) \geqslant \ln(2) + \sum_{k=1}^{r-1}\ln(2k) \geqslant \ln(2) + \sum_{k=1}^{r-1}\ln(2) + \sum_{k=1}^{r-1}\ln(k) = r\ln(2) + \sum_{k=2}^{r-1}\ln(k)$$

Puis à l'aide de **I**-3a) formule valable pour $r-1 \geqslant 2$ valable même si $r_1 = 1$ (le cas $r-1=0$ sera traité plus tard

On a donc : $\ln(n) \geqslant r\ln(2) + (r-1)\ln(r-1) - (r-1) + 1 = (r-1)\ln(r-1) + (\ln(2)-1)(r-1) + \ln(2) + 1$

or $r\ln(2) + (r-1)\ln(r-1) - (r-1) + 1 = (r-1)\ln(r-1) + (\ln(2)-1)(r-1) + \ln(2) + 1$

En prenant $\lambda = 1 - \ln(2)$, on a

$$\lambda > 0 \quad\text{et}\quad \ln(n) \geqslant (r-1)\ln(r-1) - \lambda(r-1)$$

En prenant la suite $y_n$ définie au **I**-4) par $y_n > 0$ et $\ln(n) = (y_n - 1)\ln(y_n - 1) - \lambda(r-1)$
on obtient $r \leqslant y_n$ si $r \geqslant 2$, par l'étude de fonction de la fonction $\varphi_1$ du **I**-4)
comme $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, pour $n$ assez grand on a $r \leqslant y_n$ même si $r = 1$
Ainsi on a dans tous les cas $0 \leqslant \omega(n) \leqslant y_n$ pour $n$ assez grand et $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$

ce qui donne la domination : $\boxed{\omega(n) = O\left(\dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\right)}$

2. (a) Soit $r \in [\![1, N]\!]$.
Comme l'univers $[\![1, N]\!]$ est finie où tous les singletons sont des événements, on a l'existence et l'égalité :

$$\mathbb{E}(X_{N,r}) = \sum_{d\in[\![1,N]\!]} X_{N,r}(d)\mathbb{P}(\{d\}) = \sum_{\substack{d\in[\![1,N]\!]\\ r\mid d}} \frac{1}{N} = \frac{\mathrm{Card}\left(\{d \in [\![1, N]\!] \mid r \mid d\}\right)}{N}$$

Or comme en **I**-7a), on a $\mathrm{Card}\left(\{d \in [\![1, N]\!] \mid r \mid d\}\right) = \left\lfloor \dfrac{N}{r} \right\rfloor$ qui donne l'égalité : $\boxed{\mathbb{E}(X_{N,r}) = \dfrac{1}{N}\left\lfloor \dfrac{N}{r} \right\rfloor}$

(b) On a $X_N = \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} X_{N,p}$ donc $X_N^2 = \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} X_{N,p}^2 + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} X_{N,p}X_{N,q}$

Soit $p$ et $q$ premiers, on a $X_{N,p}$ et $X_{N,q}$ sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc $X_{N,p}X_{N,q}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et $X_{N,p}^2 = X_{N,p}$

si de plus $p \neq q$, alors $p \wedge q = 1$ et donc : $\forall d \in \mathbb{N}^*, pq \mid d \iff \begin{cases} p \mid d \\ q \mid d \end{cases}$

ainsi on a $\forall d \in \mathbb{N}^*, \iff \begin{cases} X_{N,p}(d) = 1 \\ X_{N,q}(d) = 1 \end{cases}$ d'où $X_{N,p}X_{N,q} = X_{N,pq}$

donc $X_N^2 = \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} X_{N,p} + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} X_{N,pq} = X_N + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} X_{N,pq}$

Par linéarité de l'espérance et à l'aide de (a), on obtient : l'égalité : $\boxed{\mathbb{E}(X_N^2) = \mathbb{E}(X_N) + \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor}$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{V}(X_N) = \mathbb{E}(X_N^2) - \mathbb{E}(X_N)^2$ d'après König-Huygens.
Or par linéarité et par (a), on a $\mathbb{E}(X_N) = \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} \mathbb{E}\left(X_{N,p}\right) = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$
Par un calcul analogue fait en (b), on a

$$\mathbb{E}(X_N)^2 = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{N^2}\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor^2 + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{N^2}\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor \geqslant \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor$$

donc à l'aide de l'égalité établie en (b) : on a $\mathbb{V}(X_N) \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor - \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x$ et que les termes sont positifs, on a

$$\mathbb{V}(X_N) \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{N}\frac{N}{p} + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{N}\frac{N}{pq} - \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{p} + \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \left(\frac{N^2}{pq} - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor\right)$$

or $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \left(\frac{N^2}{pq} - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor\right) = \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{N}{p}\left(\frac{N}{q} - \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor\right) + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor\left(\frac{N}{p} - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\right)$
et donc comme $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor \leqslant 1$,
on a $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \left(\frac{N^2}{pq} - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor\left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor\right) \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{N}{p} + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{N}{q} = 2\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{N}{p}$

d'où $0 \leqslant \mathbb{V}(X) \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} + \frac{2}{N^2} \sum_{\substack{1 \leqslant p,q \leqslant N \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} \frac{N}{p} = 3 \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} \underset{N \to +\infty}{=} 3\ln(\ln(N)) + \mathcal{O}(1)$ selon **II**-2c)

ainsi $\boxed{\text{on a quand l'entier } N \text{ tend vers } +\infty,\ \mathbb{V}(X_N) = O(\ln(\ln(N)))}$

(d) Je pose $a_N = \ln(\ln(N))$ et $b_N = \mathbb{E}(X_N) - a_N$ pour $N \in \mathbb{N}^*$
de sorte que $\mathbb{E}(X_N) = a_N + b_N$, $a_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ et on a aussi $\mathbb{V}(X_N) \underset{N \to +\infty}{=} \mathcal{O}(a_N)$ selon la question précédente
de plus en reprenant les calculs, on a $\mathbb{E}(X_N) = \ln(\ln(N)) + \underset{N \to +\infty}{\mathcal{O}}(1)$ d'où $b_N \underset{N \to +\infty}{\mathcal{O}}(1)$
donc la suite $(b_N)$ est bornée,
on peut alors appliquer **I**-9b) à la suite $(X_N)$ de variables aléatoires discrètes toutes définie sur $[\![1, N]\!]$ muni de la probabilité uniforme.
donc $\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) = 0$
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Comme $\forall n \in [\![1, N]\!],\ X_N(n) = \omega(n)$, on a :

$$\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) = \left\{n \in [\![1, N]\!];\ |\omega(n) - a_N| > a_N^{2/3}\right\}$$

comme la probabilité est uniforme : on a

$$\mathbb{P}\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) = \frac{1}{N} \mathrm{Card}\left\{n \in [\![1, N]\!];\ |\omega(n) - a_N| > a_N^{2/3}\right\}$$

ce qui donne le résultat :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Card}\left\{n \in [\![1, N]\!];\ |\omega(n) - \ln(\ln(N))| > (\ln(\ln(N)))^{2/3}\right\} = 0$$