Devoir surveillé n°4 — sujet MPI

vendredi 6 décembre, 14h15-18h15

Les quatre exercices de ce sujet sont indépendants.

Exercice I — Fonction Gamma

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_\Gamma$ des nombres complexes z tels que la fonction
$$f_z \colon t \longmapsto t^{z-1}\, e^{-t} \;\; \mathrm{d}t$$
est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soit Γ la fonction définie par

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_\Gamma & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t} \;\; \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

2. Soit $z \in \mathcal{D}_\Gamma$. Démontrer que $z+1 \in \mathcal{D}_\Gamma$ et que $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
4. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \;\; \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice II — Règle de Raabe-Duhamel

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

5. On suppose qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$.
6. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.
7. On suppose cette fois qu'il existe $\alpha < 1$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.
8. Soient a et b des réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.
9. On suppose désormais que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Démontrer qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$$
puis conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice III — Transformation d'Abel

10. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \qquad \text{[transformation d'Abel]}$$

11. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telles que :
    (H1) la suite de terme général $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée ;
    (H2) la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
    Démontrer que la série $\sum a_n b_n$ converge.
12. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que pour tout $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge.
13. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0\ [2\pi]$. Démontrer que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.
14. Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Exercice IV — Fonction et loi zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

15. Déterminer D_ζ.
16. Étudier le sens de variations de ζ, sans recours au calcul différentiel.
17. Justifier que ζ admet une limite finie en $+\infty$.
18. Démontrer que pour tout $x \in D_\zeta$

$$1 + \frac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

19. Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
20. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s) k^s}$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

22. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.
23. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \iff a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n | N$$

   Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?
24. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants. On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \dots, a_n)$.

   On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

26. Soit ω dans $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

27. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$. Conclure.