Mines-Ponts 2009. Option MP. Mathématiques II.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Dans toute la suite on notera $E = \mathcal{C}([0,1])$ et $\mathcal{F}$ la famille $\big(\phi_{\lambda_k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$

Question préliminaire.

1) Notons φ_λ la restriction de ϕ_λ à $]0,1[$. Alors la famille $\mathcal{F}' = \big(\varphi_{\lambda_k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de $E' = \mathcal{C}^\infty(]0,1[)$ et φ_λ est vecteur propre associé à λ de l'endomorphisme de E' : $f \longmapsto g$ définie par $g(x) = xf'(x)$.
La famille $\mathcal{F}'$ est donc libre en tant que famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Il en résulte (a fortiori) que la famille $\mathcal{F}$ est libre. $\square$

A. Déterminants de Cauchy.

Notons une erreur d'énoncé évidente : il faut supposer $a_i + b_j \neq 0$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$

2) Notons Δ_n le déterminant obtenu comme indiqué dans l'énoncé.
En remarquant que $R(a_k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ il vient que la dernière colonne de Δ_n est nulle sauf le dernier élément en bas qui vaut $R(a_n)$. En développant par rapport à cette colonne on obtient $\Delta_n = R(a_n)D_{n-1}$.
Par ailleurs si on suppose que les b_k sont deux à deux distincts donc (puisque la partie entière est nulle) que $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{X+b_k}$ il vient $R(a_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{a_i+b_k}$ de sorte que la dernière colonne de Δ_n vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} A_kC_k$ en notant C_k la $k^{\text{ème}}$ colonne de D_n. Le caractère n-linéaire et alterné du déterminant prouve alors que $\Delta_n = A_nD_n$.
En conclusion si les b_k sont deux à deux distincts on a ntinue. $A_nD_n = R(a_n)D_{n-1}$ $\square$

3) • Si au moins deux des b_k sont égaux on a $D_n = 0$ car deux colonnes sont égales et la formule proposée est donc vraie

- Supposons désormais que les b_k sont deux à deux distincts de sorte que la question précédente s'applique.

Notons que la méthode du cache fournit $A_n = \dfrac{(-)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)}{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}$ et prouvons la formule par récurrence sur n.
Elle est vraie pour $n=1$. Supposons la vraie jusqu'au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$.
La question précédente s'applique et fournit en utilisant l'hypothèse de récurrence et la valeur de A_n (non nulle) :

$$D_n = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)} \times \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \times \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}(a_i+b_j)}$$

Le numérateur est clairement bien égal à $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$

Quant au dénominateur il s'écrit aussi $(a_n+b_n)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k+b_n)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}(a_i+b_j)$

donc est bien égal à $\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)$

Ainsi la formule est bien vraie au rang n donc à tout rang par récurrence.

- Finalement la formule est bien vraie que les b_k soient ou non distincts deux à deux. $\square$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé.

4) Par définition même de la borne inférieure, $d(x,A) = 0$ si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $\|x-a\| < \varepsilon$ donc si et seulement si x est adhérent à A. $\square$

5) Comme la suite (A_n) est croissante au sens de l'inclusion, la suite $\big(d(x,A_n)\big)$ est décroissante donc convergente car minorée par 0. Notons ℓ sa limite.
Comme $A_n \subset A$ on a $d(x,A) \leqslant d(x,A_n)$ pour tout entier n donc par passage à la limite $d(x,A) \leqslant \ell$.
Par ailleurs soit ε donné quelconque. Il existe $a \in A$ tel que $d(x,A) + \varepsilon > d(x,a)$. Or comme $a \in A$, il existe n_ε tel que $a \in A_{n_\varepsilon}$ de sorte que $d(x,a) \geqslant d(x,A_{n_\varepsilon})$. Ainsi $d(x,A) + \varepsilon > d(x,A_{n_\varepsilon}) \geqslant \ell$.
Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\ell - \varepsilon < d(x,A) \leqslant \ell$ donc $d(x,A) = \ell$ $\square$

6) $B \cap V$ est une partie fermée de V (pour la topologie induite) en tant qu'intersection d'une boule fermée de E et de V. Par ailleurs c'est une partie bornée de V espace de dimension finie. Donc V est une partie compacte de V.
Comme $B \cap V \subset V$ on a $d(x,V) \leqslant d(x, B\cap V)$
En outre $B \cap V$ est non vide car contient 0 qui appartient à V (sous-espace) et à $B = \overline{B}(x,\|x\|)$
Donc si $y \in V \setminus (B \cap V)$ on a $d(x,y) \geqslant \|x\| = d(x,0) \geqslant d(x, B\cap V)$. De même naturellement si $y \in B \cap V$

Ainsi pour tout $y \in V$ on a $d(x,y) \geqslant d(x, B \cap V)$ donc $d(x,V) \geqslant d(x, B\cap V)$.
Finalement $d(x,V) = d(x, B \cap V)$ $\square$

7) L'application $x \longmapsto d(x, B \cap V)$ est (résultat de cours) 1-lipschitzienne donc continue et partant atteint sa borne inférieure sur le compact $B \cap V$. $\square$

C. Distance d'un point à un sous espace de dimension finie d'un espace euclidien.

8) On note déjà que la projection orthogonale de x sur V existe bien puisque V est de dimension finie (donc son orthogonal est bien un supplémentaire). En désignant par y cette projection orthogonale et z un élément quelconque de V, le théorème de Pythagore assure que $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2$ ce qui établit bien que y est l'unique élément de V en lequel le minimium est atteint. $\square$

9) • Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée l'un des vecteurs (par exemple x_1 quitte à changer la numérotation) est combinaison linéaire des autres d'où il résule que la première colonne du déterminant de Gram est combinaison linéaire des autres. Donc $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
• Si la famille est libre c'est une base $\mathcal{B}$ de $V = \operatorname{vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et alors $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'est autre que la matrice A de la restriction du produit scalaire à V. Donc $\det A \neq 0$. De manière plus précise si $\mathcal{B}'$ désigne une base orthonormée de V et P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ on a $A = {}^tPIP$ (formule de changement de base des applications bilinéaires) donc $\det A = (\det P)^2$.
• En concluson la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
Dans le cas contraire on a $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$. $\square$

10) Notons $x = y + z$ la décomposition de x sur $V \oplus V^\perp$ de sorte que $d(x,V) = \|z\|$.
• *Première solution* :
La dernière ligne de $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est donc $\big((y|x_1), (y, x_2), \ldots, (y, x_n), \|y\|^2 + \|z\|^2\big)$
Or y s'écrit $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et en effectuant l'opération élémentaire sur la dernière ligne $L_{n+1} \longleftarrow L_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$ on a le même déterminant avec comme dernière ligne $\big(0, 0, \ldots, 0, \|z\|^2\big)$ et comme bloc haut-gauche $n \times n$: $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Le dernier élément est bien $\|z\|^2$ car la dernière colonne de $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ (écrite en ligne) est la même que sa dernière ligne et après l'opération élémentaire le dernier élément est :
$\|y\|^2 + \|z\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i|y) = \|y\|^2 + \|z\|^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | y) = \|y\|^2 + \|z\|^2 - \|y\|^2$.
En développant par rapport à la dernière ligne on obtient donc $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = \|z\|^2 G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\square$

• *Seconde solution*
On commence par noter que la formule est bien sûr exacte si $x \in V$ car alors $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = 0$.
Sinon notons $\mathcal{B}$ la base orthonormalisée par l'algorithme de Gram-Schmidt de la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Alors une base orthonormale de $\operatorname{vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup (\dfrac{z}{\|z\|})$. Notons P' la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Alors P' admet comme bloc haut-gauche $n \times n$ la matrice P et comme dernière colonne (écrite en ligne) $(0, 0, \ldots, \|z\|)$. Donc $\det P' = \|z\| \det P$.
Or compte-tenu de la démonstration de la question précédente on a $(\det P')^2 = G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ et $(\det P)^2 = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\square$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2.

11) De la positivité de l'intégration et de l'inégalité $f(t)^2 \leqslant N_\infty(f)^2$ pour tout réel $t \in [0,1]$, on déduit immédiatement que $N_2(f) \leqslant N_\infty(f)$ $\square$

Soit $f \in \overline{A}^\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in A$ telle que $N_\infty(f-g) \leqslant \varepsilon$. Alors a fortiori $N_2(f-g) \leqslant \varepsilon$. Donc $f \in \overline{A}^2$.
$\square$

12) Soit f_n la fonction continue affine par morceaux égale à 1 sur $[\dfrac{1}{n}, 1]$ et nulle en 0.

Il vient $N_2(\phi_0 - f_n)^2 = \displaystyle\int_0^{1/n} n^2 t^2 \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{3n}$ donc la suite (f_n) converge vers ϕ_0 pour la norme N_2 et par caractérisation séquentielle de l'adhérence : $\phi_0 \in \overline{V}_0^2$ $\square$

13) Soit $f \in E$ et (f_n) la suite précédente. Alors la suite (g_n) avec $g_n \underset{\text{DEF}}{=} f_n f$ est une suite de V_0 et

$$N_2(f - g_n)^2 = \int_0^1 f(t)^2 \big(f_n(t) - \phi_0(t)\big)^2 \,\mathrm{d}\, t \leqslant N_\infty(f)^2 \int_0^1 \big(f_n(t) - \phi_0(t)\big)^2 \,\mathrm{d}\, t = N_\infty(f)^2 N_2(f_n - \phi_0)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $f \in \overline{V}_0^2$ i.e. V_0 est dense dans E pour la norme N_2. $\square$

Naturellement V_0 n'est pas dense dans E pour la norme N_∞ car la convergence uniforme entraîne en particulier la convergence simple donc tout élément de $\overline{V_0}^\infty$ est nul en 0. $\square$

14) Soient V un sous-espace, x et y deux éléments de $\overline{V}$ et (α,β) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de V convergeant respectivement vers x et y. Alors (z_n) avec $z_n = \alpha x_n + \beta y_n$ est une suite d'éléments de V qui converge vers $\alpha x + \beta y$ qui de ce fait appartient à $\overline{V}$. $\square$

15) La condition est évidemment nécessaire.
Réciproquement supposons que $\phi_m \in \overline{V}^\infty$ pour tout entier m. Soit alors un élément f quelconque de E et $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après le théorème de Weierstrass, il existe P, fonction polynomiale, telle que $N_\infty(f-P) \leqslant \varepsilon$. D'après la question précédente (comme $\overline{V}^\infty$ est un sous-espace), la fonction P appartient à $\overline{V}^\infty$ donc il existe $g \in V$ telle que $N_\infty(P-g) \leqslant \varepsilon$. Ainsi $N_\infty(f-g) \leqslant 2\varepsilon$ ce qui prouve que $f \in \overline{V}^\infty$ $\square$

16) Là encore la condition est évidemment nécessaire. Elle est également suffisante car en reprenant les notations de la question précédente on a $N_2(f-g) \leqslant N_\infty(f-g) \leqslant 2\varepsilon$. $\square$

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2.

17) D'après la question précédente, W est dense dans E si et seulement si $\phi_\mu \in \overline{W}^2$ pour tout entier μ.
Or la suite (W_n) est une suite croissante au sens de l'inclusion dont la réunion est égale à W. Donc, d'après les questions 4) et 5), $\phi_\mu \in \overline{W}^2$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ $\square$

18) En raisonnant dans l'espace préhilbertien E muni du produit scalaire L^2, il vient d'après la question 10) :
$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \dfrac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_n})}$. Or $(\phi_\alpha, \phi_\beta) = \displaystyle\int_0^1 \phi_\alpha(t)\phi_\beta(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$.
Ainsi $G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_n})$ est le déterminant de Cauchy associé aux familles (a_k) et (b_k) avec $a_k = \lambda_k$ et $b_k = \lambda_k + 1$

Il en résulte (question 3)) que $G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_n}) = \dfrac{\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\displaystyle\prod_{0\leqslant i,j\leqslant n} (\lambda_i + \lambda_j + 1)}$ et

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \frac{\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=0}^{n} (\mu - \lambda_i)^2}{\displaystyle\prod_{0\leqslant i,j\leqslant n} (\lambda_i + \lambda_j + 1) \times (2\mu+1) \prod_{i=0}^{n} (\lambda_i + \mu + 1)^2}.$$

Donc $d(\phi_\mu, W_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \displaystyle\prod_{i=0}^{n} \frac{|\mu - \lambda_i|}{\lambda_i + \mu + 1}$ $\square$

19) La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.
Supposons donc que $y_k \underset{\text{DEF}}{=} \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$
Si $0 \leqslant x \leqslant \mu$ il vient que $\dfrac{|x-\mu|}{x+\mu+1} = \dfrac{\mu - x}{x+\mu+1}$ est compris entre 0 et $\dfrac{\mu}{\mu+1} = \ell < 1$ (fonction décroissante)
Or puisque $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ il existe K_0 tel que $k \geqslant K_0$ implique $\ell < y_k$.
Donc pour $k \geqslant K_0$ on a $\lambda_k > \mu$ et alors $y_k = \dfrac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}$ d'où $\lambda_k = \dfrac{(\mu+1)y_k + \mu}{1 - y_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ $\square$

20) Notons $\Pi_n = \displaystyle\prod_{k=K_0}^{n} \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}$ pour $n \geqslant K_o$ défini ci-dessus.
D'après les question 17) et 18), W est dense dans E pour la norme N_2 si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi_n = 0$
soit si et seulement si (tous les termes du produit étant strictement positifs) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=K_0}^{n} \ln \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} = -\infty$ soit si et seulement la série de terme général (pour $k \geqslant K_0$) $u_k = \ln \dfrac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}$ diverge.

- Premier cas : la suite (λ_k) ne tend pas $+\infty$.

Alors la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge (grossièrement) et (question 19)) u_k ne tend pas vers 0 donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant K_0} u_k$ diverge et W est dense dans E.

- Deuxième cas : la suite (λ_k) tend vers $+\infty$.

Alors $u_k = \ln(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_k}) - \ln(1 + \dfrac{\mu+1}{\lambda_k}) \sim -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k} < 0$ donc (principe de comparaison des séries à termes de signe fixe) les deux séries $\sum u_k$ et $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ sont de même nature.

Ainsi dans ce cas W est dense dans E si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

- Conclusion : W est dense dans E pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge. $\square$

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞.

21) Si W est dense dans E pour la norme N_∞ il l'est a fortiori pour la norme N_2 moins fine d'après la question 11) donc la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge. $\square$

22) Par continuité sur le compact $[0,1]$ de la fonction $\phi_\mu - \psi$, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $N_\infty(\phi_\mu - \psi) = |\phi_\mu(x_0) - \psi(x_0)|$
Or comme $\lambda_k \geqslant 1$ pour tout k et $\mu \geqslant 1$ on a $\phi_\mu(0) = \psi(0) = 0$ donc $N_\infty(\phi_\mu - \psi) = \left| \displaystyle\int_0^{x_0} \big(\phi'_\mu(t) - \psi'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t \right|$
Donc par inégalité intégrale de la norme, positivité de l'intégration et inégalité de Scwarz, il vient :
$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leqslant \displaystyle\int_0^{x_0} \left|\phi'_\mu(t) - \psi'(t)\right| \mathrm{d}\, t \Big| \leqslant \int_0^1 \left|\phi'_\mu(t) - \psi'(t)\right| \mathrm{d}\, t \Big| \leqslant N_2(\phi_0) N_2(\phi'_\mu - \psi') = N_2(\phi'_\mu - \psi')$
Ce qui est l'inégalité demandée. $\square$

23) Supposons les conditions (i) et (ii) satisfaites ainsi que la divergence de la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$.

D'après la question 15), W est dense dans E pour N_∞ si et seulement si $\phi_m \in \overline{W}^\infty$ pour tout entier $m \geqslant 0$.
Comme la condition (i) est satisfaite, il reste à vérifier que $\phi_m \in \overline{W}^\infty$ pour tout entier $m \geqslant 1$.
Donnons nous alors un entier $\mu \geqslant 1$ et un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.

On commence par noter que la série (définie à partir d'un certain rang) $\sum \dfrac{1}{\lambda_k - 1}$ diverge. En effet si λ_k ne tend pas vers $+\infty$ divergence grossière et sinon $\dfrac{1}{\lambda_k - 1} \sim \dfrac{1}{\lambda_k} > 0$.
Il en découle que la famille $\big(\phi_{\lambda_k - 1}\big)_{k \geqslant 1}$ engendre un sous-espace dense dans E pour la norme N_2. En particulier il existe $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda_k - 1}$ telle que $N_2(\mu\phi_{\mu-1} - \psi) \leqslant \varepsilon$.
Soit alors $\Psi = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k}$.
Comme la condition (ii) est satisfaite, on est dans les conditions d'application de la question précédente qui prouve que $N_\infty(\phi_\mu - \Psi) \leqslant N_2(\mu\phi_{\mu-1} - \psi) \leqslant \varepsilon$.
Ce qui prouve que $\phi_\mu \in \overline{W}^\infty$ et donc le résultat final. $\square$

24) Posons alors $\alpha = \inf\limits_{k \geqslant 1} \lambda_k$ et $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\alpha}$ (bien licite car $\alpha > 0$)).
D'après la question précédente, le sous-espace W' engendré par la famille $\big(\phi_{\mu_k}\big)$ est dense dans E car la suite (μ_k) vérifie (i) et (ii) et en outre la série $\sum \dfrac{1}{\mu_k}$ diverge.
Soient alors f quelconque de E et $\varepsilon > 0$ donné quelconque.
La fonction $g : x \longmapsto f(x^{1/\alpha})$ est élément de E donc il existe $\varphi \in \overline{W'}^\infty$ telle que $N_\infty(g - \varphi) \leqslant \varepsilon$.
Or $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k/\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \big(x^{1/\alpha}\big)^{\lambda_k} = \Phi(x^{1/\alpha})$ avec $\Phi \in W$.
Ainsi $\operatorname{Sup}\limits_{x \in [0,1]} \left| f(x^{1/\alpha}) - \Phi(x^{1/\alpha}) \right| \leqslant \varepsilon \quad (1)$
Or lorsque x décrit $[0,1]$, il en va de même de $x^{1/\alpha}$. Donc (1) s'écrit $N_\infty(f - \Phi) \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve que $f \in \overline{W}^\infty$.
La condition (ii) peut donc être remplacée par la condition plus faible (ii'). $\square$

FIN