Un corrigé du devoir surveillé n°2

d'après Pierre-Amaury Monard

0. Préambule

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$.

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée M^T.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. Remarquer qu'on ne demande pas que id_E appartienne à $\mathcal{A}$.

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $S_n(\mathbf{K})$ (respectivement $A_n(\mathbf{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbf{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbf{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

1. Exemples de sous-algèbres

1.1. Sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Q1. — Les sous-ensembles $T_n(\mathbf{K})$ et $T_n^+(\mathbf{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?

En remarquant que $T_n(\mathbf{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}\left((E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\right)$ et $T_n^+(\mathbf{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}\left((E_{ij})_{1\leqslant i< j\leqslant n}\right)$ on montre immédiatement que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le produit de deux matrices triangulaires étant encore triangulaire, $T_n(\mathbf{K})$ est stable par produit. De plus, si la diagonale de l'une des deux matrices triangulaires est nulle, la diagonale de la matrice produit le sera aussi. Donc $T_n^+(\mathbf{K})$ aussi est stable par produit.

$$\boxed{\text{Les ensembles } T_n(\mathbf{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbf{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).}$$

Q2. — Les sous-ensembles $S_2(\mathbf{K})$ et $A_2(\mathbf{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$?

L'ensemble $S_2(\mathbf{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ car il n'est pas stable par produit. En effet, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques, mais leur produit $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. L'ensemble $A_2(\mathbf{K})$ n'est pas une sous-algèbre car $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } S_2(\mathbf{K}) \text{ et } A_2(\mathbf{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_2(\mathbf{K}).}$$

Q3. — On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbf{K})$ et $A_n(\mathbf{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?

Reprenons les contre-exemples de la question précédente. Les matrices $A' = \mathrm{diag}(A, O_{k-2})$ et $B' = \mathrm{diag}(B, O_{k-2})$ sont symétriques de taille k mais leur produit $A'B' = \mathrm{diag}(AB, O_{k-2})$ ne l'est pas. La matrice $C' = \mathrm{diag}(C, O_{k-2})$ est antisymétrique de taille k mais $C'^2 = \mathrm{diag}(C^2, O_{n-2})$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } S_k(\mathbf{K}) \text{ et } A_k(\mathbf{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_k(\mathbf{K}).}$$

1.2. Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \ : \ u(F) \subset F\}$.

Q4. — Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

L'ensemble $\mathcal{A}_F$ n'est pas vide car l'endomorphisme nul 0_E stabilise F. Soit $u, v \in \mathcal{A}_F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $x \in F$

$$(u + \lambda v)(x) = \underbrace{u(x)}_{\in F} + \lambda \underbrace{v(x)}_{\in F} \in F$$

Donc $u + \lambda v$ stabilise F et $\mathcal{A}_F$ est stable par combinaison linéaire ce qui fait de $\mathcal{A}_F$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Soient $u, v \in \mathcal{A}_F$. Alors

$$(u \circ v)(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$$

donc $u \circ v$ stabilise F et $\mathcal{A}_F$ est stable par composition.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$$

Q5. — Montrer que $\dim(\mathcal{A}_F) = n^2 - pn + p^2$.

Soit G un supplémentaire de F dans E.

- Dans une base adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$ la matrice d'un endomorphisme stabilisant F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$.
- Réciproquement une telle matrice est la matrice d'un endomorphisme stabilisant F.

Donc $\mathcal{A}_F$ est isomorphe à

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} : A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K}) \right\}$$

qui est de dimension $p^2 + p(n-p) + (n-p)^2$. Ainsi

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_F = n^2 - np + p^2.}$$

Q6. — Déterminer $\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$

$$n^2 - np + p^2 = \left(p - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3n^2}{4}$$

donc la dimension de $\mathcal{A}_F$ est maximale quand $\left|p - \dfrac{n}{2}\right|$ est maximale *i.e* quand $p = 1$ ou $p = n-1$ auxquels cas elle vaut $n^2 - n + 1$.

$$\boxed{\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - np + p^2) = n^2 - n + 1.}$$

1.3. Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbf{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbf{K}^2$.

Q7. — Montrer que $\Gamma(\mathbf{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

Posons $K := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\Gamma(\mathbf{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(I_2, K)$$

ce qui montre que $\Gamma(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. De plus, $I_2^2 = I_2$, $I_2 K = K I_2 = K$ et $K^2 = -I_2$ donc $\Gamma(\mathbf{K})$ est stable par produit puisque qu'un produit de vecteurs d'une famille génératrice reste dans $\Gamma(\mathbf{K})$.

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbf{K}).}$$

Q8. — Montrer que $\Gamma(\mathbf{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Si $\Gamma(\mathbf{R})$ était diagonalisable tous ses éléments serait diagonalisable. En en particulier, $K \in \Gamma(\mathbf{R})$ serait diagonalisable. Son polynôme caractéristique $\chi_K = X^2 + 1$ serait alors scindé sur $\mathbf{R}$ ce qui n'est pas le cas.

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{R}) \text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).}$$

Q9. — Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbf{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

Le polynôme $\chi_K = X^2+1 = (X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$ donc

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{C}.}$$

Soit $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que $K = P\,\mathrm{diag}(i,-i)P^{-1}$. Soit $M \in \Gamma(\mathbf{C})$ et $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $M = aI_2 + bK$. Alors

$$M = P(aI_2 + b\,\mathrm{diag}(i,-i))P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(a+ib, a-ib)P^{-1}$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \Gamma(\mathbf{C})$

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).}$$

2. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$J(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,j) de $J(a_0,\ldots,a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la forme $J(a_0,\ldots,a_{n-1})$ où $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ défini par $\varphi\colon e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \ldots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1,\ldots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

2.1. Calcul des puissances de J

Q10. — Préciser les matrices J et J^2. On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geqslant 2$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'endomorphisme φ envoie e_i sur e_{i+1}, (indices sont pris modulo n). Donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'endomorphisme φ^2 envoie e_i sur e_{i+2}, (indices sont pris modulo n).

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Q11. — Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice J^k est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme qui envoie e_i sur e_{i+k} (indices modulo n). En particulier, J^n est la matrice identité.

$$\boxed{J^n = I_n}$$

et, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$

$$\boxed{J^k \text{ n'a que des 0 sauf sur la } k\text{-ième sous-diagonale et la } n-k\text{-ième sur-diagonale où il y a des 1.}}$$

Q12. — Quel est le lien entre la matrice $J(a_0,\ldots,a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

Grâce à la question précédente

$$\boxed{J(a_0,\dots,a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k.}$$

2.2. Une base de $\mathcal{A}$

Q13. — Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

D'après la question précédente, $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(J^0,\dots,J^{n-1})$ donc la famille $(I_n,\dots,J^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{A}$ (et $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel). Montrons qu'elle est libre.

Soient $a_0,\dots,a_{n-1} \in \mathbf{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0$ *i.e* $J(a_0,\dots,a_{n-1}) = 0$. Étant donné la définition de $J(a_0,\dots,a_{n-1})$ on a $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$.
Donc la famille $(J^0,\dots,J^{n-1})$ est libre et, le caractère générateur de $\mathcal{A}$ étant établi, il vient

$$\boxed{(J^0,\dots,J^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{A}.}$$

Q14. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

$\Longrightarrow$. Si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ alors en particulier M commute avec J.

$\Longleftarrow$. Si M commute avec J alors M commute avec $J^0,\dots,J^{n-1}$. Définissons le centre de M comme l'ensemble

$$\mathcal{C}(M) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : AM = MA\}$$

En remarquant qu'il s'agit du noyau de l'application linéaire

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R} \\ A & \longmapsto & AM - MA \end{array}\right.$$

on prouve que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donc $\mathcal{C}(M)$ contient $\mathrm{Vect}(J^0,\dots,J^{n-1}) = \mathcal{A}$. Ainsi M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Une matrice } M \text{ commute avec } J \text{ si et seulement si elle commute avec tous les éléments de } \mathcal{A}.}$$

Q15. — Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- On sait déjà que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- Soit un entier $k \in \mathbf{N}$ dont nous écrivons la division euclidienne par n

  $$k = qn + r$$

  où $q \in \mathbf{N}$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque $J^n = I_n$, il vient

  $$J^k = (J^n)^q\ J^r = J^r \in \mathcal{A}$$

- Soit $M, N \in \mathcal{A}$. Alors il existe $a_0,\dots,a_{n-1}, b_0,\dots,b_{n-1} \in \mathbf{R}$ tels que

  $$M = J(a_0,\dots,a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \quad \text{et} \quad N = J(b_0,\dots,b_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k J^k$$

  Nous calculons

  $$MN = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} a_k b_\ell \underbrace{J^{k+\ell}}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad NM = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} b_\ell a_k\, J^{\ell+k} = MN$$

Donc $MN \in \mathcal{A}$ et $MN = NM$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$$

2.3. Diagonalisation de J

Q16. — Déterminer le polynôme caractéristique de J.

Par définition, $\chi_J = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}$. Développons par rapport à la première colonne :

$$\chi_J = X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1} = X^n + (-1)^n (-1) (-1)^{n-2}$$

La dernière égalité est obtenue en développant le deuxième déterminant par rapport à la première ligne.

$$\boxed{\chi_J = X^n - 1.}$$

Q17. — Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Dans $\mathbf{C}$

$$\chi_J = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

où $\omega := \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$. Comme χ_J est un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$

$$\boxed{\text{la matrice } J \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbf{C}).}$$

Q18. — La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

- Pour $n = 2$, le polynôme caractéristique de J est $X^2 - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- Pour $n \geqslant 3$, le polynôme χ_J n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, donc la matrice J n'est pas trigonalisable (*a fortiori* n'est pas diagonalisable) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

$$\boxed{J \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ sauf si } n = 2.}$$

Q19. — Déterminer les valeurs propres complexes de J est les espaces propres associés.

Le spectre de J est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique. Donc

$$\boxed{\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(J) = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}.}$$

Il y a n valeurs propres donc elles sont toutes de multiplicité 1. Ainsi

$$\dim E_{\omega^k}(J) = 1$$

pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Posons $X_k := \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}$. Alors $JX_k = \begin{pmatrix} \omega^{-k(n-1)} \\ 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-2)} \end{pmatrix} = \omega^k X_k$. Donc X_k, qui est non nul, est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k et (X_k) est une base de $E_{\omega^k}(J)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0, n-1]\!],\ E_{\omega^k}(J) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}\right).}$$

2.4. Diagonalisation de $\mathcal{A}$

Q20. — Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$?

L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbf{C}$-espace vectoriel car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire complexe non réel. Par exemple, $iJ \notin \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donc $iJ \notin \mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Non, } \mathcal{A} \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbf{C}).}$$

Q21. — Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

- Soit $P \in GL_n(\mathbf{C})$ et $D \in D_n(\mathbf{C})$ telle que $PJP^{-1} = D$. Comme J et D sont semblables, elles ont même valeurs propres. Comme D est diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ces derniers sont donc, à l'ordre près, les scalaires $1, \ldots, \omega^{n-1}$. Quitte à remplacer la matrice P par son produit par une matrice de permutation, nous pouvons supposer que $D = \mathrm{diag}(1, \ldots, \omega^{n-1})$.
- Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe des réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tel que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, J^k$. Alors

$$PAP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, J^k\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(PJP^{-1})^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \mathrm{diag}(1, \ldots, \omega^{n-1})^k}_{\mathrm{diag}(Q(1), \ldots, Q(\omega^{n-1}))}$$

où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, X^k$.

$$\boxed{\text{Pour tout } A \in \mathcal{A},\ PAP^{-1} \text{ est diagonale.}}$$

Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$. On note $Q \in \mathbf{R}[X]$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Q22. — Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$?

Considérons des réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$. D'après la question précédente, la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, J^k$ est semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(Q(1), \ldots, Q(\omega^{n-1}))$.

$$\boxed{\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(J(a_0, \ldots, a_{n-1})) = \{Q(1), \ldots, Q(\omega^{n-1})\}.}$$

3. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

3.1. Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée $\mathrm{tr}(M)$.

Q23. — Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A\,,\,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Soit b l'application définie par

$$b \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}(A^\top B) \end{array} \right.$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ fixé. Alors l'application partielle

$$b(A, \cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ M & \longmapsto & b(A, M) = \mathrm{tr}(A^\top M) \end{array} \right.$$

  est la composée de

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & A^\top M \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array} \right.$$

  qui sont linéaires. Donc b est linéaire à droite.
- La trace étant invariante par transposition, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

$$\mathrm{tr}(A^\top B) = \mathrm{tr}((A^\top B)^\top) = \mathrm{tr}(B^\top A)$$

  donc $b(A, B) = b(B, A)$. L'application b est donc symétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a

$$b(A, A) = \mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n} \left[A^\top A\right]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ji}^2 \geqslant 0$$

  donc b est positive.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Si $b(A, A) = 0$ alors $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{ji}^2 = 0$ donc $[A]_{ji} = 0$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, i.e. $A = 0$. Donc b est définie positive.

$$\boxed{\text{L'application } b \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$$

On désigne $A^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et on note r sa dimension.

Q24. — Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Comme $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, son orthogonal en est un supplémentaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donc $\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

$$\boxed{d + r = n^2.}$$

Jusqu'à la fin de cette partie 3, on fixe une base $(A_1, \dots, A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

Q25. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i , M \rangle = 0$.

- Pour F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E et x un vecteur de E

  $$x \in \mathcal{F}^\perp \text{ si et seulement si } x \text{ est orthogonal à n'importe quelle famille génératrice de } F$$

  Si F est de dimension finie, $F = (F^\perp)^\perp$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. D'après le point précédent $M \in \mathcal{A}$ si et seulement si $M \in (A^\perp)^\perp$, si et seulement si M est orthogonal à la famille $(A_1, \dots, A_r)$ qui est bien génératrice de $\mathcal{A}^\perp$.

$$\boxed{M \in \mathcal{A} \text{ si et seulement si } \langle A_i , M \rangle = 0 \text{ pour tout } i \in [\![1, r]\!].}$$

Q26. — Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

Considérons une matrice $N \in \mathcal{A}$ et introduisons des indices $i, j \in [\![1, r]\!]$ et une matrice $M \in \mathcal{A}$. On a

$$\left\langle M , N^\top A_i \right\rangle = \operatorname{tr}(M^\top N^\top A_i) = \langle NM , A_i \rangle = 0$$

car $NM \in \mathcal{A}$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{A}$, il vient

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, r]\!],\ N^\top A_i \in \mathcal{A}^\perp.}$$

3.2. Conclusion

Soit $\mathcal{A}^T = \{M^T \ : \ M \in \mathcal{A}\}$.

Q27. — Montrer que $\mathcal{A}^T$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$.

- L'application

  $$(\,\cdot\,)^\top \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array} \right.$$

  est linéaire donc $\mathcal{A}^\top$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ en tant qu'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
- De plus, si $A, B \in \mathcal{A}$, $A^\top B^\top = (BA)^\top \in \mathcal{A}^\top$ et $\mathcal{A}^\top$ est stable par produit.
- $\boxed{\mathcal{A}^\top \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

  La transposée étant involutive, elle est bijective donc injective. La transposition réalise donc un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^\top$ et

  $$\boxed{\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}^\top.}$$

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

Q28. — Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et soit $F = \operatorname{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{A}^T$.

Soit $N \in \mathcal{A}$. Montrons que F est stable par multiplication par $N^\top$ par la gauche.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Alors, $N^\top A_i \in \mathcal{A}^\perp$ d'après la question 26. Donc il existe $c_1, \dots, c_r \in \mathbf{R}$ des coefficients tels que

$$N^\top A_i = \sum_{j=1}^{r} c_j A_j$$

D'où $N^\top A_i X = \sum_{i=1}^{r} c_j A_j X \in F$.
Ceci étant vrai pour tout $i = [\![1, r]\!]$, F est stable par multiplication par $N^\top$ par la gauche.
Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathcal{A}$ il vient

$$\boxed{F \text{ est stable par tous les endomorphismes de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ canoniquement associés aux matrices de } \mathcal{A}^\top.}$$

Q29. — Montrer que $d \leqslant n^2 - n + 1$ et conclure.

- Nous commençons par établir que $n^2 - n + 1$ est un majorant de d.
  - Notons p la dimension de l'espace vectoriel F, associé à un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, introduit à la question 28. Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a nécessairement $p \leqslant n$.
  - Si $p = n$ alors, comme la famille $(A_1X, \ldots, A_rX)$ engendre F, $r \geqslant n$. Ainsi
  $$d = n^2 - r \leqslant n^2 - n < n^2 - n + 1$$
  ce qui démontre le résultat.
  - Supposons $p < n$.
    . Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
    $$r = n^2 - d \geqslant 1$$
    Si on choisit le vecteur X hors du noyau de la matrice non nulle A_1, alors $F \neq \{0\}$ et donc $p \geqslant 1$. Ainsi
    $$1 \leqslant p \leqslant n - 1$$
    . D'après la question précédente, $\mathcal{A}^\top \subset \mathcal{A}_F$ où $\mathcal{A}_F$ a été introduit à la partie 1.2. D'après la question 6
    $$\dim \mathcal{A}_F \leqslant n^2 - n + 1$$
    donc $\dim \mathcal{A}^\top \leqslant n^2 - n + 1$.
    . D'après la question 27, $\dim \mathcal{A}^\top = \dim \mathcal{A} = d$.

    Dans ce cas aussi on a
    $$d \leqslant n^2 - n + 1$$
- Nous démontrons enfin que la borne $n^2 - n + 1$ pour d peut être atteinte.
  Soit D une droite vectorielle quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors $\mathcal{A}_D$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension
  $$n^2 - n + 1 < n^2$$
  d'après la partie 1.2. $\mathcal{A}_D$ est donc une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour laquelle on a l'égalité $d = n^2 - n + 1$.

$$\boxed{\text{La dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ est } n^2 - n + 1.}$$

4. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie 5.

> **Théorème de Burnside. —** *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.*

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q30. — Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

Si $n = 1$, les matrices nilpotentes sont les matrices nulles qui sont trigonalisables dans toute base.

$$\boxed{\text{Le résultat est vrai pour } n = 1.}$$

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n-1$.

Q31. — Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

S'il n'existe aucun tel sous-espace vectoriel alors, d'après le théorème de Burnside, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$. En particulier, $\mathrm{id}_E \in \mathcal{A}$ mais id_E n'est pas nilpotent ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{Il existe un sous-espace vectoriel } V \text{ de } E \text{ distinct de } E \text{ et } \{0\} \text{ stable par tous les éléments de } \mathcal{A}.}$$

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

Q32. — Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbf{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(u)$.

Soit W un supplémentaire de V dans V, $\mathcal{B}_V$ une base de V, $\mathcal{B}_W$ une base de W et $\mathcal{B} := \mathcal{B}_V \# \mathcal{B}_W$ (base de E adaptée à la décomposition $V \oplus W = E$). Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$ où $A(u)$ est de taille (r, r), $B(u)$ de taille (r, s) et $D(u)$ de taille (s, s).

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \text{ où } A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbf{C}), B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{C}) \text{ et } D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbf{C}).}$$

Q33. — Montrer que $\{A(u) \;:\; u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbf{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \;:\; u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbf{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

- Si l'on note $i_V : V \longrightarrow E$ et $i_W : W \longrightarrow E$ les injections canoniques et $p_V : E \longrightarrow V$ la projection de E sur V parallèlement à W, $p_W : E \longrightarrow W$ la projection de E sur W parallèlement à V, alors, pour tout $u \in \mathcal{A}$

  $$A(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_V}(p_V \circ u \circ i_V) \qquad B(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}(p_V \circ u \circ i_W) \qquad D(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_W}(p_W \circ u \circ i_W)$$

  Nous en déduisons que les applications

  $$A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{M}_r(\mathbf{C}) \\ u & \longmapsto & A(u) \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{C}) \\ u & \longmapsto & B(u) \end{array} \right. \qquad D \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{M}_s(\mathbf{C}) \\ u & \longmapsto & D(u) \end{array} \right.$$

  sont linéaires. En outre, les applications A et D sont des morphismes d'anneaux.
- Soient $u, v \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$.
  - La partie $\{A(u) \;:\; u \in \mathcal{A}\}$ est l'image du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$ par l'application linéaire A. Ainsi $\{A(u) \;:\; u \in \mathcal{A}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_r(\mathbf{C})$.

- La partie $\{A(u) \ : \ u \in \mathcal{A}\}$ est l'image de l'anneau $\mathcal{A}$ par le morphisme d'anneaux A. Ainsi $\{A(u) \ : \ u \in \mathcal{A}\}$ est-il stable par multiplication.

Nous avons établi que $\{A(u) \ : \ u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbf{C})$. Il en est de même pour $\{D(u) : u \in \mathcal{A}\}$.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \{A(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{D(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_r(\mathbf{C}) \text{ et } \mathcal{M}_s(\mathbf{C}).}$$

- Soit $u \in \mathcal{A}$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $u^N = 0$ (nous aurions pu prendre $N = n$, en raison du résultat du cours sur la majoration du nilindice d'un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie). Un calcul matriciel par blocs montre que

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^N) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^N = \begin{pmatrix} A(u)^N & * \\ 0 & D(u)^N \end{pmatrix}$$

Donc $A(u)^N = 0_{\mathcal{M}_r(\mathbf{C})}$ et $D(u)^N = 0_{\mathcal{M}_s(\mathbf{C})}$.

$$\boxed{\text{Les éléments de } \{A(u) \ : \ u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{D(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ sont nilpotents.}}$$

Q34. — Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

- Le sous-espace vectoriel V étant distinct de $\{0\}$ et de E, sa dimension r vérifie $1 \leqslant r \leqslant n-1$. De même pour s la dimension de W.
- D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_r(\mathbf{C})$ et $Q \in GL_s(\mathbf{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{A}$, les matrices $PA(u)P^{-1}$ et $QD(u)Q^{-1}$ sont triangulaires supérieures.
- La matrice $\mathrm{diag}(P, Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est inversible d'inverse $\mathrm{diag}(P^{-1}, Q^{-1})$. Nous calculons

$$\mathrm{diag}(P, Q)\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,\mathrm{diag}(P^{-1}, Q^{-1}) = \begin{pmatrix} PA(u)P^{-1} & * \\ 0 & QD(u)Q^{-1} \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbf{C})$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{\text{l'algèbre } \mathcal{A} \text{ est trigonalisable.}}$$

Q35. — Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $T_n^{+}(\mathbf{C})$.

- Puisque $\mathcal{A}$ est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in T_n(\mathbf{C})$.
- Soit $u \in \mathcal{A}$. Comme u est nilpotent, 0 est sa seule valeur propre. Il en est de même de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Comme cette matrice est triangulaire, ses coefficients diagonaux coïncident avec ses valeurs propres. Aussi sont-ils tous nuls et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ appartient-elle à $T_n^{+}(\mathbf{C})$.

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ telle que, pour tout } u \in \mathcal{A},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in T_n^{+}(\mathbf{C}).}$$

5. Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie 4.

On fixe un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

5.1. Recherche d'un élément de rang 1

Q36. — Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$. On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x) \ : \ u \in \mathcal{A}\}$.

Posons $F := \{u(x) : u \in \mathcal{A}\}$.

- Considérons le morphisme d'évaluation en x
$$\mathrm{Eval}_x \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$
L'application Eval_x est linéaire et son image est exactement F ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E.
- Montrons F est stable par $\mathcal{A}$. Soit $z \in F$. Il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $z = u(x)$. Soit $v \in \mathcal{A}$. Alors $v(z) = (v \circ u)(x) \in \mathcal{A}$.
Ceci étant vrai pour tout $z \in F$ et $v \in \mathcal{A}$, F est stable par $\mathcal{A}$.
- Puisque $\mathcal{A}$ est irréductible, $F = \{0\}$ ou $F = E$.
- Si $F = \{0\}$ alors $u(x) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{A}$. Donc
$$x \in G := \bigcap_{u \in \mathcal{A}} \operatorname{Ker} u$$
Si $z \in G$ alors $v(z) = 0 \in G$ pour tout $v \in \mathcal{A}$ donc G est stable par $\mathcal{A}$. Donc $G = \{0\}$ ou $G = F$ par irréductibilité de $\mathcal{A}$.
Or $x \in G$ est non nul donc $G \neq \{0\}$ et $G = E$.
Donc $\mathrm{Ker}(u) = E$ pour tout $u \in \mathcal{A}$, i.e. $\mathcal{A} = \left\{0_{\mathcal{L}(E)}\right\}$.
Or $n \geqslant 2$, il existe donc H un sous-espace vectoriel de E strict non réduit à $\{0\}$. Alors H est stable par $\mathcal{A} = \{0\}$ ce qui contredit l'irréductibilité de $\mathcal{A}$.
- Donc $F = E$ et $y \in F$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } u \in \mathcal{A} \text{ tel que } u(x) = y.}$$

Q37. — Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que :
$$0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v).$$
On pourra considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}(v)$.

Notons r le rang de v.

- Puisque $r \geqslant 2$ il existe une famille libre à deux éléments de $\mathrm{Im}(v)$. Notons x et y des antécédents de deux tels éléments par v, de sorte que la famille $(v(x), v(y))$ est libre. Nécessairement, $v(x) \neq 0$.
- D'après la question précédente, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(v(x)) = y$.
- On a $(v \circ u)(\operatorname{Im} v) \subset \operatorname{Im} v$ donc on peut considérer f l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\operatorname{Im} v$.
- Comme le corps de base est $\mathbf{C}$ et la dimension de $\operatorname{Im}(v)$ finie non nulle, tout endomorphisme de $\operatorname{Im}(v)$ admet au moins une valeur propre complexe. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $f - \lambda \, \mathrm{id}_{\operatorname{Im} v}$ soit non inversible. En particulier
$$\mathrm{rg}(f - \lambda \, \mathrm{id}_{\operatorname{Im} v}) < r$$
- Pour tout $z \in E$
$$(v \circ u \circ v - \lambda v)(z) = (f - \lambda \, \mathrm{id}_{\operatorname{Im} v})(v(z))$$
Nous en déduisons que :
$$\mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) = \mathrm{rg}(f - \lambda \, \mathrm{id}_{\operatorname{Im} v}) < r = \mathrm{rg}(v)$$

- De plus
$$(v \circ u \circ v - \lambda v)(x) = v(u \circ v(x)) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$$
par liberté de $(v(x), v(y))$ donc $\mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) > 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } u \in \mathcal{A} \text{ et } \lambda \in \mathbf{C} \text{ tels que } 0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v).}$$

Q38. — En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

- Rappelons que $\mathcal{A} \neq \{0\}$ car l'algèbre $\{0\}$ n'est pas irréductible dès que $n \geqslant 2$. Soit donc $v_0 \in \mathcal{A}$ non nul.
  — Si $\mathrm{rg}(v_0) = 1$, le résultat est acquis.
  — Si $\mathrm{rg}(v_0) \geqslant 2$ on construit alors $v_1 = v_0 \circ u \circ v_0 - \lambda v_0$ comme dans la question précédente. Alors
  $$v_1 \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \mathrm{rg}\, v_1 < \mathrm{rg}\, v_0$$
  En itérant, on construit au bout d'au plus $\mathrm{rg}(v_0)$ étapes un élément de $\mathcal{A}$ de rang 1.

$$\boxed{\text{Il existe } v \in \mathcal{A} \text{ de rang 1.}}$$

5.2. Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, u_0$.

Q39. — Montrer qu'il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Posons $x = u_0(\varepsilon_1) \neq 0$ et fixons $i \in [\![1, n]\!]$.

- Puisque $x \neq 0$, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(x) = \varepsilon_i$ d'après la question 36. On pose alors $u_i := v_i \circ u_0$.
- D'une part, $u_i \in \mathcal{A}$.
- D'autre part, le noyau de u_i contient $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ donc u_i est de rang 0 ou 1. De plus
$$u_i(\varepsilon_1) = v_i(x) = \varepsilon_i$$
Donc u_i est de rang 1 et vérifie bien $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$.

$$\boxed{\text{Il existe } u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A} \text{ de rang 1 tels que } u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!].}$$

Q40. — Conclure

- Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. D'après la question 36, il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $w_j(\varepsilon_j) = \varepsilon_1$. Posons
$$f_{ij} = u_i \circ w_j \in \mathcal{A}$$
Alors $f_{ij}(\varepsilon_j) = \varepsilon_i$. De plus f_{ij} est de rang 1 donc $f_{ij}(\varepsilon_k) = 0$ si $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. Donc la matrice de f_{ij} est la matrice élémentaire E_{ij}.
- Puisque $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la famille $(f_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Donc l'algèbre $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est un } \mathbf{C}\text{-espace vectoriel alors la seule sous-algèbre irréductible de } \mathcal{L}(E) \text{ est } \mathcal{L}(E).}$$