Devoir surveillé n°2

samedi 12 octobre, 8h15-12h15

0. Préambule

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$.

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée M^T.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. Remarquer qu'on ne demande pas que id_E appartienne à $\mathcal{A}$.

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $S_n(\mathbf{K})$ (respectivement $A_n(\mathbf{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbf{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbf{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

1. Exemples de sous-algèbres

1.1. Sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Q1. — Les sous-ensembles $T_n(\mathbf{K})$ et $T_n^+(\mathbf{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?

Q2. — Les sous-ensembles $S_2(\mathbf{K})$ et $A_2(\mathbf{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$?

Q3. — On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbf{K})$ et $A_n(\mathbf{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?

1.2. Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \ : \ u(F) \subset F\}$.

Q4. — Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Q5. — Montrer que $\dim(\mathcal{A}_F) = n^2 - pn + p^2$.

Q6. — Déterminer $\displaystyle\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

1.3. Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbf{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbf{K}^2$.

Q7. — Montrer que $\Gamma(\mathbf{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

Q8. — Montrer que $\Gamma(\mathbf{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Q9. — Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbf{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

2. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ défini par $\varphi\colon e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

2.1. Calcul des puissances de J

Q10. — Préciser les matrices J et J^2. On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geqslant 2$.

Q11. — Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Q12. — Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

2.2. Une base de $\mathcal{A}$

Q13. — Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

Q14. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

Q15. — Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2.3. Diagonalisation de J

Q16. — Déterminer le polynôme caractéristique de J.

Q17. — Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q18. — La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

Q19. — Déterminer les valeurs propres complexes de J est les espaces propres associés.

2.4. Diagonalisation de $\mathcal{A}$

Q20. — Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$?

Q21. — Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$. On note $Q \in \mathbf{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Q22. — Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$?

3. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

3.1. Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée $\mathrm{tr}(M)$.

Q23. — Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A \,,\, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On désigne $A^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et on note r sa dimension.

Q24. — Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Jusqu'à la fin de cette partie 3, on fixe une base $(A_1, \ldots, A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

Q25. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i \,,\, M \rangle = 0$.

Q26. — Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

3.2. Conclusion

Soit $\mathcal{A}^T = \{M^T \;:\; M \in \mathcal{A}\}$.

Q27. — Montrer que $\mathcal{A}^T$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

Q28. — Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et soit $F = \mathrm{Vect}(A_1 X, \ldots, A_r X)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{A}^T$.

Q29. — Montrer que $d \leqslant n^2 - n + 1$ et conclure.

4. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie 5.

Théorème de Burnside. — *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.*

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q30. — Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n-1$.

Q31. — Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

Q32. — Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbf{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(u)$.

Q33. — Montrer que $\{A(u) \ : \ u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbf{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \ : \ u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbf{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

Q34. — Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q35. — Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $T_n^+(\mathbf{C})$.

5. Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie 4.

On fixe un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

5.1. Recherche d'un élément de rang 1

Q36. — Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$. On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x) \ : \ u \in \mathcal{A}\}$.

Q37. — Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que :

$$0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v).$$

On pourra considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}(v)$.

Q38. — En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

5.2. Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, u_0$.

Q39. — Montrer qu'il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Q40. — Conclure