# Un corrigé du devoir surveillé n°1



## 1. Question de cours

**Q1.** — Énoncer le théorème du rang et la formule du rang, puis démontrer les deux résultats.

## 2. Matrices de Rademacher

*Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n$ un entier naturel non nul et $(X_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de variables aléatoires définies sur $\Omega$, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On note $A$ la matrice aléatoire :*

$$A \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ \omega & \longmapsto & A(\omega) =: (X_{i,j}(\omega))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \end{array} \right.$$

Hans Rademacher (1892-1969)

**Q2.** — Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{tr}(A))$ et $\mathbf{V}(\mathrm{tr}(A))$.

**Q3.** — Calculer $\mathbf{E}(\det(A))$ et $\mathbf{V}(\det(A))$.

## 3. Loi faible des grands nombres

**Q4.** — Énoncer l'inégalité de Biénaymé-Tchebychev.

**Q5.** — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi. On pose $m := \mathbf{E}(X_1)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{[moyenne des variables } X_1,\dots,X_n\text{]}$$

Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\mathbf{P}(m-\varepsilon < M_n < m+\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(M_n) = m$. Les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes donc *a fortiori* décorrélées. Comme de plus $X_1,\dots,X_n$ ont même loi, elles ont même variance. Ainsi :

$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}(X_i) = \frac{\mathbf{V}(X_1)}{n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Biénaymé-Tchebychev :

$$\mathbf{P}(|M_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_1)}{n\,\varepsilon^2}$$

Le théorème d'encadrement livre alors :

$$\mathbf{P}\left(|M_n - m| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Grâce aux opérations sur les limites, on en tire :

$$\mathbf{P}\left(m-\varepsilon < M_n < m+\varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(|M_n - m| < \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\overline{(|M_n - m| \geqslant \varepsilon)}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(|M_n - m| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

*Remarque. Ce résultat porte le nom de loi faible des grands nombres. Il nous apprend, qu'asymptotiquement, la moyenne empirique $M_n$ et la moyenne théorique $m$ sont éloignées d'au plus $\varepsilon$, presque sûrement.*

## 4. Si $A$ et $B$ sont deux matrices réelles qui commutent alors $\det\left(A^2+B^2\right) \geqslant 0$

*Soit* $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$.

**Q6.** — Démontrer : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

**Q7.** — Démontrer : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$.

**Q8.** — Démontrer : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$.

**Q9.** — Supposons que $AB = BA$. Démontrer : $\det\left(A^2+B^2\right) \geqslant 0$.

**Q10.** — Soient $a$ un réel fixé, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det\left(A^2+B^2\right)$. Qu'en déduire ?

On calcule $\det\left(A^2+B^2\right) = 14 - a^2$. Nous en déduisons que le résultat de la question 9 n'est pas nécessairement vrai, si l'hypothèse « $AB = BA$ » n'est pas vérifiée. En effet, pour tout réel $a$ tel que $|a| > \sqrt{14}$, $\det\left(A^2+B^2\right) < 0$. On peut observer que les deux matrices $A$ et $B$ commutent si et seulement si $a = 1$, (cf. effet sur les lignes/colonnes d'une matrice lorsqu'on la multiplie à gauche/droite par une matrice de dilatation).

## 5. Calcul de la somme des $k^4$ où $k$ parcourt $[\![1, n]\!]$

*Soit $f$ l'application définie par :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

**Q11.** — Démontrer que $f$ est linéaire.

L'application « composition par la droite par $X+1$ » :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} a_i X^i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} a_i (X+1)^i \end{array} \right.$$

est clairement linéaire. Nous en déduisons que l'application $f = g - \mathrm{id}_{\mathbf{K}[X]}$ est linéaire, comme combinaison linéaire d'applications linéaires.

**Q12.** — Déterminer le noyau et l'image de $f$.

1. *Noyau de $f$.* Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $P(X+1) = P(X)$. Un raisonnement par récurrence permet d'établir que :
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad P(n) = P(0)$$
Le polynome $Q(X) = P(X) - P(0)$ admettant une infinité de racines, il est nul. Par suite le polynôme $P$ est constant. Nous avons établi l'inclusion $\operatorname{Ker}(f) \subset \mathbf{K}_0[X]$. L'inclusion réciproque est triviale. D'où $\operatorname{Ker}(f) = \mathbf{K}_0[X]$
2. *Image de $f$.* Fixons un entier $n \in \mathbf{N}^*$. Nous observons que, pour tout $P(X) \in \mathbf{K}_n[X]$, $\deg(P(X+1)) = \deg(P(X))$ donc :
$$\deg(f(P(X))) \leqslant \max\{\deg(P(X+1)), \deg(P(X))\} \leqslant n$$
Le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ de $\mathbf{K}[X]$ étant stable par $f$, nous pouvons considérer l'endomorphisme $f_n$ de $\mathbf{K}_n[X]$ induit par $f$ sur $\mathbf{K}_n[X]$ :
$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$
Comme la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ engendre $\mathbf{K}_n[X]$, nous savons que :
$$\operatorname{Im}(f_n) = \operatorname{Vect}\left(f_n(1), f_n(X), f_n\left(X^2\right), \ldots, f_n\left(X^n\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(f(X), f\left(X^2\right), \ldots, f\left(X^n\right)\right) \qquad [f(1) = 0]$$
Comme, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ :
$$f\left(X^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \quad \text{et} \quad \binom{k}{k-1} = k - 1 \neq 0$$
le degré de $f\left(X^k\right)$ égale $k$. D'après le théorème des degrés échelonnés :
$$\operatorname{Im}(f_n) = \mathbf{K}_{n-1}[X]$$
Nous en déduisons que :
$$\mathbf{K}[X] \supset \operatorname{Im}(f) \supset \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{K}_{n-1}[X] = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{K}_n[X] = \mathbf{K}[X]$$
L'image de l'application $f$ est donc $\mathbf{K}[X]$ tout entier. Par suite, $f$ est surjective.

**Q13.** — Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$. Démontrer qu'il existe un unique $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $Q = f(P)$. Simplifier alors la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(k)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. *Existence.* L'application $f$ étant surjective, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $f(P) = Q$. Comme $P(0)$ (vu comme polynôme constant) appartient à $\operatorname{Ker}(f)$ :
$$f(P - P(0)) = f(P) = Q$$
Le polynôme $P - P(0)$ est un antécédent de $Q$ par $f$ et admet $0$ comme racine. Il convient donc.
2. *Unicité.* Soit $(P_1, P_2) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $f(P_1) = f(P_2) = Q$ et $P_1(0) = P_2(0) = 0$. Le polynôme $P_1 - P_2$ est dans le noyau donc constant. Ainsi :
$$P_1 - P_2 = P_1(0) - P_2(0) = 0$$
Les polynômes $P_1$ et $P_2$ sont donc égaux.
3. *Simplification de la somme.* Grâce à des télescopages, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$ :
$$\sum_{k=0}^{n} Q(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k) = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$$

**Q14.** — Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Généraliser.

1. *Calcul de la somme.* Puisque l'application linéaire :

$$f_5 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_5[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_5[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array} \right.$$

a pour image $\mathbf{R}_4[X]$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_5[X]$ tel que $f(P) = X^4$. Alors $P - P(0) \in \mathbf{R}_5[X]$ est l'unique antécédent de $X^4$ par $f$ qui admet 0 comme racine. Il s'écrit :

$$a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 + a_5 X^5$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ sont des nombres réels.
Nous calculons :

$$f\left(\sum_{i=1}^{5} a_i\, X^i\right) = \sum_{i=1}^{5} a_i\, f\left(X^i\right) = \sum_{i=1}^{5} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} X^j\right) = \sum_{j=0}^{4} \left(\sum_{i=j+1}^{5} a_i \binom{i}{j}\right) X^j$$

Ainsi $f\left(\sum_{i=1}^{5} a_i\, X^i\right) = X^4$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & = & 0 \\ & & 2a_2 & + & 3a_3 & + & 4a_4 & + & 5a_5 & = & 0 \\ & & & & 3a_3 & + & 6a_4 & + & 10a_5 & = & 0 \\ & & & & & & 4a_4 & + & 10a_5 & = & 0 \\ & & & & & & & & 5a_5 & = & 1 \end{array} \right.$$

Nous résolvons aisément ce système linéaire déjà échelonné pour obtenir :

$$a_1 = -\frac{1}{30} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{1}{3} \qquad a_4 = -\frac{1}{2} \qquad a_5 = \frac{1}{5}$$

De cette étude nous déduisons que :

$$\frac{1}{5}\, X^5 - \frac{1}{2}\, X^4 + \frac{1}{3}\, X^3 - \frac{1}{30}\, X$$

est l'unique polynôme de $\mathbf{R}[X]$ dont 0 est racine et qui a pour image $X^4$ par l'application $f$. D'après la question 13, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}\,(n+1)^5 - \frac{1}{2}\,(n+1)^4 + \frac{1}{3}\,(n+1)^3 - \frac{1}{30}\,(n+1)$$

2. *Généralisation.* Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Grâce à notre étude de l'application $f$, nous pouvons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer, la somme $\sum_{k=1}^{n} k^p$ comme suit.

   - Comme il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$ tel que $f(P) = X^p$ et $f(0) = 0$, il existe un unique $(p+1)$-uplet $(a_1, \ldots, a_{p+1})$ de nombres réels tels que :

   $$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} a_i\, X^i\right) = X^p$$

   - On développe le polynôme $f\left(\sum_{i=1}^{p+1} a_i\, X^i\right)$ pour déterminer ses coefficients. En égalant ces derniers avec « les » coefficients de $X^p$, on obtient un système à $(p+1)$ équations et $(p+1)$ inconnues $(a_1, \ldots, a_{p+1})$, qui s'avère être déjà échelonné. On le résout aisément pour déterminer $a_1, \ldots, a_{p+1}$.
   - D'après la question 13 :

   $$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{i=1}^{p+1} a_i\,(n+1)^p$$

   **N.B.** Les coefficients $a_1, \ldots, a_{p+1}$ ne dépendent pas de l'entier naturel non nul $n$.

## 6. Un critère de diagonalisabilité

*Soient* $\mathbf{K}$ *un corps,* $E$ *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$ *et* $u$ *un endomorphisme de* $E$*.*

**Q15.** — Démontrer que $u$ est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de $E$ possède un supplémentaire dans $E$ stable par $u$.

1. *Implication directe.* Supposons que $u$ est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$
Nous en déduisons que :
$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad f(e_i) = \lambda_i\, e_i$$
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.
   - Si $\dim(F) = n$ alors $\{0_E\}$ est un supplémentaire de $F$ stable par $u$.
   - Supposons que $\dim(F) : p < n$ et considérons une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de $F$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}$ tels que :
$$\left(f_1, \ldots, f_p, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}\right)$$
est une base de $E$. Nous en déduisons que :
$$G := \mathrm{Vect}\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}\right)$$
est un supplémentaire de $F$ dans $E$. Ce dernier est stable par $u$ puisque :
$$\forall\, (x_1, \ldots, x_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-p} \quad f\left(\sum_{j=1}^{n-p} x_j\, e_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{n-p} x_j\, f(e_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n-p} x_j\, \lambda_{i_j}\, e_{i_j} \in G$$

2. *Implication réciproque.* Supposons que tout sous-espace vectoriel de $E$ possède un supplémentaire stable par $u$. Nous construisons, par récurrence finie, des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de $E$ tels que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la droite $\mathrm{Vect}\,(e_i)$ est stable par $u$. La matrice de $u$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sera diagonale.
   - Soit $H$ un hyperplan de $E$, par exemple $H = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_{n-1})$ où $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $E$. Par hypothèse, il existe une droite vectorielle $D$ stable par $u$ telle que $H \oplus D = E$. Si $e_1$ est un vecteur non nul de la droite $D$, alors $D = \mathrm{Vect}\,(e_1)$. La famille $(e_1)$ est libre et :
$$f(\mathrm{Vect}\,(e_1)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_1)$$
   - Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons construits des vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ de $E$ tels que la famille $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre et :
$$f(\mathrm{Vect}\,(e_1)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_1)\,, \ldots, f(\mathrm{Vect}\,(e_k)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_k)$$
Il existe un hyperplan $H$ de $E$ contenant les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$.
     - Si $k = n-1$ alors $H = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ convient.
     - Sinon le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la famille libre $(e_1, \ldots, e_k)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_{n-p})$ de $E$. Alors l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}\,(_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_{n-p-1})$ convient.

     Par hypothèse, il existe une droite vectorielle $D$ stable par $u$ telle que $H \oplus D = E$. Si $e_{k+1}$ est un vecteur non nul de la droite $D$ alors $D = \mathrm{Vect}\,(e_{k+1})$.
     - Clairement $f(\mathrm{Vect}\,(e_{k+1})) \subset \mathrm{Vect}\,(e_{k+1})$.
     - Le vecteur $e_{k+1}$ n'appartient pas à l'hyperplan $H$ donc *a fiotiori* pas au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$. Comme la famille $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre, nous en déduisons que la famille $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1})$ est libre.

     Nous disposons de $(k+1)$ vecteurs $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ de $E$ tels que la famille $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1})$ est libre et :
$$f(\mathrm{Vect}\,(e_1)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_1)\,, \ldots, f(\mathrm{Vect}\,(e_k)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_k)\,, f(\mathrm{Vect}\,(e_{k+1})) \subset \mathrm{Vect}\,(e_{k+1})$$

   Nous avons ainsi construit $n$ vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de $E$ tels que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et :
$$f(\mathrm{Vect}\,(e_1)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_1)\,, \ldots, f(\mathrm{Vect}\,(e_n)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_n)$$
La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de $n = \dim(E)$ vecteurs de $E$. Elle forme donc une base de $E$.

## 7. Endomorphismes d'un R-espace vectoriel annulé par $X^2+1$

*Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $u^2 + \mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

**Q16.** — Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. Démontrer que la famille $(x, u(x))$ est libre.

Soient $\lambda, \mu$ des réels tels que :

$$(L_1)\ :\ \lambda\, x + \mu\, u(x) = 0_E$$

En appliquant $u$ à chaque membre de cette identité, il vient :

$$(L_2)\ :\ -\mu\, x + \lambda\, u(x) = 0_E$$

En combinant $(L_1)$ et $(L_2)$, il vient :

$$(\lambda^2+\mu^2)\, x = 0_E \qquad [\lambda\, L_1 - \mu\, L_2]$$

Comme $x \neq 0_E$, nous en déduisons que $\lambda^2+\mu^2 = 0$. Puisque $\lambda$ et $\mu$ sont réels, nécessairement $\lambda = \mu = 0$.

**Q17.** — Soient un entier $p \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de $E$ tels que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\,(x_1, u(x_1)), \dots, \mathrm{Vect}\,(x_p, u(x_p))$ sont en somme directe. On suppose qu'il existe un vecteur $x_{p+1}$ de $E$ qui n'appartient pas à la somme $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\,(x_i, u(x_i))$. Démontrer que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\,(x_1, u(x_1)), \dots, \mathrm{Vect}\,(x_p, u(x_p)), \mathrm{Vect}\,(x_{p+1}, u(x_{p+1}))$ sont en somme directe.

Soient $y_1 \in \mathrm{Vect}\,(x_1, u(x_1)), \dots, , x_p \in x_{p+1} \in \mathrm{Vect}\,(x_p, u(x_p)), \mathrm{Vect}\,(x_{p+1}, u(x_{p+1}))$ tels que :

$$y_1 + \ldots + y_p + y_{p+1} = 0_E$$

Pour tout $i \in [\![1, p+1]\!]$, il existe des réels $\lambda_i, \mu_i$ (uniques) tels que $y_i = \lambda_i\, x_i + \mu_i\, u(x_i)$. En appliquant $u$ à chacun des membres de l'identité :

$$(L_1)\ :\ \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i + \mu_i\, u(x_i)\right) + \lambda_{p+1}\, x_{p+1} + \mu_{p+1}\, u(x_{p+1}) = 0_E$$

il vient :

$$(L_2)\ :\ \left(\sum_{i=1}^{p} -\mu_i\, x_i + \lambda_i\, u(x_i)\right) - \mu_{p+1}\, x_{p+1} + \lambda_{p+1}\, u(x_{p+1}) = 0_E$$

En combinant $(L_1)$ et $(L_2)$ il vient :

$$\underbrace{\lambda_{p+1}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i + \mu_i\, u(x_i)\right) - \mu_{p+1}\left(\sum_{i=1}^{p} -\mu_i\, x_i + \lambda_i\, u(x_i)\right)}_{\text{élément de } \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\,(x_i, u(x_i))} + (\lambda_{p+1}^2 + \mu_{p+1}^2)\, x_{p+1} = 0_E \qquad [\lambda_{p+1}\, L_1 - \mu_{p+1}\, L_2]$$

Si $\lambda_{p+1}^2 + \mu_{p+1}^2 \neq 0$, alors de l'identité ci-dessus nous déduisons $x_{p+1} \in \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\,(x_i, u(x_i))$, ce qui n'est pas. Ainsi $\lambda_{p+1}^2 + \mu_{p+1}^2 = 0$. Comme $\lambda_{p+1}$ et $\mu_{p+1}$ sont réels, il vient $\lambda_{p+1} = \mu_{p+1} = 0$ puis :

$$y_{p+1} = 0_E$$

L'identité $y_1 + \ldots + y_p + y_{p+1} = 0_E$ se simplifie en :

$$y_1 + \ldots + y_p = 0_E$$

Comme les sous-espaces $\mathrm{Vect}\,(x_1, u(x_1)), \dots, \mathrm{Vect}\,(x_p, u(x_p))$ sont en somme directe, nous savons que :

$$y_1 = \ldots = y_p = 0_E$$

**Q18.** — Démontrer que l'entier $n$ est pair.

Notons $p$ le quotient de la division euclidienne de $n$ par 2, de sorte que :

$$n = 2p \quad \text{ou} \quad n = 2p+1$$

1. *Cas où* $p = 1$. Nous démontrons que $n = 2$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $n = 3$ et considérons un vecteur non nul $x_1$ de $E$. Comme :

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right)\right) < \dim(E)$$

il existe un vecteur $x_2 \in E$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right)$. D'après la question 17, les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(x_2, u(x_2)\right)$ sont en somme directe. Donc :

$$\dim(E) \geqslant \dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right) \oplus \mathrm{Vect}\left(x_2, u(x_2)\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_2, u(x_2)\right)\right)$$

Avec le résultat de la question 16, nous en déduisons que $3 \geqslant 4$, ce qui n'est pas.

2. *Cas où* $p \geqslant 2$. Nous démontrons que $n = 2p$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $n = 2p+1$. Nous construisons, par récurrence finie, des vecteurs $x_1, \ldots, x_{p+1}$ de $E$ tels que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right), \ldots, \mathrm{Vect}\left(x_{p+1}, u(x_{p+1})\right)$ sont en somme directe.
   - Soit $x_1$ un vecteur non nul de $E$.
   - Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Supposons construits des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ tels que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right), \ldots, \mathrm{Vect}\left(x_k, u(x_k)\right)$ sont en somme directe. Avec le résultat de la question 16, nous en déduisons que :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)\right) = 2k \leqslant 2p < \dim(E)$$

   Il existe donc un vecteur $x_{k+1} \in E$ qui n'appartient pas à $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)$. D'après la question 17, les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right), \ldots, \mathrm{Vect}\left(x_k, u(x_k)\right), \mathrm{Vect}\left(x_{k+1}, u(x_{k+1})\right)$ sont en somme directe.

   Nous disposons à présent de vecteurs $x_1, \ldots, x_{p+1}$ de $E$ tels que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right), \ldots, \mathrm{Vect}\left(x_{p+1}, u(x_{p+1})\right)$ sont en somme directe, comme annoncé. Avec le résultat de la question 16, nous en déduisons que :

$$2p+1 = \dim(E) \geqslant \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p+1} \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)\right) = \sum_{i=1}^{p+1} \dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)\right) = 2p+2$$

   ce qui n'est pas.

**Q19.** — Construire une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{[matrice diagonale par blocs avec } n/2 \text{ blocs diagonaux identiques]}$$

Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $n = 2p$. En reprenant les arguments donnés dans la réponse à la question 18, nous construisons par récurrence finie des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de $E$ tels que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right), \ldots, \mathrm{Vect}\left(x_p, u(x_p)\right)$ sont en somme directe. Avec le résultat de la question 16, nous en déduisons que :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)\right) = 2p = \dim(E)$$

puis :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right) = E$$

Toujours d'après le résultat de la question 16, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la famille $\left(x_i, u(x_i)\right)$ est une base de $\mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)$. Nous en déduisons que :

$$\mathcal{B} = \left(x_1, u(x_1), \ldots, x_p, u(x_p)\right)$$

est une base de $E$. Comme, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u(x_i) = 1 \cdot u(x_i)$ et $u(u(x_i)) = (-1) \cdot x_i$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

**Q20.** — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$. Démontrer que $M$ est semblable à la matrice diagonale par blocs de la question 19.

Considérons l'endomorphisme $u$ de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associée à la matrice $M$. Si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = M$$

par définition de $u$. Nous calculons :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}\left(u^2 + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)^2 + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}\left(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}\right) = M^2 + I_n = 0 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}\left(0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)}\right)$$

Comme un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ est caractérisé par sa matrice dans la base canonique, nous en déduisons que :

$$u^2 + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)}$$

Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question 19 à l'endomorphisme $u$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

D'après le théorème de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\ P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}$$

En posant $P := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, cette dernière identité s'écrit encore :

$$M = P\ \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\ P^{-1}$$

## 8. Matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

*Soit un entier $n \geqslant 2$.*

**Q21.** — Soit $(U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ tel que $U + i\,V \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $x$ tel que $U + x\,V \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

Nous raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\det(U + x\,V) = 0$. Considérons la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \det(U + z\,V) \end{array} \right.$$

Nous observons que, pour tout $z \in \mathbf{C}$ :

$$f(z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} [U + z\,V]_{k,\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left([U]_{k,\sigma(k)} + z\,[V]_{k,\sigma(k)}\right) = P(z)$$

où :

$$P := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left([U]_{k,\sigma(k)} + [V]_{k,\sigma(k)}\,X\right) \in \mathbf{C}[X]$$

Le polynôme $P$ a une infinité de racines (tous les nombres réels), donc est nul. Par suite $f(i) = 0$, ce qui contredit l'inversibilité de la matrice $U + i\,V$.

**Q22.** — Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

- De $A = PBP^{-1}$, nous déduisons :
$$AP = PB$$
Notons :
$$U := \left(\mathrm{Re}\left([P]_{k,\ell}\right)\right)_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad \text{et} \qquad V := \left(\mathrm{Im}\left([P]_{k,\ell}\right)\right)_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$
de sorte que $P = U + iV \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$.
- D'après la question 22, il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que :
$$Q := U + xV \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$$
- L'identité $AP = PB$ livre alors :
$$\underbrace{AU}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})} + i \underbrace{AV}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})} = \underbrace{UB}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})} + i \underbrace{VB}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$$
En idenfiant les parties réelles et imaginaires des coefficients des matrices de chacun des membres de la précédente identité, il vient :
$$AU = UB \qquad \text{et} \qquad AV = VB$$
puis :
$$A(U + xV) = (U + xV)B$$
soit $AQ = QB$. Comme $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, nous en déduisons $A = QBQ^{-1}$.

## 9. Suite des noyaux itérés/images itérées et lemme de Fitting

*Soient $\mathbf{K}$ un corps, $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. Pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on note :*
$$K_p := \mathrm{Ker}\left(u^p\right) \quad \textit{et} \quad I_p := \mathrm{Im}\left(u^p\right)$$
*où $u^p$ est la puissance $p$-ième de $u$ pour le produit de composition.*

*Nous nous proposons d'étudier la suite des noyaux itérés $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$.*
*Dans une première partie, nous établissons des propriétés de monotonie pour ces deux suites et un critère pour qu'elles stationnent.*
*Dans un deuxième temps, nous supposons que le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$ est de dimension finie. Nous démontrons alors que les deux suites stationnent à un même rang $r$ et que :*
$$E = K_r \oplus I_r \qquad \textit{[lemme de Fitting]}$$
*Nous en déduisons que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ où $N$ est une matrice nilpotente et $P$ est une matrice inversible, un des blocs pouvant être « vide ».*
*Dans une dernière partie, nous étudions deux exemples en dimension infinie et démontrons que $E = K_r \oplus I_r$ sous l'hypothèse que la suite des noyaux itérés et la suite des images itérées stationnent toutes deux au rang $r$.*

Hans Fitting (1906-1938)

### 9.1. Généralités sur la suite des noyaux itérés/images itérées

**Q23.** — Soit $p \in \mathbf{N}$. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $K_p$ et $I_p$ de $E$ sont stables par $u$.

1. *Stabilité de $K_p$ par $u$.* Soit $x \in K_p$. Nous calculons :
$$u^p(u(x)) = u^{p+1}(x) = u\left(u^p(x)\right) = u\left(0_E\right) = 0_E$$
Ainsi $u(x) \in K_p$.

2. *Stabilité de $I_p$ par $u$.* Soit $y \in I_p$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Nous calculons :

$$u(y) = u\left(u^p(x)\right) = u^{p+1}(x) = u^p(u(x))$$

Comme $u(y)$ est l'image de $u(x)$ par l'application $u^p$, $u(y) \in I_p$.

**Q24.** — Démontrer que la suite des noyaux itérés $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion).

Soit $p \in \mathbf{N}$. Soit $x \in K_p$. Nous calculons :

$$u^{p+1}(x) = u\left(u^p(x)\right) = u\left(0_E\right) = 0_E$$

Ainsi $x \in K_{p+1}$.

**Q25.** — On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $K_p = K_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $K_q = K_{q+1}$.

Nous démontrons la propriété par récurrence sur l'entier $q \geqslant p$.

- *Initialisation à $q = p$.* Il s'agit précisément de l'hypothèse de cette question.
- *Hérédité.* Soit un entier $q \geqslant p$ tel que $K_q = K_{q+1}$. Démontrons $K_{q+1} = K_{q+2}$. L'inclusion $\subset$ est déjà connue, puisque la suite des noyaux itérés est croissante. Il ne reste que l'inclusion $\supset$ à établir.
  Soit $x \in K_{q+2}$. Alors $u^{q+1}(u(x)) = u^{q+2}(x) = 0_E$. Ainsi $u(x) \in K_{q+1} = K_q$ (hypothèse de récurrence) et donc $u^q(u(x)) = 0_E$, soit $u^{q+1}(x) = 0_E$. Le vecteur $x$ appartient donc à $K_{q+1}$.

**Q26.** — Démontrer que la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion).

Soit $p \in \mathbf{N}$. Soit $y \in I_{p+1}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x)$. Nous observons que $y = u^p(u(x))$. Comme $y$ est l'image du vecteur $u(x)$ de $E$ par l'application $u^p$, $y \in I_p$.

**Q27.** — On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $I_p = I_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $I_q = I_{q+1}$.

Nous démontrons la propriété par récurrence sur l'entier $q \geqslant p$.

- *Initialisation à $q = p$.* Il s'agit précisément de l'hypothèse de cette question.
- *Hérédité.* Soit un entier $q \geqslant p$ tel que $I_q = I_{q+1}$. Démontrons $I_{q+1} = I_{q+2}$. L'inclusion $\supset$ est déjà connue, puisque la suite des images itérées est décroissante. Il ne reste que l'inclusion $\subset$ à établir.
  Soit $y \in I_{q+1}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{q+1}(x) = u\left(u^q(x)\right)$. Comme $u^q(x) \in I_q = I_{q+1}$ (hypothèse de récurrence), il existe $x' \in E$ tel que $u^q(x) = u^{q+1}(x')$. On en déduit que

$$y = u\left(u^q(x)\right) = u\left(u^{q+1}(x')\right) = u^{q+2}(x') \ .$$

  Le vecteur $y$ appartient donc à $I_{q+2}$.

### 9.2. Cas où le K-espace vectoriel $E$ est de dimension finie

*Dans toute cette partie, nous supposons que le* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel $E$ est de dimension finie $n \geqslant 1$.*

**Q28.** — Démontrer que la suite des noyaux itérés $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir d'un rang $r \in [\![0, n]\!]$. Cet entier $r$ est appelé « indice de Fitting de $u$ ».

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $K_p$ est un sous-espace vectoriel de $E$, donc $\dim\left(K_p\right) \in [\![0, n]\!]$. Comme la suite des noyaux itérées est croissante :

$$\dim\left(K_0\right) \leqslant \dim\left(K_1\right) \leqslant \ldots \leqslant \dim\left(K_n\right) \leqslant \dim\left(K_{n+1}\right) \ .$$

Si toutes ces inégalités étaient strictes, alors l'ensemble $[\![0, n]\!]$ contiendrait $n+2$ éléments, ce qui n'est pas possible (principe des tiroirs). Ainsi la partie :

$$A := \{p \in [\![0,n]\!] \ : \ \dim(K_p) = \dim(K_{p+1})\}$$

de $\mathbf{N}$ est non vide. Elle admet donc un minimum (bon ordre). En posant $r := \min(A)$, nous obtenons donc :

$$\dim(K_0) < \dim(K_1) < \ldots < \dim(K_{r-1}) < \dim(K_r) = \dim(K_{r+1}) \ .$$

Comme la suite des noyaux itérés est croissante, nous en déduisons :

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{r-1} \subsetneq K_r = K_{r+1} \ .$$

Nous savons alors que, pour tout $p \geqslant r$, $K_p = K_{p+1}$. Nous avons donc démontré que :

$$\exists\, r \in [\![0,n]\!] \quad K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{r-1} \subsetneq K_r = K_{r+1} = \ldots = K_n = \ldots$$

**Q29.** — Démontrer que la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir du même rang $r$.

Soit $p \in \mathbf{N}$. D'après le théorème du rang :

$$\dim(I_p) = \dim(E) - \dim(K_p)$$

Nous rappelons :

$$\dim(K_0) < \dim(K_1) < \ldots < \dim(K_{r-1}) < \dim(K_r) = \dim(K_{r+1})$$

et nous en déduisons :

$$\dim(I_0) > \dim(I_1) > \ldots > \dim(I_{r-1}) > \dim(I_r) = \dim(I_{r+1}) \ .$$

Comme la suite des images itérées est décroissante :

$$I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_{r-1} \supsetneq I_r = I_{r+1} \ .$$

Nous savons alors que, pour tout $p \geqslant r$, $I_p = I_{p+1}$. Nous avons donc démontré que :

$$I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_{r-1} \supsetneq I_r = I_{r+1} = \ldots = I_n = \ldots$$

**Q30.** — On suppose que l'endomorphisme $u$ est un automorphisme. Déterminer l'indice de Fitting de $u$.

Comme $u$ est un automorphisme de $E$, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u^p$ est également un automorphisme de $E$ et donc $K_p = \{0_E\}$. Ainsi, la suite des noyaux itérés est constante et tous ses termes valent $\{0_E\}$. L'indice de Fitting $u$ est donc 0.

**Q31.** — On suppose que l'endomorphisme $u$ est un projecteur distinct de $\mathrm{id}_E$. Déterminer l'indice de Fitting de $u$.

Comme $u$ est un projecteur, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. Si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $u = \mathrm{id}_E$, ce qui n'est pas. Donc :

$$K_0 := \mathrm{Ker}\left(u^0\right) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(u) =: K_1$$

De $u^2 = u$, nous déduisons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $p \geqslant 1$, $u^p = u$ et donc $K_p = K_1$. Ainsi :

$$K_0 \subsetneq K_1 = K_2 = \ldots = K_n = \ldots$$

et donc l'indice de Ftting de $u$ est 1.

**Q32.** — On suppose que l'endomorphisme $u$ est nilpotent, i.e. qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On note $\nu \in \mathbf{N}^*$ son nilindice, caractérisé par $u^{\nu-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^\nu = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Calculer l'indice de Fitting de $u$. Qu'en déduire ?

Comme $u^{\nu-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{\nu} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $K_{\nu-1} \neq E = K_{\nu}$. Comme la suite des noyaux itérés est croissante :

$$K_{\nu-1} \subsetneq K_{\nu} \, .$$

Comme la suite des noyaux itérés est strictement croissante puis stationnaire, nous en déduisons :

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{\nu-2} \subsetneq K_{\nu-1} \subsetneq K_{\nu} \, .$$

Soit $p \geqslant \nu$. Comme la suite des noyaux itérés est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $E$

$$E = K_{\nu} \subset K_p \subset E$$

donc $K_p = E = K_{\nu}$. Ainsi

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{\nu-2} \subsetneq K_{\nu-1} \subsetneq K_{\nu} = K_{\nu+1} = \ldots = K_n = \ldots$$

et l'indice $r$ de Fitting de $u$ égale $\nu$.

**Q33.** — Démontrer : $E = K_r \oplus I_r$ (lemme de Fitting).

1. *Caractère direct de la somme.* Soit $y \in K_r \cap I_r$. Alors $u^r(y) = 0_E$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u^r(x)$. Nous en déduisons
$$u^{2r}(x) = u^r\left(u^r(x)\right) = u^r(y) = 0_E$$
et donc $x \in K_{2r}$. Comme la suite des noyaux itérés stationne à partir du rang $r$ et comme $2r \geqslant r$, $K_{2r} = K_r$ et donc $x \in \mathbf{K}^r$. Nous en déduisons $y = u^r(x) = 0_E$. Ceci étant établi pour un élément quelconque de $K_r \cap I_r$, nous en déduisons $K_r \cap I_r \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant claire, $K_r \cap I_r = \{0_E\}$. Les sous-espaces vectoriels $K_r$ et $I_r$ sont donc en somme directe.
2. *Application du théorème du rang.* D'après le théorème du rang, $\dim(K_r) + \dim(I_r) = \dim(E)$.
3. *Conclusion.* D'après 1. et 2., $E = K_r \oplus I_r$.

**Q34.** — On suppose ici que l'endomorphisme $u$ de $E$ n'est ni nilpotent, ni injectif et on considère les deux endomorphismes $u_{K_r}$ et $u_{I_r}$ induits par $u$ sur $K_r$ et $I_r$ :

$$u_{K_r} \left| \begin{array}{ccc} K_r & \longrightarrow & K_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad u_{I_r} \left| \begin{array}{ccc} I_r & \longrightarrow & I_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

Justifier $\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E$ et $\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E$, puis démontrer que $u_{K_r}$ est nilpotent de nilindice $r$ et que $u_{I_r}$ est un automorphisme.

1. *Démonstration de $\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E$.* Comme $u$ n'est pas injectif, $K_1 \neq \{0_E\}$ et donc $K_r \neq \{0_E\}$ (la suite des noyaux itérés est croissante). Comme $u$ n'est pas nilpotent, $u^r \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc $K_r \neq E$. Ainsi :
$$\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E$$
2. *Démonstration de $\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E$.* D'après le résultat précédent, $1 \leqslant \dim\left(K_r\right) \leqslant n-1$. Par le théorème du rang :
$$\dim\left(I_r\right) = \dim(E) - \dim\left(K_r\right) = n - \dim\left(K_r\right)$$
Ainsi $1 \leqslant \dim\left(I_r\right) \leqslant n-1$ et donc :
$$\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E$$
3. *Démonstration du caractère nilpotent de $u_{K_r}$ et calcul de son nilindice.* Soit $x \in K_r$. Nous calculons :
$$\left(u_{K_r}\right)^r(x) = u^r(x) = 0_E.$$
Donc $u_{K_r}$ est nilpotent de nilindice inférieur ou égal à $r$. Supposons que $\left(u_{K_r}\right)^{r-1} = 0_{\mathcal{L}(K_r)}$. Alors pour tout $x \in K_r$ :
$$0_E = \left(u_{K_r}\right)^{r-1}(x) = u^{r-1}(x)$$
et donc $x \in K_{r-1}$. Ainsi $K_r \subset K_{r-1}$. Comme la suite des noyaux itérés est croissante, $K_{r-1} \subset K_r$ et donc $K_{r-1} = K_r$, ce qui contredit $K_{r-1} \subsetneq K_r$. Ainsi $\left(u_{K_r}\right)^{r-1} \neq 0_{\mathcal{L}(K_r)}$. Le nilindice de $u_{K_r}$ est donc supérieur ou égal à $r$. Puisque nous savons déjà que ce dernier est inférieur ou égal à $r$, il égale $r$.

4. *Démonstration de la bijectivité de $u_{I_r}$.* Nous remarquons que :

$$\operatorname{Ker}(u_{I_r}) = \operatorname{Ker}(u) \cap I_r = K_1 \cap I_r \subset K_r \cap I_r = \{0_E\} \qquad \text{[lemme de Fitting]}$$

Donc $\operatorname{Ker}(u_{I_r}) = \{0_E\}$. L'endomorphisme $u_{I_r}$ de l'espace vectoriel $I_r$ de dimension finie est donc injectif. Par critère d'isomorphie en dimension finie, nous savons que $u_{I_r}$ est un automorphisme de $I_r$.

**Q35.** — Soient un entier $m \geqslant 2$ et $M \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$ une matrice non inversible et non nilpotente. Démontrer qu'il existe un entier $d \in [\![1, m-1]\!]$, une matrice $N \in \mathcal{M}_d(\mathbf{K})$ nilpotente, une matrice $P \in GL_{m-d}(\mathbf{K})$ tels que $M$ est semblable à la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.

1. *Introduction de l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à la matrice $M$.* Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à $M$. Si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, nous avons donc :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = M$$

2. *$u$ n'est pas injectif.* Comme $M$ est non inversible, $u$ n'est pas un automorphisme de $\mathbf{K}^n$. Comme $\mathbf{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie, l'endomorphisme $u$ de $\mathbf{K}^n$ n'est pas injectif.

3. *$u$ n'est pas nilpotent.* Pour tout $k \in \mathbf{N}$ :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}\left(u^k\right) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)^k = M^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}\left(0_{\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)}\right)$$

Un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ étant caractérisé par sa matrice dans la base canoique, l'endomorphisme $u$ de $\mathbf{K}^n$ n'est pas nilpotent.

4. *Application des résultats précédemment obtenus à $u$.* Notons $r$ l'indice de Fitting de $u$. Nous savons que :
   - $K_r \oplus I_r = E$ ;
   - $\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E$ ;
   - $\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E$ ;
   - $u_{K_r}$ est nilpotent ;
   - $u_{I_r}$ est un automorphisme.

   ppsons $d := \dim(K_r) \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, si $\mathcal{B}_{K_r}$ est une base de $K_r$, si $\mathcal{B}_{I_r}$ est une base de $I_r$, la famille $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{K_r} \# \mathcal{B}_{I_r}$ est une base de $E$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ admet la description par blocs suivante :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{K_r}}(u_{K_r}) & 0 \\ 0 & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{I_r}}(u_{I_r}) \end{pmatrix}.$$

   Comme l'endomorphisme $u_{K_r}$ de $K_r$ est nilpotent, la matrice :

$$N := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{K_r}}(u_{K_r}) \in \mathcal{M}_d(\mathbf{K})$$

   est nilpotente. Comme l'endomorphisme $u_{I_r}$ de $I_r$ est un automorphisme, la matrice :

$$P := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{I_r}}(u_{I_r}) \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathbf{K})$$

   est inversible. Donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ peut être écrite sous la forme :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

   où $N \in \mathcal{M}_d(\mathbf{K})$ est nilpotente et $P \in \mathbf{GL}_{n-d}(\mathbf{K})$.

5. *Conclusion.* D'après le théorème de changement de bases :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}$$

   identité qui se réécrit :

$$M = Q \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} Q^{-1}$$

   où $Q := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$.

**Q36.** — On suppose que $u$ n'est pas un automorphisme de $E$. Démontrer que :

$$r = \min\left(\{p \in \mathbf{N}^* \ : \ E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im}(u^p)\}\right)$$

Nous posons $A := \{p \in \mathbf{N}^* \ : \ E = \operatorname{Ker}(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)\}$.

- Comme $u$ n'est pas automorphisme de $E$ et comme $E$ est un **K**-espace vectoriel de dimension finie, l'application $u$ n'est pas injective. Ainsi :
$$K_0 = \{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u) = K_1 \ .$$
Nous en déduisons que $r$ n'est pas nul et donc $r \in \mathbf{N}^*$.
- D'après le lemme de Fitting, nous savons que $r \in A$.
- L'ensemble $A$ étant une partie non vide de $\mathbf{N}^*$, il possède un minimum (bon ordre) et donc $p := \min(A)$ est bien défini. De plus $p \leqslant r$.
- Soit $y \in I_p$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Comme $E = K_p + I_p$, il existe $k_p \in K_p$ et $i_p \in I_p$ tels que $x = k_p + i_p$. Comme $i_p \in I_p$, il existe $x' \in E$ tel que $i_p = u^p(x')$. Nous calculons :
$$y = u^p(x) = u^p(k_p + i_p) = u^p(k_p + u^p(x')) = u^p(k_p) + u^{2p}(x') = u^{2p}(x') \ .$$
Donc $y \in I_{2p}$. Comme $p \in \mathbf{N}^*$, $2p \geqslant p+1$. La suite des images itérées étant décroissante, $I_{2p} \subset I_{p+1}$ et donc $y \in I_{p+1}$. Ainsi $I_p \subset I_{p+1}$. Comme la suite des images itérées est décroissante, $I_{p+1} \subset I_p$. Ainsi $I_p = I_{p+1}$, d'où :
$$I_p = I_{p+1} = \ldots = I_n = \ldots$$
La suite des images itérées stationnant moins à partir du rang $r$, il vient $r \leqslant p = \min(A)$.
- Des deux points précédents, nous déduisons :
$$r = \min(A) = \min\left(\{p \in \mathbf{N}^* \ : \ E = \operatorname{Ker}(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)\}\right)$$

**Q37.** — Démontrer que la suite $\left(\dim(K_p)\right)_{p\in\mathbf{N}}$ croît de moins en moins vite, i.e. que pour tout $p \in \mathbf{N}$ :

$$\dim(K_{p+2}) - \dim(K_{p+1}) \leqslant \dim(K_{p+1}) - \dim(K_p)$$

On pourra, pour tout $p \in \mathbf{N}$, introduire un supplémentaire $A_p$ de $K_p$ dans $K_{p+1}$, un supplémentaire $A_{p+1}$ de $K_{p+1}$ dans $K_{p+2}$ et construire une application linéaire injective de $A_{p+1}$ dans $A_p$.

- Nous introduisons un supplémentaire $A_p$ de $K_p$ dans $K_{p+1}$ et un supplémentaire $A_{p+1}$ de $K_{p+1}$ dans $K_{p+2}$. Ainsi :
$$K_{p+1} = K_p \oplus A_p \qquad \text{et} \qquad K_{p+2} = K_{p+1} \oplus A_{p+1}$$
Nous considérons l'injection canonique $\iota$ de $A_{p+1}$ dans $K_{p+2}$
$$\iota \left| \begin{array}{ccc} A_{p+1} & \longrightarrow & K_{p+2} = K_{p+1} \oplus A_{p+1} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$
et la projection $\pi$ de $\mathbf{K}_{p+1}$ sur $A_p$ parallèlement à $K_p$
$$\pi \left| \begin{array}{ccc} K_{p+1} = K_p \oplus A_p & \longrightarrow & A_p \\ \underbrace{k_p}_{\in K_p} + \underbrace{a_p}_{\in A_p} & \longmapsto & a_p \end{array} \right.$$
dont le noyau est $K_p$.
- Soit $x \in K_{p+2}$. Comme :
$$u^{p+1}(u(x)) = u^{p+2}(x) = 0_E$$
le vecteur $u(x)$ appartient à $K_{p+1}$. Donc l'application
$$u|_{K_{p+2}}^{K_{p+1}} \left| \begin{array}{ccc} K_{p+2} & \longrightarrow & K_{p+1} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$
est bien définie.
- L'application :
$$\pi \circ u|_{K_{p+2}}^{K_{p+1}} \circ \iota \left| \begin{array}{ccc} A_{p+1} & \longrightarrow & A_p \\ x & \longmapsto & \pi(u(\iota(x))) \end{array} \right.$$

est linéaire, comme composée d'applications linéaires. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(\pi \circ u\big|_{K_{p+2}}^{K_{p+1}} \circ \iota\right)$.

$$\begin{array}{rcll} \pi(u(\iota(x))) & \Longrightarrow & u(\iota(x)) \in K_p & [\operatorname{Ker}(\pi) = K_p] \\ & \Longrightarrow & u^{p+1}(\iota(x)) = u^p\left(u(\iota(x))\right) = 0_E & \\ & \Longrightarrow & \iota(x) \in K_{p+1} & \end{array}$$

Or, par définition de $\iota$, $\iota(x) \in A_{p+1}$. Comme $K_{p+1} \cap A_{p+1} = \{0_E\}$, il vient $\iota(x) = 0_E$. Comme $\iota$ est linéaire et injective, nous en déduisons $x = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker}\left(\pi \circ u\big|_{K_{p+2}}^{K_{p+1}} \circ \iota\right) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant claire, il vient $\operatorname{Ker}\left(\pi \circ u\big|_{K_{p+2}}^{K_{p+1}} \circ \iota\right) = \{0_E\}$. L'application $\pi \circ u\big|_{K_{p+2}}^{K_{p+1}} \circ \iota$ est donc injective. Comme les espaces vectoriels $A_{p+1}$ et $A_p$ sont de dimension finie :

$$\dim\left(A_{p+1}\right) \leqslant \dim\left(A_p\right) .$$

D'après la formule de Grassmann :

$$\dim\left(A_{p+1}\right) = \dim\left(K_{p+2}\right) - \dim\left(K_{p+1}\right) \qquad \text{et} \qquad \dim\left(A_p\right) = \dim\left(K_{p+1}\right) - \dim\left(K_p\right) .$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\dim\left(K_{p+2}\right) - \dim\left(K_{p+1}\right) \leqslant \dim\left(K_{p+1}\right) - \dim\left(K_p\right)$$

### 9.3. Cas où le K-espace vectoriel $E$ est quelconque

**Q38.** — On considère le cas où $E := \mathbf{K}[X]$ et $u$ est l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$ :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

La suite $\left(K_p\right)_{p \in \mathbf{N}}$ des noyaux itérées stationne-t-elle ?

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $p \in \mathbf{N}$ :

$$u^p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, X^k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-p)!}\, a_k\, X^{k-p} . \end{array} \right.$$

Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et soit $P \in \mathbf{K}[X]$. De l'expression de $u^p$ ci-dessous, nous déduisons :

$$\begin{array}{rcl} P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k X^k \in K_p & \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-p)!}\, [P]_k\, X^{k-p} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\ell+p)!}{\ell!}\, [P]_{\ell+p}\, X^{\ell} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall\, \ell \in \mathbf{N} \quad [P]_{\ell+p} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall\, k \geqslant p \quad [P]_k = 0 \\ & \Longleftrightarrow & P \in \mathbf{K}_{p-1}[X] . \end{array}$$

Donc $K_p = \mathbf{K}_{p-1}[X]$. La suite :

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$$

se réécrit donc :

$$\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\} \subsetneq \mathbf{K}_0[X] \subsetneq \mathbf{K}_1[X] \subsetneq \mathbf{K}_2[X] \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{K}_{n-1}[X] \subsetneq \ldots$$

Ainsi la suite des noyaux itérés de l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$ ne stationne pas.

**Q39.** — On considère le cas où $E := \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et $u$ est l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \longmapsto & (0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ des noyaux itérés stationne, mais que la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$ ne stationne pas.

1. *Étude de la suite des noyaux itérés.* L'application $u$ est clairement injective. Ainsi, pour tout $p \in \mathbf{N}$, l'application linéaire $u^p$ est injective et donc $K_p = \{0_E\}$. Nous pouvons donc conclure que la suite des noyaux itérés est constante et tous ses termes valent $\{0_E\}$.
2. *Étude de la suite des images itérées.* Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous établissons que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \longmapsto & \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p \text{ zéros}}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\right) \end{array} \right.$$

Soit $p \in \mathbf{N}$. De l'expression de $u^p$ ci-dessous, nous déduisons que $I_p$ est l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ dont les termes d'indices $k \in [\![0, p-1]\!]$ sont nuls, i.e. :

$$I_p = \left\{(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ : \ b_0 = b_1 = \ldots = b_{p-1} = 0\right\} \ .$$

Ainsi

$$\underbrace{I_0}_{\mathbf{K}^{\mathbf{N}}} \supsetneq \underbrace{I_1}_{\left\{(b_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{K}^{\mathbf{N}} \,:\, b_0=0\right\}} \supsetneq \underbrace{I_2}_{\left\{(b_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{K}^{\mathbf{N}} \,:\, b_0=b_1=0\right\}} \supsetneq \underbrace{I_3}_{\left\{(b_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{K}^{\mathbf{N}} \,:\, b_0=b_1=b_2=0\right\}} \supsetneq \cdots$$

Nous en déduisons que la suite des images itérées ne stationne pas.

**Q40.** — Nous considérons désormais la situation suivante.

- Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$ est quelconque.
- Il existe un rang $r \in \mathbf{N}$ tel que $K_r = K_{r+1}$ et $I_r = I_{r+1}$.

Démontrer : $K_r \oplus I_r = E$.

1. *Caractère directe de la somme.* $K_r + I_r$ Soit $x \in K_r \cap I_r$. Alors $u^r(x) = 0$ et il existe $x' \in E$ tel que $x = u^r(x')$. Nous en déduisons :

$$u^{2r}(x') = u^r(u^r(x')) = u^r(x) = 0_E \ .$$

Donc $x' \in K_{2r} = K_r$ (la suite des noyaux itérés stationne au moins à partir du rang $r$). Ainsi $x = u^r(x') = 0_E$.
2. *La somme $K_r \oplus I_r = E$.* Soit $x \in E$. Comme $u^r(x) \in I_r = I_{2r}$ (la suite des images itérées stationne au moins à partir du rang $r$). Donc il existe $x' \in E$ tel que $u^r(x) = u^{2r}(x')$. Nous calculons :

$$u^r(x - u^r(x')) = u^r(x) - u^{2r}(x') = 0_E$$

et nous en déduisons que le vecteur $x - u^r(x')$ appartient à $K_r$. Comme :

$$x = \underbrace{x - u^r(x')}_{\in K_r} + \underbrace{u^r(x')}_{\in I_r}$$

il vient $x \in K_r \oplus I_r$. Ainsi $E \subset K_r \oplus I_r$. L'autre inclusion étant claire, nous pouvons conclure à :

$$E = K_r \oplus I_r$$