Devoir surveillé n°1

samedi 21 septembre, 8h15-11h15

▶ *Sujet MPI.* — Les élèves de MPI résolvent les parties **1,2,3,4,5,6,7**.

▶ *Sujet MPI*.* — Les élèves de MPI* résolvent les parties **1,2,6,8,9**.

▶ *Consignes.* — Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

1. Question de cours

Q1. — Énoncer le théorème du rang et la formule du rang, puis démontrer les deux résultats.

2. Matrices de Rademacher

Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, n un entier naturel non nul et $(X_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de variables aléatoires définies sur Ω, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On note A la matrice aléatoire :

$$A \left| \begin{array}{lll} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ \omega & \longmapsto & A(\omega) =: (X_{i,j}(\omega))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \end{array} \right.$$

Hans Rademacher (1892-1969)

Q2. — Calculer $\mathbf{E}(\operatorname{tr}(A))$ et $\mathbf{V}(\operatorname{tr}(A))$.

Q3. — Calculer $\mathbf{E}(\det(A))$ et $\mathbf{V}(\det(A))$.

3. Loi faible des grands nombres

Q4. — Énoncer l'inégalité de Biénaymé-Tchebychev.

Q5. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi. On pose $m := \mathbf{E}(X_1)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{[moyenne des variables } X_1, \ldots, X_n]$$

Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(m-\varepsilon < M_n < m+\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

4. Si A et B sont deux matrices réelles qui commutent alors $\det\left(A^2+B^2\right) \geqslant 0$

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$.

Q6. — Démontrer : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\,\det(A-B)$.

Q7. — Démontrer : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\,\det(A-iB)$.

Q8. — Démontrer : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$.

Q9. — Supposons que $AB = BA$. Démontrer : $\det\left(A^2+B^2\right) \geqslant 0$.

Q10. — Soient a un réel fixé, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det\left(A^2+B^2\right)$. Qu'en déduire ?

5. Calcul de la somme des k^4 où k parcourt $[\![1,n]\!]$

Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array} \right.$$

Q11. — Démontrer que f est linéaire.

Q12. — Déterminer le noyau et l'image de f.

Q13. — Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$. Démontrer qu'il existe un unique $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(0)=0$ et $Q = f(P)$. Simplifier alors la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(k)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Q14. — Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Généraliser.

6. Un critère de diagonalisabilité

Soient $\mathbf{K}$ *un corps,* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$ *et* u *un endomorphisme de* E.

Q15. — Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E stable par u.

7. Endomorphismes d'un R-espace vectoriel annulé par X^2+1

Soient E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 2$ *et* u *un endomorphisme de* E *tel que* $u^2 + \mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q16. — Soit x un vecteur non nul de E. Démontrer que la famille $(x, u(x))$ est libre.

Q17. — Soient un entier $p \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E tels que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right), \dots, \mathrm{Vect}\left(x_p, u(x_p)\right)$ sont en somme directe. On suppose qu'il existe un vecteur x_{p+1} de E qui n'appartient pas à la somme $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)$. Démontrer que les sous-espaces $\mathrm{Vect}\left(x_1, u(x_1)\right), \dots, \mathrm{Vect}\left(x_p, u(x_p)\right), \mathrm{Vect}\left(x_{p+1}, u(x_{p+1})\right)$ sont en somme directe.

Q18. — Démontrer que l'entier n est pair.

Q19. — Construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{[matrice diagonale par blocs avec } n/2 \text{ blocs diagonaux identiques]}$$

Q20. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$. Démontrer que M est semblable à la matrice diagonale par blocs de la question 19.

8. Matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q21. — Soit $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ tel que $U + i\,V \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un nombre réel x tel que $U + x\,V \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

Q22. — Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

9. Suite des noyaux itérés/images itérées et lemme de Fitting

Soient $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on note :

$$K_p := \mathrm{Ker}\,(u^p) \quad \textit{et} \quad I_p := \mathrm{Im}\,(u^p)$$

où u^p est la puissance p-ième de u pour le produit de composition.

Nous nous proposons d'étudier la suite des noyaux itérés $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$.
Dans une première partie, nous établissons des propriétés de monotonie pour ces deux suites et un critère pour qu'elles stationnent.
Dans un deuxième temps, nous supposons que le $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie. Nous démontrons alors que les deux suites stationnent à un même rang r et que :

$$E = K_r \oplus I_r \qquad \textit{[lemme de Fitting]}$$

Nous en déduisons que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ où N est une matrice nilpotente et P est une matrice inversible, un des blocs pouvant être « vide ».
Dans une dernière partie, nous étudions deux exemples en dimension infinie et démontrons que $E = K_r \oplus I_r$ sous l'hypothèse que la suite des noyaux itérés et la suite des images itérées stationnent toutes deux au rang r.

Hans Fitting (1906-1938)

9.1. Généralités sur la suite des noyaux itérés/images itérées

Q23. — Soit $p \in \mathbf{N}$. Démontrer que les sous-espaces vectoriels K_p et I_p de E sont stables par u.

Q24. — Démontrer que la suite des noyaux itérés $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion).

Q25. — On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $K_p = K_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $K_q = K_{q+1}$.

Q26. — Démontrer que la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion).

Q27. — On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $I_p = I_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $I_q = I_{q+1}$.

9.2. Cas où le K-espace vectoriel E est de dimension finie

Dans toute cette partie, nous supposons que le $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *est de dimension finie* $n \geqslant 1$.

Q28. — Démontrer que la suite des noyaux itérés $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir d'un rang $r \in [\![0,n]\!]$. Cet entier r est appelé « indice de Fitting de u ».

Q29. — Démontrer que la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir du même rang r.

Q30. — On suppose que l'endomorphisme u est un automorphisme. Déterminer l'indice de Fitting de u.

Q31. — On suppose que l'endomorphisme u est un projecteur distinct de id_E. Déterminer l'indice de Fitting de u.

Q32. — On suppose que l'endomorphisme u est nilpotent, i.e. qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On note $\nu \in \mathbf{N}^*$ son nilindice, caractérisé par $u^{\nu-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^\nu = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Calculer l'indice de Fitting de u. Qu'en déduire ?

Q33. — Démontrer : $E = K_r \oplus I_r$ (lemme de Fitting).

Q34. — On suppose ici que l'endomorphisme u de E n'est ni nilpotent, ni injectif et on considère les deux endomorphismes u_{K_r} et u_{I_r} induits par u sur K_r et I_r :

$$u_{K_r} \left| \begin{array}{ccc} K_r & \longrightarrow & K_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad u_{I_r} \left| \begin{array}{ccc} I_r & \longrightarrow & I_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

Justifier $\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E$ et $\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E$, puis démontrer que u_{K_r} est nilpotent de nilindice r et que u_{I_r} est un automorphisme.

Q35. — Soient un entier $m \geqslant 2$ et $M \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$ une matrice non inversible et non nilpotente. Démontrer qu'il existe un entier $d \in [\![1, m-1]\!]$, une matrice $N \in \mathcal{M}_d(\mathbf{K})$ nilpotente, une matrice $P \in GL_{m-d}(\mathbf{K})$ tels que M est semblable à la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.

Q36. — On suppose que u n'est pas un automorphisme de E. Démontrer que :

$$r = \min\left(\{p \in \mathbf{N}^* \ : \ E = \mathrm{Ker}\,(u^p) \oplus \mathrm{Im}\,(u^p)\}\right)$$

Q37. — Démontrer que la suite $(\dim(K_p))_{p\in\mathbf{N}}$ croît de moins en moins vite, i.e. que pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$\dim(K_{p+2}) - \dim(K_{p+1}) \leqslant \dim(K_{p+1}) - \dim(K_p)$$

On pourra, pour tout $p \in \mathbf{N}$, introduire un supplémentaire A_p de K_p dans K_{p+1}, un supplémentaire A_{p+1} de K_{p+1} dans K_{p+2} et construire une application linéaire injective de A_{p+1} dans A_p.

9.3. Cas où le K-espace vectoriel E est quelconque

Q38. — On considère le cas où $E := \mathbf{K}[X]$ et u est l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$:

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

La suite $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ des noyaux itérées stationne-t-elle ?

Q39. — On considère le cas où $E := \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et u est l'endomorphisme de E défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \longmapsto & (0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ des noyaux itérés stationne, mais que la suite des images itérées $(I_p)_{p\in\mathbf{N}}$ ne stationne pas.

Q40. — Nous considérons désormais la situation suivante.

- Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est quelconque.
- Il existe un rang $r \in \mathbf{N}$ tel que $K_r = K_{r+1}$ et $I_r = I_{r+1}$.

Démontrer : $K_r \oplus I_r = E$.