Un corrigé partiel du devoir maison n°9

1. Une équation aux dérivées partielles d'ordre 1

Soit $\Omega :=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

1. Soient $g \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[,\mathbf{R})$ et f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(xy) \end{array} \right.$$

Démontrer que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbf{R})$ et que

$$\forall (x,y)\in\Omega \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i) L'application

$$\mu \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \right.$$

est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Comme $\mu(\Omega)\subset]0,+\infty[$, l'application $f = g\circ\mu$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$, comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

ii) Soient $(x,y)\in\Omega$ et $h=(h_1,h_2)\in\mathbf{R}^2$. D'après la règle de la chaîne

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y)\cdot h &= \mathrm{d}g(\mu(x,y))\cdot(\mathrm{d}\mu(x,y)\cdot h) \\ &= g'(xy)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y)\,h_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y)\,h_2\right) \\ &= g'(xy)\,(y\,h_1 + x\,h_2) \end{aligned}$$

En spécialisant h à $(1,0)$, puis à $(0,1)$, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(xy)\,y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(xy)\,x$$

Nous en déduisons que $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, comme demandé.

2. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbf{R})$ telle que

$$\forall (x,y)\in\Omega \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Démontrer qu'il existe $g\in\mathcal{C}^1(]0,+\infty[,\mathbf{R})$ telle que

$$\forall (x,y)\in\Omega \quad f(x,y) = g(xy)$$

On pourra considérer le changement de variable $(u,v) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$.

i) Pour tout $(x,y),(u,v)\in\Omega$

$$(u,v) = \left(xy,\frac{x}{y}\right) \Longleftrightarrow (x,y) = \left(\sqrt{uv},\sqrt{\frac{u}{v}}\right)$$

ii) L'indication soufflée nous invite donc à introduire la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\underbrace{\sqrt{uv}}_{\varphi_1(u,v)}, \underbrace{\sqrt{\frac{u}{v}}}_{\varphi_2(u,v)} \right) \end{array} \right.$$

Les applications

$$\left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ (u,v) & \longmapsto & uv \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ (fonction polynomiale et fonction racine carrée), donc l'application φ_1, qui est leur composée, l'est. Les applications

$$\left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ (u,v) & \longmapsto & \dfrac{u}{v} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ (fonction rationnelle et fonction racine carrée), donc l'application φ_2, qui est leur composée, l'est. Comme ses applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$, l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

iii) L'application

$$h = f \circ \varphi \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. Fixons $(u,v) \in \Omega$ et posons $* := \left(uv, \frac{u}{v}\right)$. D'après la règle de la chaîne

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(*)\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(*)\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) = \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\,\frac{\partial f}{\partial x}(*) + \frac{1}{2\sqrt{uv}}\,\frac{\partial f}{\partial y}(*)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(*)\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(*)\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) = \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\,\frac{\partial f}{\partial x}(*) - \frac{\sqrt{u}}{2\,v^{3/2}}\,\frac{\partial f}{\partial y}(*)$$

D'après l'équation satisfaite par f

$$\sqrt{uv}\,\frac{\partial f}{\partial x}(*) = \sqrt{\frac{u}{v}}\,\frac{\partial f}{\partial y}(*)$$

d'où, en multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{2\sqrt{v}}$

$$\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\,\frac{\partial f}{\partial x}(*) = \frac{\sqrt{u}}{2\,v^{3/2}}\,\frac{\partial f}{\partial y}(*)$$

Nous en déduisons que

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0$$

iv) D'après le résultat précédent

$$\forall\,(u,v) \in \Omega \quad h(u,v) = h(u,1) = f(\sqrt{u}, \sqrt{u}\,)$$

Nous définissons la fonction g par

$$g \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ t & \longmapsto & f(\sqrt{t}, \sqrt{t}\,) \end{array} \right.$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$, comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie

$$\forall\,(u,v) \in \Omega \quad f \circ \varphi(u,v) = h(u,v) = g(u)$$

Nous en déduisons que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega \quad f\,(x,y) = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(x,y) = f \circ \varphi\left(xy, \frac{x}{y}\right) = g\,(xy)$$

2. Matrice Jacobienne antisymétrique en tout point

Soient un entier $n \geqslant 2$, $E := \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de format (n, n) à coefficients réels.

3. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, $B \in E$ et f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & AX + B \end{array} \right.$$

Démontrer que $f \in \mathcal{C}^2(E, E)$ et que, pour tout $X \in E$, $J_X(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}f(X)) \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

L'application f est affine, donc de classe $\mathcal{C}^2$. Comme

- la différentielle de l'application linéaire

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

est donnée par

$$\forall X \in E \quad \mathrm{d}u(X) = u$$

- la différentielle de l'application constante

$$c \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & B \end{array} \right.$$

est donnée par

$$\forall X \in E \quad \mathrm{d}c(X) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

la différentielle de $f = u + c$ est donnée par

$$\forall X \in E \quad \forall H \in E \quad \mathrm{d}f(X) \cdot H = AH$$

Par suite

$$\forall X \in E \quad J_X(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}f(X)) = A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$$

4. Soit $g \in \mathcal{C}^2(E, E)$ telle que, pour tout $X \in E$, $J_g(X) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}g(X)) \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

(a) Démontrer que l'application

$$J_g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & J_g(X) \end{array} \right.$$

est constante.

i) Notons $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de E et posons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$g_i := e_i^* \circ g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e_i^*(g(x)) \end{array} \right. \qquad [i\text{-ème composante de } g \text{ dans la base } (e_1, \dots, e_n)]$$

de sorte que

$$\forall x \in E \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, e_i$$

L'application g s'écrit donc

$$g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ g_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

ii) La matrice Jacobienne de g en $x \in E$ est donc donnée par

$$J_g(X) := \ Mat_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}g(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

Comme toutes les matrices Jacobiennes sont antisymétriques, nous savons que

$$(\star) \qquad \forall\, x \in E \quad \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$$

iii) Les fonctions $g_1, \dots, g_n$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, comme applications composantes de la fonction g, qui est de classe $\mathcal{C}^2$. Fixons $x \in E$ et $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k\,\partial x_j}(x) &= -\frac{\partial^2 g_j}{\partial x_k\,\partial x_i}(x) && [(\star)] \\
&= -\frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i\,\partial x_k}(x) && [\text{théorème de Schwarz}] \\
&= \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i\,\partial x_j}(x) && [(\star)] \\
&= \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_j\,\partial x_i}(x) && [\text{théorème de Schwarz}] \\
&= -\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j\,\partial x_k}(x) && [(\star)] \\
&= -\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k\,\partial x_j}(x) && [\text{théorème de Schwarz}]
\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k\,\partial x_j}(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, nous en déduisons que

$$\forall\, x \in E \quad \mathrm{d}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)(x) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbf{R})}$$

Comme E est connexe par arcs (E est convexe), nous en déduisons que la fonction $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ est constante sur E.

iv) D'après ce qui précède

$$\forall\, x \in E \quad J_g(x) = J_g(0_E)$$

(b) En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $B \in E$ telles que, pour tout $X \in E$, $g(X) = AX + B$.

Posons $A := J_g(0_E) \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. D'après le point précédent, l'application g et l'application linéaire

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & A\,X \end{array} \right.$$

ont même différentielle en tout point de E. Comme E est connexe par arcs, la fonction $g - u$ est constante sur E, i.e.

$$\exists\, B \in E \quad \forall\, X \in E \quad g(X) = A\,X + B$$