Devoir maison n°9

pour le lundi 27 janvier

1. Une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 1
2. Matrice Jacobienne antisymétrique en tout point 1
3. Groupe d'ordre pq, où p et q sont des premiers distincts 2
4. Corps de rupture d'un polynôme de degré 3 irréductible sur $\mathbf{Q}$ 2

1. Une équation aux dérivées partielles d'ordre 1

Soit $\Omega := \,]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,$.

1. Soient $g \in \mathcal{C}^1(\,]0,+\infty[\,,\mathbf{R})$ et f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(xy) \end{array} \right.$$

Démontrer que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbf{R})$ et que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbf{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Démontrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\,]0,+\infty[\,,\mathbf{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega \quad f(x,y) = g(xy)$$

On pourra considérer le changement de variable $(u,v) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$.

2. Matrice Jacobienne antisymétrique en tout point

Soient un entier $n \geqslant 2$, $E := \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de format (n,n) à coefficients réels.

3. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, $B \in E$ et f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & AX+B \end{array} \right.$$

Démontrer que $f \in \mathcal{C}^2(E,E)$ et que, pour tout $X \in E$, $J_X(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}f(X)) \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

4. Soit $g \in \mathcal{C}^2(E,E)$ telle que, pour tout $X \in E$, $J_g(X) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}g(X)) \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.
   (a) Démontrer que l'application

$$J_g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & J_g(X) \end{array} \right.$$

   est constante.
   (b) En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $B \in E$ telles que, pour tout $X \in E$, $g(X) = AX+B$.

3. Groupe d'ordre pq, où p et q sont des premiers distincts

Soient p, q deux nombres premiers distincts et $(G, *)$ un groupe fini de cardinal pq. D'après un théorème (admis) dû à Cauchy

$$(\star) \qquad \exists\,(x,y) \in G^2 \quad \mathrm{ord}\,(x) = p \ \text{ et } \ \mathrm{ord}\,(y) = q$$

5. Donner deux premiers distincts p, q et un groupe fini $(G, *)$ de cardinal pq qui est anabélien.
6. On suppose dans cette question que $(G, *)$ est abélien. Démontrer que $(G, *)$ est isomorphe $(\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}, +)$.
7. Démontrer le résultat $(\star)$ dans le cas particulier où $p = 5$ et $q = 7$, i.e. démontrer qu'un groupe fini de cardinal 35 contient un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7. On pourra raisonner par l'absurde et observer que G est l'union de ses sous-groupes monogènes distincts de $\{e_G\}$.

4. Corps de rupture d'un polynôme de degré 3 irréductible sur $\mathbf{Q}$

8. Démontrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
9. Démontrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ possède une unique racine réelle a.
10. Donner une $\mathbf{Q}$-base de $F := \mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}\left(\left\{a^k \ : \ k \in \mathbf{N}\right\}\right)$.
11. Démontrer que F est une sous-$\mathbf{Q}$-algèbre de $\mathbf{R}$, qui est un corps.
12. Étudier les automorphismes de la $\mathbf{Q}$-algèbre F.