Devoir maison n°8**

pour le lundi 6 janvier

0. Notations et objectifs du sujet

Dans tout ce problème, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ de la forme $I = [a, b]$ avec $a < b$. On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$. On munit cet espace de la norme $|| \cdot ||_I$ définie par

$$|| f ||_I = \sup \{|f(x)| \ : \ x \in I\}$$

Si A est une partie de $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ et si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, on dit que f est une limite uniforme d'éléments de A s'il existe une suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de A telle que $|| f - f_n ||_I \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs (ou nuls). On note $\mathbf{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et si $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré au plus n. On dit qu'un polynôme $p \in \mathbf{R}[X]$ est unitaire si $p(X) = 1$ ou bien s'il existe un entier $n \geqslant 1$ et un polynôme $r \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tels que $p(X) = X^n + r(X)$.

La restriction à I permet de voir $\mathbf{R}[X]$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, ce que nous faisons. Nous munissons alors $\mathbf{R}_n[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ de la norme $|| \cdot ||_I$.

L'essentiel du problème (les parties **3** à **7**) est inspiré par la question suivante : quelles fonctions continues sur I sont limites uniformes de polynômes à coefficients entiers ? Le problème comporte sept parties. La partie **5** n'utilise pas les résultats des parties précédentes.

1. Existence et unicité d'une meilleure approximation

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soif $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$. On pose $m = \inf \{|| f - p ||_I \ : \ p \in \mathbf{R}_n[X]\}$.

Q1 Montrer que l'ensemble C des $g \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $|| f - g ||_I \leqslant 1 + m$ est un compact non vide de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q2 Montrer qu'il existe un élément $p \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $|| f - p ||_I = m$. En déduire que si $m = 0$, on a alors $f \in \mathbf{R}_n[X]$.

On suppose dans la suite de cette partie que $m > 0$.

Q3 Soit k le nombre de solutions dans I de l'équation $|f(x) - p(x)| = m$; on suppose que $k \leqslant n + 1$ et on note ces solutions $x_1 < \ldots < x_k$, avec $x_i \in I$. Montrer qu'il existe un polynôme $q \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $q(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Q4 Pour $\delta > 0$, on pose

$$U_\delta = \{x \in I \ : \ \exists i \in \{1, \ldots, k\} \quad |x - x_i| < \delta\}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - q(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in U_\delta$.

Q5 Soit $\ell = || p - q ||_I$ et soit $\varepsilon > 0$, à ajuster ensuite. Soit δ comme à la question **Q4**. Pour $t \in]0,1[$, on pose $p_t = (1-t)p + tq$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x) - p_t(x)| \leqslant \begin{cases} (1-t)m + t\varepsilon & \text{si } x \in U_\delta \\ t\ell + \sup\{|f(y) - p(y)| \ : \ y \in I \setminus U_\delta\} & \text{si } x \in I \setminus U_\delta \end{cases}$$

Q6 Montrer que pour un choix convenable de $\varepsilon > 0$, il existe $t \in]0,1[$ tel que $|| f - p_t ||_I < m$. En déduire que l'équation $|f(x) - p(x)| = m$ admet au moins $n+2$ solutions distinctes dans I.

Q7 On suppose qu'il existe $p_1, p_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que $|| f - p_1 ||_I = || f - p_2 ||_I = m$. Montrer que $p_1 = p_2$ (on pourra appliquer la question **Q6** à $(p_1 + p_2)/2$).

2. Capacité d'un compact

Soit K une partie compacte de $\mathbf{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbf{R})$, on pose $|| f ||_K = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K\}$. On suppose que K est un ensemble infini.

Q8 Montrer que si $n \geqslant 1$ est un entier, il existe un polynôme $q \in \mathbf{R}[X]$, unitaire de degré n, tel que $|| q ||_K = \inf\limits_p || p ||_K$ où p parcourt l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbf{R}$. On pose $t_n = || q ||_K = \inf\limits_p || p ||_K$. Montrer que si $a < b$ et $K = [a,b]$, un tel polynôme q est unique. On le note T_n^K.

Q9 Soit $(\ell_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels telle que pour tous $m, n \geqslant 1$, on a

$$\ell_{m+n} \leqslant \frac{n}{m+n}\ell_n + \frac{m}{m+n}\ell_m$$

Soit $\ell = \inf\{\ell_n \ : \ n \geqslant 1\} \in \{-\infty\} \cup \mathbf{R}$. Montrer que $\ell_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Q10 Montrer que la suite $\left(t_n^{1/n}\right)_{n \geqslant 1}$ admet une limite, notée $d_1(K)$.

Q11 On pose $w_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, on pose $w_n = \sup\left\{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j| \ : \ x_1, \ldots, x_n \in K\right\}$. Montrer que la suite $\left(w_n^{2/(n(n-1))}\right)_{n \geqslant 2}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge ; on notera $d_2(K)$ sa limite.

Q12 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $t_n \leqslant w_{n+1}/w_n$. On pourra montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $w_n = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j|$, puis considérer $p(X) = (X - x_1) \ldots (X - x_n)$ et choisir judicieusement $x_{n+1} \in K$.

Q13 Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$ tels que pour tout polynôme unitaire $p \in \mathbf{R}[X]$ de degré n, on a

$$w_{n+1} = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & x_1^{n-1} & p(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & p(x_{n+1}) \end{pmatrix}\right|.$$

En déduire que $w_{n+1} \leqslant (n+1) w_n t_n$.

Q14 Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels qui converge vers une limite u. Pour $n \geqslant 1$, on pose $z_n = (u_1 + \ldots + u_n)/n$. Montrer que $z_n \to u$ quand $n \to +\infty$.

Q15 Montrer que $d_1(K) = d_2(K)$.

Remarque. Cette limite commune est appelée la *capacité* de K.

3. Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n est un entier strictement positif.

Q16 Montrer qu'il existe un et un seul polynôme T_n tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$. Quel est son degré ?

Q17 Montrer que $2^{1-n}T_n$ est un polynôme unitaire qui admet $n+1$ extremums dans l'intervalle $[-1,1]$.

Q18 Soit $I = [-1,1]$, soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$ et soit q un élément de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ tel que $||\, f - q\,||_I = \inf\{||\, f - p\,||_I \,:\, p \in \mathbf{R}_{n-1}[X]\}$ (*cf.* la question **Q2**). On suppose que $||\, f - q\,||_I < 2^{1-n}$. Montrer que le polynôme $2^{1-n}T_n - (f - q)$ a au moins n racines distinctes dans I. En déduire que si $I = [-1,1]$, alors $T_n^I = 2^{1-n}T_n$ (le polynôme T_n^I est défini à la question **Q8**).

Q19 Calculer $T_n^{[a,b]}$ et en déduire que $\left|\left| T_n^{[a,b]} \right|\right|_{[a,b]} = 2\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^n$ puis que $d_1([a,b]) = \dfrac{b-a}{4}$ (où d_1 est défini à la question **Q10**).

Q20 Montrer que si $I = [a,b]$ avec $b - a \geqslant 4$, et si p est un polynôme non constant à coefficients entiers, alors $||\, p\,||_I \geqslant 2$.

Q21 En déduire que si $b - a \geqslant 4$, une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement si f est elle-même un polynôme à coefficients entiers.

4. L'approximation par des polynômes à coefficients entiers

On suppose dans le reste du problème que $I = [a,b]$ avec $b - a < 4$.

Q22 Montrer qu'il existe un polynôme unitaire non constant $p \in \mathbf{R}[X]$ tel que $||\, p\,||_I < 1$.

Q23 Soit $r \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$. Montrer que si $s \in \mathbf{R}[X]$, il existe $n \geqslant 0$ et $b_0, \ldots, b_n \in \mathbf{R}_{d-1}[X]$ tels que

$$s(X) = b_0(X) + b_1(X)r(X) + \ldots + b_n(X)r(X)^n$$

Q24 Soit d le degré du polynôme p construit à la question **Q22** et soient $\ell_0 \geqslant 1$ et $k \geqslant \ell_0$ des entiers ; on pose $m = \ell_0 d$. Montrer qu'il existe des réels $b_{i,\ell,k} \in [0,1]$ pour $0 \leqslant i \leqslant d-1$ et pour $\ell \geqslant \ell_0$, tels que l'on puisse écrire $p(X)^k = r_k(X) + z_k(X) + p_k(X)$, où

$$r_k(X) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant d-1 \\ \ell \geqslant \ell_0}} b_{i,\ell,k} X^i p(X)^\ell,$$

où z_k est un polynôme unitaire de degré kd à coefficients entiers et où p_k est un polynôme de degré au plus $m-1$ et à coefficients dans $[0,1]$.

Q25 Choisir soigneusement ℓ_0 et montrer qu'il existe alors deux entiers $k' > k$ tels que $q = z_{k'} - z_k$ est un polynôme unitaire non constant à coefficients entiers vérifiant $||\, q\,||_I < 1$.

Définition. Soit $J(I)$ l'ensemble des $x \in I$ tels que $p(x) = 0$ pour tout polynôme p à coefficients entiers vérifiant $||\, p\,||_I < 1$. Par la question **Q25**, l'ensemble $J(I)$ est fini.

Q26 Déterminer $J(I)$ lorsque $I = [a,b]$ avec $-1 < a < b < 1$, puis lorsque $I = [-1,1]$.

Q27 Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbf{R})$ une fonction qui est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers. Montrer qu'il existe un polynôme p à coefficients entiers tel que $f(x) = p(x)$ pour tout $x \in J(I)$.

Q28 Montrer qu'il existe un polynôme unitaire q à coefficients entiers tel que $||\, q\,||_I < 1$ et que, si $x \in I$ vérifie $q(x) = 0$, alors $x \in J(I)$.

Notation. Dans le reste de cette partie, q désigne un tel polynôme et n son degré.

Q29 Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbf{R}[X]$, il existe $\tilde{p} \in \mathbf{Z}[X]$ vérifiant $|| p - \tilde{p} ||_I \leqslant M$. On pourra utiliser la question **Q23**.

Q30 Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ une fonction telle que pour tout $x \in I$ vérifiant $q(x) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(y) = 0$ pour tout $y \in I$ vérifiant $|x - y| < \delta$. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème de Weierstrass à f/q^k pour k grand, montrer qu'il existe un polynôme p à coefficients entiers tel que $|| f - p ||_I < \varepsilon$.

Q31 Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ une fonction telle que pour tout $x \in I$ vérifiant $q(x) = 0$, on a $f(x) = 0$. Montrer que f est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers.

Q32 Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement s'il existe un polynôme p à coefficients entiers tel que $f(x) = p(x)$ pour tout $x \in J(I)$.

Q33 Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$ est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement si $f(-1) \in \mathbf{Z}$, $f(0) \in \mathbf{Z}$, $f(1) \in \mathbf{Z}$ et $f(-1)$ et $f(1)$ sont de même parité.

5. Polynômes symétriques

Définitions. Soit $n \geqslant 1$. On considère des polynômes en les n variables $T_1, \ldots, T_n$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire

$$p(T_1, \ldots, T_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geqslant 0} a_{i_1, \ldots, i_n} T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n}$$

avec $a_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbf{Z}$, la somme étant presque nulle. L'ensemble de ces polynômes est noté $\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ et forme un anneau. Un monôme est un polynôme de la forme $a_{i_1, \ldots, i_n} T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n}$ avec $a_{i_1, \ldots, i_n} \neq 0$. Son degré est le n-uplet $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbf{N}^n$. Nous dirons qu'un n-uplet $\underline{i} \in \mathbf{N}^n$ est *plus petit* qu'un n-uplet $\underline{j} \in \mathbf{N}^n$ si $\displaystyle\sum_k i_k < \sum_k j_k$ ou bien si $\displaystyle\sum_k i_k = \sum_k j_k$ et il existe k tel que $i_1 = j_1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}$ et $i_k < j_k$.

Q34 Montrer que si $\underline{i} \in \mathbf{N}^n$ et $\underline{j} \in \mathbf{N}^n$ sont des n-uplets avec $\underline{i} \neq \underline{j}$, alors soit $\underline{i}$ est plus petit que $\underline{j}$, soit $\underline{j}$ est plus petit que $\underline{i}$.

Q35 Montrer que si l'on se donne un n-uplet $\underline{i} \in \mathbf{N}^n$, l'ensemble des n-uplets $\underline{j} \in \mathbf{N}^n$ qui sont plus petits que $\underline{i}$ est fini.

Définitions. Si $p(T_1, \ldots, T_n) = \displaystyle\sum_{i_1, \ldots, i_n \geqslant 0} a_{i_1, \ldots, i_n} T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n}$ est un polynôme non nul, on note $\mathrm{dom}(p)$ le coefficient $a_{i_1, \ldots, i_n}$ du monôme $a_{i_1, \ldots, i_n} T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n}$, où $(i_1, \ldots, i_n)$ est le plus grand des degrés pour lesquels $a_{i_1, \ldots, i_n} \neq 0$. Le degré $(i_1, \ldots, i_n)$ correspondant est le *degré* de p, noté $\deg(p)$.

Si π est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et si $p \in \mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$, on note p^π le polynôme $P(T_{\pi(1)}, \ldots, T_{\pi(n)})$. On dit que p est un *polynôme symétrique* si $p^\pi = p$ pour toute permutation π. Les éléments $S_1, \ldots, S_n$ de $\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ sont définis par la formule

$$\prod_{i=1}^{n} (X - T_i) = X^n - S_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} S_{n-1} X + (-1)^n S_n.$$

Ce sont donc des polynômes symétriques. On a $S_k = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} T_{i_1} \ldots T_{i_k}$.

Q36 Soit $p \in \mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ un polynôme symétrique non nul et soit $(i_1, \ldots, i_n)$ le degré de p. Montrer que $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_n$.

Q37 Soit p un polynôme comme dans la question précédente. On pose

$$d_1 = i_1 - i_2, \quad d_2 = i_2 - i_3, \quad \ldots, d_{n-1} = i_{n-1} - i_n, \quad d_n = i_n.$$

Montrer que
- ou bien $p = \mathrm{dom}(p)\, S_1^{d_1} \ldots S_n^{d_n}$;
- ou bien $\deg(p - \mathrm{dom}(p)\, S_1^{d_1} \ldots S_n^{d_n})$ est plus petit que $\deg(p)$.

Q38 Montrer que si $p \in \mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ est un polynôme symétrique, il existe un polynôme $q \in \mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ tel que $p = q(S_1, \ldots, S_n)$.

6. Entiers algébriques

Définition. On dit qu'un nombre complexe x est un *entier algébrique* s'il existe un polynôme unitaire (non nul) à coefficients entiers $p \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $p(x) = 0$.

Q39 Montrer que si $x \in \mathbf{Q}$ alors x est un entier algébrique si et seulement si $x \in \mathbf{Z}$.

Q40 Si $a(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbf{Z}[X]$, on note $c(a)$ le pgcd de $a_0, \ldots, a_n$. Montrer que si $a, b \in \mathbf{Z}[X]$, on a alors $c(ab) = c(a)c(b)$. On pourra montrer que si un nombre premier divise $c(ab)$ alors il divise $c(a)$ ou $c(b)$.

Q41 Montrer que si x est un entier algébrique, il existe un et un seul polynôme $p_x \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire tel que $p_x(x) = 0$ et tel que p_x est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$. Montrer que p_x est à racines simples dans $\mathbf{C}$.

Définition. Dans les notations de **Q41**, les racines $x_1, \ldots, x_n$ de p_x dans $\mathbf{C}$ (y compris x lui-même) *sont appelées* les conjugués de x. On a alors $p_x(X) = (X - x_1) \ldots (X - x_n)$.

Q42 Dans les notations ci-dessus, soit r un élément de $\mathbf{Q}[X]$ tel qu'il existe i vérifiant $r(x_i) = 0$. Montrer que p_x divise r dans $\mathbf{Q}[X]$.

Q43 Soient x et y des entiers algébriques et soient $y_1, \ldots, y_m$ les conjugués de y. Montrer (par exemple en utilisant la question **Q38**) que les coefficients du polynôme

$$p_x(X - y_1) \ldots p_x(X - y_m)$$

sont dans $\mathbf{Z}$. En déduire que $x + y$ est un entier algébrique.

Q44 Montrer que si x et y sont des entiers algébriques, alors xy est un entier algébrique.

Définition. Soit $I = [a, b]$ et soit $F(I)$ l'ensemble des $x \in I$ qui sont des entiers algébriques dont tous les conjugués appartiennent aussi à I. Cet ensemble est appelé le noyau de Fekete de I.

Q45 Soit q un polynôme à coefficients entiers tel que $||\, q \,||_I < 1$, soit x un élément de $F(I)$ et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses conjugués. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} q(x_i)$ est un élément de $\mathbf{Z}$, puis que $q(x) = 0$. En déduire $F(I) \subset J(I)$.

Q46 En considérant par exemple le polynôme $X(X^2 - 1)(X^2 - 2)$, calculer $J(I)$ pour tout intervalle $I = [-a, a]$ avec $a \leqslant \dfrac{3}{2}$.

7. Le noyau de Fekete

Le but de cette partie est de montrer que pour tout intervalle $I = [a, b]$ de longueur $b - a < 4$, on a en fait $F(I) = J(I)$.

Définition. Un pavé est une partie P de $\mathbf{R}^n$ de la forme

$$P = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \ : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [-1, 1]\}$$

où $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n$. Le volume de P est alors $\mathrm{vol}(P) = 2^n |\det(V)|$, où V est la matrice de $v_1, \ldots, v_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Pour $h \in \mathbf{R}^n$ on note $h + P = \{h + v \ : \ v \in P\}$. Soit $\mathbf{Z}^n$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont entières.

Q47 Montrer que si P est un pavé tel que $\mathrm{vol}(P) > 1$, il existe $w \neq w'$ dans P tels que $w - w' \in \mathbf{Z}^n$. On pourra observer que dans le cas contraire, $h + P$ et $h' + P$ sont disjoints pour tous $h \neq h'$ dans $\mathbf{Z}^n$.

Q48 Soit $x \in \mathbf{R}$ un entier algébrique et soient $x_1 = x, x_2, \ldots, x_m$ ses conjugués. On suppose que $m \geqslant 2$ et qu'il existe $n \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{R}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

et on note $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ l'application linéaire correspondante. Si $r > 0$, on note $B(r)$ l'ensemble des $a \in \mathbf{R}^n$ tels que $|a_n| \leqslant r$ et que $|a_i| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Montrer que si r est assez grand, il existe $h \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que $h \in f^{-1}(B(r))$.

Q49 Soit $h \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ comme à la question précédente. On pose $s(X) = h_1 + h_2 X + \ldots + h_n X^{n-1}$, où $h_1, \ldots, h_n$ sont les coordonnées de h. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $|s(x_i)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $s(x_i) \neq 0$.

Q50 On conserve les notations de la question **Q48**. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que si $y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbf{R}$, il existe $p \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $|p(x_i) - y_i| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ (on pourra s'inspirer des questions **Q29** et **Q30**).

Q51 Soit à présent $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de réels deux à deux distincts tel que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le réel x_i est un entier algébrique qui admet au moins un conjugué qui n'est pas dans S. Montrer que si $y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$, il existe $p \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $|p(x_i) - y_i| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Q52 Soit $I = [a, b]$ avec $b - a < 4$ et soit q un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que $||\, q \,||_I < 1$. En écrivant l'ensemble des racines de q dans I comme union disjointe $F(I) \cup S$, montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in F(I)$ est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers.

Q53 Montrer que $F(I) = J(I)$.