Devoir maison n°8

pour le lundi 6 janvier

1. Résultats préliminaires ... 1
1.1. Étude d'une série entière ... 1
1.2. Projections orthogonales ... 2
2. Polynômes de Laguerre ... 2
3. Approximation ... 3

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0,+\infty[$ ou sur $\mathbf{R}$.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les résultats des parties 1 et 2.

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme

$$f \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, x^k \end{array} \right.$$

où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

1. Résultats préliminaires

1.1. Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Q1 Montrer que la fonction Γ est bien définie et à valeurs strictement positives.

Q2 À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

Q3 Déterminer l'unique réel positif R tel que

- pour tout réel x tel que $|x| < R$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument ;
- pour tout réel x tel que $|x| > R$, la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

On admet que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \quad \text{pour tout } x \in \,]-R, R[\,.$$

Ce résultat peut s'établir en justifiant soigneusement une permutation des symboles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}$, à l'aide d'un théorème que nous découvrirons plus tard dans l'année.

1.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x , x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

Q4 Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F et x un vecteur de E.

Q5 Montrer que $\pi_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle e_i$.

Q6 Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle^2 .$$

2. Polynômes de Laguerre

Dans cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$ et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f \colon [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \, \mathrm{d}x$ est convergente.

Q7 Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

Q8 En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$ est convergente.

Q9 En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

Q10 Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{n+\alpha} e^{-x} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi_n \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{-\alpha} e^{x} \varphi_n^{(n)}(x) \end{array} \right.$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

Q11 Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

Q12 Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son nuique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élement de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$\langle f , g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Q13 Montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } f \in E_\alpha.$$

Q14 Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \mathrm{o}\left(e^{-x/2}\right) \text{ quand } x \to +\infty.$$

Q15 Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m \, , \, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$.

Q16 Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \, \Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie 1).

3. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie 2. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-kx} \end{array} \right.$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

Q17 Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k \, , \, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ et calculer sa valeur.

Q18 En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

Q19 Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

Q20 Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leqslant \varepsilon.$$

On pourra introduire la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

et le théorème de Weierstraß.

Q21 Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.

Q22 Soit $h\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ $(A > 0)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question **Q21** à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & h(\sqrt{x}\,) e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right.$$

et à un α bien choisi.

On peut montrer que le résultat de la question **Q22** *est en réalité valable pour tout fonction* $h\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue et de carré intégrable sur* $\mathbf{R}$.