

Devoir maison n°7

pour le vendredi 20 décembre

1. Exponentielle tronquée	1
2. Méthode de Laplace	2
3. Formule de Stirling	3
4. Formule de Bernstein	3
5. Première répétition	3

1. Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

- Q1.** Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
- Q2.** En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nx}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n , la relation

$$R_n(x) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n$$

- Q3.** Démontrer que la suite de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

- Q4.** On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}$$

- Q5.** Démontrer la relation $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout n entier naturel.

- Q6.** Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du$$

- Q7.** En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ pour $u \geq x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

2. Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur laquelle on fait les hypothèses suivantes

- (H1) $f(0) = 1$
- (H2) $f''(0) = -1$
- (H3) pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $0 < f(x) < 1$
- (H4) les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

Pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(f(x))$$

Q8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis que φ possède une limite finie en 0^+ .

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$.

Q9. Montrer que la fonction φ , sur $] - 1, 1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait

$$f(x) \leq e^{-ax^2}$$

Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur \mathbf{R} , et que la suite de fonctions $(g_n, n \geq 1)$ converge simplement sur \mathbf{R} vers la fonction g telle que pour tout $u \in \mathbf{R}$

$$g(u) = e^{-u^2/2}$$

Le théorème ci-dessous, étudié plus tard dans l'année et admis, pourra être appliqué pour résoudre la question suivante.

Théorème de convergence dominée. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ une suite de fonctions telle que
(rég) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur \mathbf{R}
(cvs) la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur \mathbf{R} vers une fonction $f \in \mathcal{CM}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$
(dom) il existe une fonction $\psi \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, telle que pour tout $(n, u) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$, $|f_n(u)| \leq \psi(u)$
 Alors

(c1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$

(c2) $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$

(c3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$

Q11. En déduire que

$$\int_{-1}^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_0^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \tag{1}$$

3. Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

Q12. Pour tout entier $n \geq 1$, déduire de la question 5 que

$$n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n)$$

avec

$$I_n = \int_{-1}^1 (x+1)^n e^{-nx} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_1^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx$$

Q13. Montrer que pour, tout $x \geq 1$, $x+1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n .

Q14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n .

Q15. En déduire que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4. Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie 1.

Q16. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt$$

Q17. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$$

5. Première répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n=5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X=5$.

Pour représenter cette expérience, on introduit l'espace $\Omega = \{1, \dots, n\}^{n+1}$ et les variables aléatoires coordonnées (U_1, \dots, U_{n+1}) définies par

$$U_j \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \{1, \dots, n\} \\ w = (w_1, \dots, w_{n+1}) \longmapsto w_j \end{array} \right.$$

En d'autres termes, U_j est le numéro de la boule tirée au j -ième tirage. On suppose que la probabilité \mathbf{P} sur Ω est telle que les variables aléatoires $(U_j, j=1, \dots, n+1)$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

Q18. Pour une entrée `liste` = $[w_1, \dots, w_{n+1}]$, écrire un code Python pour calculer la valeur de $X(w_1, \dots, w_{n+1})$.

Q19. Montrer que pour $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, l'événement $(X=k)$ est de probabilité non nulle.

Q20. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, montrer que

$$\mathbf{P}(X > k+1) = \mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) \mathbf{P}(X > k)$$

Q21. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\mathbf{P}(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}$$

Q22. Établir l'identité suivante

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k)$$

Q23. En utilisant les questions précédentes, donner un équivalent simple de $\mathbf{E}[X]$ lorsque n tend vers $+\infty$.