Un corrigé du devoir maison n°4

1. Topologie matricielle et théorème de Cayley-Hamilton

Notation. — La lettre **K** désigne le corps **R** ou **C** et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1.1. Topologie des K-espaces vectoriels de dimension finie

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et

$$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i & \longmapsto & \max\{|x_i| \;:\; i \in [\![1,n]\!]\} \end{array} \right.$$

Dans l'exercice 9 de la feuille d'exercices « Espaces vectoriels normés 2 », nous avons démontré le

Théorème A. — *Soit N une norme sur le **K**-espace vectoriel E de dimension finie. Alors*

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad N(x) \leqslant \alpha\, N_\infty(x) \quad \text{et} \quad N_\infty(x) \leqslant \beta\, N(x)$$

Q1. — Soient N_1, N_2 deux normes sur E, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E et x un vecteur de E. Démontrer l'équivalence

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} x \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} x$$

- Il suffit de prouver que
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_\infty} x \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} x \tag{1}$$
- D'après le théorème A, il existe deux constantes réelles strictement positives α et β telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$0 \leqslant N_1(u_n - x) \leqslant \alpha\, N_\infty(u_n - x) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant N_\infty(u_n - x) \leqslant \beta\, N_1(u_n - x)$$
Le théorème d'encadrement nous permet alors d'affirmer que
$$N_\infty(u_n - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} 0_{\mathbf{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad N_1(u_n - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} 0_{\mathbf{R}}$$
L'équivalence (1) est donc établie.

D'après la question 1, pour étudier la convergence d'une suite de vecteurs de E, on peut placer sur E la norme que l'on souhaite. Cette souplesse nous permet de considérer une norme idoine pour la problématique considérée. En outre, la propriété établie à la question 1 a pour conséquence que les concepts suivants ne dépendent pas de la norme dont le $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E est équipé.

- partie fermée (cf. caractérisation séquentielle) ;
- partie ouverte (complémentaire d'une partie fermée) ;
- adhérence d'une partie (définie par une propriété de minimalité mettant en jeu des parties fermées) ;
- intérieur d'une partie (défini par une propriété de minimalité mettant en jeu des parties ouvertes) ;
- partie compacte (définie à l'aide de la propriété de Bolzano-Weierstraß).

Dans la question suivante, nous étalissons que la notion de « partie bornée » ne dépend pas non plus du choix de la norme sur E.

Q2. — Soient N_1, N_2 deux normes sur E et A une partie de E. Démontrer que la partie A est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2.

Soit A une partie de E.

- Il suffit de prouver que

$$A \text{ est bornée pour la norme } N_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ est bornée pour la norme } N_1 \tag{2}$$

- *Implication directe dans (2).* Supposons A bornée pour la norme N_∞. Il existe donc une constante réelle $M > 0$ telle que

$$\forall\, a \in A \quad N_\infty(a) \leqslant M \tag{3}$$

  D'après le théorème A, il existe une constante réelle strictement positive α telle que, pour tout $x \in E$

$$N_1(x) \leqslant \alpha\, N_\infty(x) \tag{4}$$

  Soit $a \in A$. De (3) et (4) nous déduisons

$$N_1(a) \leqslant \alpha\, N_\infty(a) \leqslant \alpha\, M \qquad [\text{constante réelle indépendante de } a]$$

  La partie A est donc bornée pour la norme N_1.
- *Implication réciproque dans (2).* Démonstration analogue à l'implication directe dans (2).

Q3. — En considérant la norme N_∞ sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, démontrer le

Théorème B. — *Soit A une partie fermée et bornée du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors A est compacte.*

- Commençons par remarquer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (E, N_\infty) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \end{array} \right.$$

  est une isométrie, i.e. un isomorphisme tel que

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \quad ||\,(x_1, \dots, x_n)\,||_\infty = N_\infty(f(x_1, \dots, x_n)) \tag{5}$$

  De la linéarité de f et de (5), on déduit que f est 1-lipschitzienne, donc continue.
- Soit A une partie fermée et bornée de E, pour la norme N_∞ (ou pour toute norme sur E, d'après Q1 et Q2).
  — Remarquons que, l'application f étant bijective, la partie $f^{-1}(A)$ de $\mathbf{K}^n$ est à la fois l'image réciproque de A par f et l'image directe de A par f^{-1}, i.e.

$$\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \ :\ f(x_1, \dots, x_n) \in A\right\} = f^{-1}(A) = \left\{f^{-1}(a) \ :\ a \in A\right\}$$

— Comme f est continue, $f^{-1}(A)$ est une partie fermée de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

— Puisque A est bornée, il existe une constante réelle $M \geqslant 0$ telle que

$$\forall\, a \in A \quad N_\infty(a) \leqslant M$$

Soit $a \in A$. Comme f est une isométrie

$$\left|\left| f^{-1}(a) \right|\right|_\infty = N_\infty(a) \leqslant M$$

La partie $f^{-1}(A)$ de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$ est donc bornée.

D'après le cours, $f^{-1}(A)$, qui est une partie fermée et bornée de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$, est compacte. $\boxed{\text{La partie } A = f\left(f^{-1}(A)\right) \text{ de } (E, N_\infty) \text{ est compacte}}$ comme image continue d'un compact.

Q4. — Soient F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Soient $||\cdot||_E, N_E$ deux normes sur E et $||\cdot||_F, N_F$ deux normes sur F. Démontrer l'équivalence

$$f\colon\ (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F) \text{ est continue} \quad\Longleftrightarrow\quad f\colon\ (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F) \text{ est continue}$$

- *Implication directe.* Supposons que l'application

$$f\colon\ (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F) \tag{6}$$

est continue. Soit $x \in E$. Considéront une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_E} x$. Alors

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_E} x \quad &\Longrightarrow \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_E} x && \text{[Q1]} \\ &\Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_F} f(x) && \text{[caractérisation séquentielle de (6)]} \\ &\Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{N_F} f(x) && \text{[Q1]} \end{aligned}$$

Par caractérisation séquentielle de la continuité, l'application $f\colon\ (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$ est continue au point x. Ceci étant établi pour un vecteur x quelconque de E, nous en déduisons que l'application

$$f\colon\ (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$$

est continue.

- *Implication réciproque.* Elle découle de l'implication directe, par symétrie des rôles joués par $||\cdot||_E$ et N_E d'une part et $||\cdot||_F$ et N_F d'autre part.

Pour étudier la continuité de l'application $f\colon E \longrightarrow F$, on peut placer sur E et F les normes que l'on souhaite. Cette souplesse nous permet de considérer des normes idoines pour la problématique considérée.

Q5. — Soient F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme N_F et $f\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire. Démontrer qu'il existe une constante réelle $k > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E \quad N_F\left(f(x)\right) \leqslant k\, N_\infty(x)$$

et en déduire le

Théorème C. — *Toute application linéaire du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vers le $\mathbf{K}$-espace vectoriel F de dimension finie est continue.*

- Soit x un vecteur de E, que nous décomposons dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Grâce à la linéarité de f et à l'inégalité triangulaire vérifiée par la norme N_F, nous calculons

$$N_F(f(x)) = N_F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, f(e_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\leqslant N_\infty(x)}\; N(f(e_i)) \leqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} N(f(e_i))\right)}_{=:k \geqslant 0} N_\infty(x)$$

Ainsi $\boxed{\text{il existe } k \geqslant 0 \text{ tel que, pour tout } x \in E,\ N_F\left(f(x)\right) \leqslant k\, N_\infty(x).}$

- Notons que $k = 0$ si et seulement si f est l'application identiquement nulle. Dans ce cas, k peut être remplacé par une constante réelle strictement positive quelconque. Aussi la constante réelle k peut-elle être supposée strictement positive.
- Soit $(x, y) \in E^2$. Du résultat précédent et de la linéarité de f, nous déduisons

$$N_F(f(x) - f(y)) = N_F(f(x - y)) \leqslant k\, N_\infty(x - y)$$

Comme l'application f est k-lipschitzienne, $\boxed{\text{l'application } f \text{ est continue.}}$

1.2. Polynômes de matrices

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ fixée. Pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, on définit la matrice $P(A)$ par

$$P(A) := \sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i\, A^i$$

Par exemple, si $P = X^3 - 5X + 2$, $P(A) = A^3 - 5\,A + 2\,I_n$.

Q6. — Démontrer que l'application

$$\mathrm{Eval}_A \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) := \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i\, A^i \end{array} \right.$$

est linéaire.

Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Nous calculons

$$\mathrm{Eval}_A(\lambda\, P + \mu\, Q) := \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{[\lambda\, P + \mu\, Q]_i}_{\lambda\,[P]_i + \mu\,[Q]_i} A^i = \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i\, A^i + \mu \sum_{i=0}^{+\infty} [Q]_i\, A^i = \lambda\, \mathrm{Eval}_A(P) + \mu\, \mathrm{Eval}_A(Q)$$

Q7. — Démontrer qu'il existe un polynôme non nul P tel que $\deg(P) \leqslant n^2$ et $P(A) = 0$.

En appliquant la formule du rang à l'application

$$(\mathrm{Eval}_A)_{|\mathbf{K}_{n^2}[X]} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{n^2}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) := \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i\, A^i \end{array} \right.$$

il vient

$$\underbrace{\dim\left(\mathbf{K}_{n^2}[X]\right)}_{=n^2+1} = \dim\left(\mathrm{Ker}\left((\mathrm{Eval}_A)_{|\mathbf{K}_{n^2}[X]}\right)\right) + \underbrace{\mathrm{rg}\left((\mathrm{Eval}_A)_{|\mathbf{K}_{n^2}[X]}\right)}_{\leqslant n^2}$$

Le noyau de l'application $(\mathrm{Eval}_A)_{|\mathbf{K}_{n^2}[X]}$ n'est donc pas trivial, ce qui livre le résultat demandé.

Q8. — Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $(P\,Q)(A) = P(A)\,Q(A)$.

Il s'agit de démontrer que les deux applications

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ (P,Q) & \longmapsto & \mathrm{Eval}_A(P \times_{\mathbf{K}[X]} Q) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ (P,Q) & \longmapsto & \mathrm{Eval}_A(P) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \mathrm{Eval}_A(Q) \end{array} \right.$$

sont égales. Comme ces deux applications sont bilinéaires et vérifient, pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}^2$

$$\varphi\left(X^i, X^j\right) = \mathrm{Eval}_A\left(X^i \times_{\mathbf{K}[X]} X^j\right) = \mathrm{Eval}_A\left(X^{i+j}\right) = A^{i+j}$$

$$\psi\left(X^i, X^j\right) = \mathrm{Eval}_A\left(X^i\right) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \mathrm{Eval}_A\left(X^j\right) = A^i \times_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} A^j = A^{i+j}$$

elles coïncident sur tout couple (P,Q) de $\mathbf{K}[X]^2$.

1.3. Un résultat de convergence pour une suite de polynômes de matrices

On équipe $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des normes

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ Q & \longmapsto & \max\{|\,[Q]_i\,| \ : \ i \in [\![0,n]\!]\} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad ||\cdot|| \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ M & \longmapsto & \max\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n |\,[M]_{i,j}\,| \ : \ j \in [\![1,n]\!]\right\} \end{array} \right.$$

Q9. — Démontrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $||\,AB\,|| \leqslant ||\,A\,||\;||\,B\,||$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $j \in [\![1,n]\!]$. L'inégalité triangulaire livre

$$\sum_{i=1}^n |[AB]_{i,j}| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{k=1}^n [A]_{i,k}\,[B]_{k,j}\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |[A]_{i,k}|\;|[B]_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^n |[A]_{i,k}|}_{\leqslant ||\,A\,||}\;|[B]_{k,j}|$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^n |[AB]_{i,j}| \leqslant ||\,A\,|| \underbrace{\sum_{k=1}^n |[B]_{k,j}|}_{\leqslant ||\,B\,||} \leqslant \underbrace{||\,A\,||\;||\,B\,||}_{\text{indépendant de } j}$$

Par passage au max sur les $j \in [\![1,n]\!]$, il vient $||\,AB\,|| \leqslant ||\,A\,||\;||\,B\,||$.

Soient $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbf{K}_n[X]$, $P \in \mathbf{K}_n[X]$, $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que

$$P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}_n[X]} P \qquad \text{et} \qquad A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} A$$

et on se propose de démontrer

$$P_k(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} P(A) \tag{7}$$

Q10. — Démontrer que $||\,P_k(A_k) - P(A_k)\,|| \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0$.

- La suite $(A_k)_{k\in\mathbf{K}}$ étant convergente, elle est bornée pour la norme $||\cdot||$. Il existe donc une constante $R > 0$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad ||\,A_k\,|| \leqslant R$$

Comme la norme $||\cdot||$ est sous-multiplicative (question 9), nous en déduisons que

$$\forall\, i \in \mathbf{N} \quad \forall\, k \in \mathbf{N} \quad ||\,A_k\,||^i \leqslant R^i \tag{8}$$

- Soit $k \in \mathbf{N}$. Nous calculons, grâce à (8)

$$\|P_k(A_k) - P(A_k)\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} [P_k - P]_i \, A_k^i \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \underbrace{|[P_k - P]_i|}_{\leqslant \|P_k - P\|_\infty} \underbrace{\|A_k^i\|}_{\leqslant R^i} \leqslant \|P_k - P\|_\infty \sum_{i=0}^{n} R^i \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Le théorème d'encadrement nous livre alors $\|P_k(A_k) - P(A_k)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0$.

Q11. — Justifier que l'application

$$\mathrm{Eval}_P \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & P(M) := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} [P]_i \, M^i \end{array} \right.$$

est continue.

- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient $[P(M)]_{i,j}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice M.
- Soit $(M_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} M$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme produit

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad [M_k]_{i,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} [M]_{i,j}$$

  D'après le point précédent, nous en déduisons que

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad [P(M_k)]_{i,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} [P(M)]_{i,j}$$

  puis que $P(M_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} P(M)$.
- Le critère séquentiel de continuité nous livre alors la continuité de l'application Eval_P, pour la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, donc pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (cf. question 4).

Q12. — En déduire le résultat (7).

D'une part, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$0 \leqslant \|P_k(A_k) - P(A)\| \leqslant \|P_k(A_k) - P(A_k)\| + \|P(A_k) - P(A)\|$$

D'autre part $\|P_k(A_k) - P(A_k)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0$ (question 10) et $\|P(A_k) - P(A)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0$ (question 11). Le théorème d'encadrement nous livre alors $\|P_k(A_k) - P(A)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0$, i.e. $P_k(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|} P(A)$.

1.4. Continuité de l'application $\chi\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}_n[X]$

Soient $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} A$ et on se propose de démontrer

$$\chi_{A_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}_n[X]} \chi_A \tag{9}$$

Q13. — Jusitifier que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\widetilde{\chi_{A_k}}(\lambda) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}} \widetilde{\chi_A}(\lambda)$.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Comme

$$\|(\lambda I_n - A_k) - (\lambda I_n - A)\| = \|A - A_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0$$

$$\lambda\, I_n - A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||} \lambda\, I_n - A$$

et $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ est continue, nous savons que

$$\widetilde{\chi_{A_k}}(\lambda) = \det(\lambda\, I_n - A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}} \det(\lambda\, I_n - A) = \widetilde{\chi_A}(\lambda)$$

Q14. — Démontrer que l'application

$$N \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{P}(i)\right| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathbf{K}_n[X]$.

- *Séparation.* Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$ tel que
$$\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left|\widetilde{P}(i)\right|}_{\geqslant 0} =: N(P) = 0$$
Alors, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\widetilde{P}(i) = 0$. Le polynôme P possède $n+1$ racines dans $\mathbf{K}$, soit strictement plus que son degré qui est inférieur ou égal à n. Il s'agit donc du polynôme nul.
- *Homogénéité.* Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{K}_n[X]$.
$$N(\lambda P) = \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{\lambda P}(i)\right| = \sum_{i=0}^{n} |\lambda|\, \left|\widetilde{P}(i)\right| = |\lambda| \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{P}(i)\right| = |\lambda|\, N(P)$$
- *Inégalité triangulaire.* Soient $P, Q \in \mathbf{K}_n[X]$.
$$N(P+Q) = \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{P+Q}(i)\right| = \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{P}(i) + \widetilde{Q}(i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{P}(i)\right| + \left|\widetilde{Q}(i)\right| = \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{P}(i)\right| + \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{Q}(i)\right| = N(P)+N(Q)$$

Q15. — En déduire le résultat (9).

- D'après la question 13, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$
$$\widetilde{\chi_{A_k}}(i) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}} \widetilde{\chi_A}(i)$$
Nous en déduisons que
$$N\left(\chi_{A_k} - \chi_A\right) := \sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{\chi_{A_k}}(i) - \widetilde{\chi_A}(i)\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}$$
i.e. $\chi_{A_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{N} \chi_A$.
- On en déduit que $\chi_{A_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}_n[X]} \chi_A$ pour toute norme sur $\mathbf{K}_n[X]$ (cf. question 1).

Q16. — Énoncer une conséquence pour l'application

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$$

D'après la question 15 et le critère séquentiel de continuité, l'application

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$$

est continue.

Q17. — En déduire que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l'application

$$\mathrm{Coeff}_i \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ M & \longmapsto & \left[\chi_M\right]_i \end{array} \right.$$

est continue.

Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

- L'application

$$\pi_i \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ P & \longmapsto & [P]_i \end{array} \right.$$

  est linéaire entre deux espaces de dimension finie, donc continue (cf. théorème C).
- L'application

$$\mathrm{Coeff}_i = \pi_i \circ \chi$$

  est donc continue, comme composée d'applications continues (cf. question 15).

1.5. Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On définit la partie $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ par :

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ : \ M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{C}\}.$$

Q18. — Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Si tous les coefficients diagonaux de T sont égaux on pose $\mu = 1$ et si au moins deux des coefficients diagonaux de T sont distincts on pose

$$\mu = \min \left\{ |\, [T]_{i,i} - [T]_{j,j} \,| \ : \ (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ et } [T]_{i,i} \neq [T]_{j,j} \right\}$$

On introduit, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$T_k := T + \frac{\mu}{k} \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $T_k \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ et que

$$T_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} T$$

- Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Comme la matrice T_p est triangulaire supérieure

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(T_p) = \{[T_p]_{i,i} \ : \ i \in [\![1, n]\!]\}$$

  Pour que la matrice T_p soit diagonalisable, il suffit donc que les coefficients diagonaux de la matrice T_p soient deux à deux distincts (cf. condition suffisante de diagonalisabilité du cours). Nous allons établir ce résultat, en scindant l'étude en deux parties.
- Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Quitte à échanger i et j, on peut supposer que $i < j$.
  — *Cas où* $[T]_{i,i} = [T]_{j,j}$. Nous calculons

$$[T_p]_{i,i} - [T_p]_{j,j} = [T]_{i,i} + \frac{\mu}{ip} - \left([T]_{j,j} + \frac{\mu}{ip}\right) = \frac{\mu}{p}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right) \neq 0$$

  — *Cas où* $[T]_{i,i} \neq [T]_{j,j}$. D'une part

$$|[T_p]_{i,i} - [T_p]_{j,j}| = \left|[T]_{i,i} - [T]_{j,j} + \frac{\mu}{p}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right)\right| \geqslant |[T]_{i,i} - [T]_{j,j}| - \frac{\mu}{p}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right)$$

D'autre part

$$\underbrace{\frac{\mu}{p}}_{\in\,]0,\mu]}\underbrace{\left(\frac{1}{i}-\underbrace{\frac{1}{j}}_{\in\,]0,1/i[}\right)}_{\in\,]0,1/i[\,\subset\,]0,1[} < \mu \leqslant |[T]_{i,i}-[T]_{j,j}|$$

Nous en déduisons que

$$-\frac{\mu}{p}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{j}\right) > -\,|[T_p]_{i,i}-[T_p]_{j,j}|$$

puis $|[T_p]_{i,i}-[T_p]_{j,j}|>0$.

- Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$.

$$|[T_p]_{i,j}-[T]_{i,j}| = \delta_{i,j}\,\frac{\mu}{ip} \leqslant \frac{\mu}{p} \qquad [\text{indépendant de } (i,j)]$$

Par passage au max sur les couples $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, il vient

$$0 \leqslant ||\,[T_p]-[T]\,||_\infty \leqslant \frac{\mu}{p}$$

Par théorème d'encadrement, nous en déduisons que $T_p \xrightarrow[p\to+\infty]{||\cdot||_\infty} T$.

- On en déduit que $T_p \xrightarrow[p\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} T$ pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (cf. question 1).

Q19. — Soit $P\in\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que, pour tout $D'\in\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$, la matrice $P\,D'\,P^{-1}$ appartient à $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ et justifier que l'application

$$\mathrm{Conj}_P \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & P\,A\,P^{-1}\end{array}\right.$$

est continue.

- Soit $D'\in\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$. Alors il existe $Q\in\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ et $D\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonale telles que $D'=Q\,D\,Q^{-1}$. Nous en déduisons que

$$P\,D'\,P^{-1} = (PQ)\,D\,(PQ)^{-1}$$

Comme $PQ\in\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$, la matrice $P\,D'\,P^{-1}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

- L'application Conj_P est linéaire entre deux espaces de dimension finie. Aussi est-elle continue (cf. théorème C).

Q20. — Démontrer que la partie $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

- D'après le cours, la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Il existe donc $P\in\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ et $T\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ triangulaire supérieure telle que

$$M = \mathrm{Conj}_P(T)$$

- Considérons la suite $(T_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de matrices de $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ construite à la question 18. Alors

$$T_p \xrightarrow[p\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} T$$

- D'après la question 19

$$\underbrace{\mathrm{Conj}_P(T_p)}_{\in\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})} \xrightarrow[p\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \mathrm{Conj}_P(T) = M$$

- Nous conclusons que $\overline{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}=\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ par caractérisation séquentielle de la densité.

1.6. Théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Q21. — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres complexes et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Démontrer que $\chi_D(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.

- Nous savons que $\chi_D = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$.
- D'après la question 8
$$\chi_D(D) = (D - \lambda_1 I_n) \ldots (D - \lambda_n I_n)$$
est une matrice diagonale, comme produit de n matrices diagonale,
- Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le i-ème coefficient diagonal de la matrice $D - \lambda_i I_n$ est nul, tous les coefficients diagonaux de la matrice D sont nuls. Cette matrice diagonale est donc nulle.

Q22. — Soit $A \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.

- Comme $A \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ et D diagonale telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
- Comme les matrices A et D sont semblables, nous savons que $\chi_A = \chi_D$, d'où
$$\chi_A(A) = \chi_D\left(P\,D\,P^{-1}\right)$$
- Nous calculons
$$\chi_D\left(P\,D\,P^{-1}\right) = \sum_{i=0}^{n} \left[\chi_D\right]_i \left(P\,D\,P^{-1}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} \left[\chi_D\right]_i P\,D^i\,P^{-1} = P\left(\sum_{i=0}^{n} \left[\chi_D\right]_i D^i\right) P^{-1} = P\,\chi_D(D)\,P^{-1}$$
- À l'aide de la question 21, nous en déduisons que
$$\chi_A(A) = \chi_D\left(P\,D\,P^{-1}\right) = P \times 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} \times P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$$

Q23. — En déduire le

Théorème (Cayley-Hamilton). — *Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.*

- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que
$$M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} M$$
D'après la question 15
$$\chi_{M_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathbf{K}_n[X]} \chi_M$$
La question 12 nous livre alors
$$\chi_{M_k}(M_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathbf{K}_n[X]} \chi_M(M)$$
Par caractérisation séquentielle de la continuité, l'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & \chi_M(M) \end{array} \right.$$
est continue.
- L'application
$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \end{array} \right.$$
est continue.
- D'après la question 22, les applications f et g coïncident sur $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$.
- D'après la question 20, $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. La continuité des applications f et g implique alors que ces deux applications coïcident sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tout entier.

1.7. Résultant d'un couple de polynômes

Soient A un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $p \geqslant 1$ et B un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $q \geqslant 1$.

Q24. — Démontrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucune racine complexe commune.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nous raisonnons par contraposée et supposons que A et B ont une racine complexe commune, notée λ. Le polynôme $X - \lambda$ divise donc A et B. Ces deux polynômes ne sont donc pas premiers entre eux.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Nous raisonnons de nouveau par contraposée et supposons que A et B ne sont pas premiers entre eux. Il existe donc un polynôme $D \in \mathbf{C}[X]$ qui divise A et B et tel que $\deg(D) \geqslant 1$. Par le théorème de d'Alembert-Gauß, D possède une racine complexe λ, qui est également racine de A et B.

Q25. — Démontrer que l'application

$$\varphi_{A,B} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_{p+q-1}[X] \\ (P,Q) & \longmapsto & AP + QB \end{array} \right.$$

est linéaire.

- *L'application $\varphi_{A,B}$ est bien définie.* En effet, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tels que $\deg(P) \leqslant q-1$ et $\deg(Q) \leqslant p-1$ alors

$$\deg(AP) = \deg(A) + \deg(P) \leqslant p+q-1 \qquad \text{et} \qquad \deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q) \leqslant p+q-1$$

donc

$$\deg(AP+QB) \leqslant \max\{\deg(AP), \deg(QB)\} \leqslant p+q-1$$

- *L'application $\varphi_{A,B}$ est linéaire.* Soient $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2) \in \mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$. Nous calculons

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(\lambda_1 (P_1, Q_1) + \lambda_2 (P_2, Q_2)) &= \varphi_{A,B}(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) \\ &= A(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) + (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) B \\ &= \lambda_1 (A P_1 + Q_1 B) + \lambda_2 (A P_2 + Q B_2) \\ &= \lambda_1 \varphi_{A,B}(P_1, Q_1) + \lambda_2 \varphi_{A,B}(P_2, Q_2) \end{aligned}$$

Nous introduisons les bases $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X]$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbf{C}_{p+q-1}[X]$ définies par

$$\mathcal{B} := \big((1,0), (X,0), \ldots, \big(X^{q-1}, 0\big), (0,1), (0,X), \ldots, \big(0, X^{p-1}\big)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} := \big(1, X, \ldots, X^{p+q-1}\big)$$

Q26. — Expliciter la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_{A,B})$ à l'aide des coefficients $a_0, \ldots, a_p$ de A et des coefficients $b_0, \ldots, b_q$ de B.

Nous avons l'identité

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_{A,B}) = \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbf{C})$$

car, pour tout $i \in [\![0, q-1]\!]$

$$\varphi_{A,B}\left(X^i, 0\right) = A\,X^i = a_0\,X^i + a_1\,X^{i+1} + \ldots + a_p\,X^{p+1}$$

et, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$

$$\varphi_{A,B}\left(0, X^i\right) = X^i\,B = b_0\,X^i + b_1\,X^{i+1} + \ldots + b_q\,X^{q+i}$$

Le résultant du couple (A, B) de polynômes est le nombre complexe

$$\mathrm{Res}(A, B) := \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\left(\varphi_{A,B}\right)\right)$$

Q27. — Démontrer que les polynômes A et B ont une racine complexe commune si et seulement si $\mathrm{Res}(A, B) = 0$.

- Comme $\varphi_{A,B}$ est une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, les quatre assertions suivantes sont équivalentes
  - — $\varphi_{A,B}$ est injective ;
  - — $\varphi_{A,B}$ est surjective ;
  - — $\varphi_{A,B}$ est bijective ;
  - — $\mathrm{Res}(A, B) \neq 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nous raisonnons par contraposée et supposons que $\mathrm{Res}(A, B) \neq 0$. Comme l'application $\varphi_{A,B}$ est surjective, il existe $(P, Q) \in \mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X]$ tel que

$$AP + BQ = 1$$

D'après le théorème de Bézout, les polynômes A et B sont premiers entre eux. Ils n'ont donc aucune racine complexe commune (cf. question 24).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Nous raisonnons par contraposée et supposons que A et B n'ont pas de racine complexe commune. D'après la question 24, ils sont donc premiers entre eux. Soit $(P, Q) \in \mathrm{Ker}\left(\varphi_{A,B}\right)$. Alors

$$AP = -QB$$

Comme A est premier avec eux, le polynôme A de degré p divise le polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p-1$ (lemme de Gauß). Nous en déduisons que le polynôme Q est nul, puis

$$AP = 0$$

Comme $A \neq 0$ et $\mathbf{C}[X]$ est un anneau intègre, $P = 0$. L'application $\varphi_{A,B}$ est donc injective et $\mathrm{Res}(A, B) \neq 0$.

Le résultant de deux polynômes A et B de $\mathbf{C}[X]$, qui est un polynôme en les coefficients de A et B (cf. question 26), permet de déterminer si deux polynômes ont une racine complexe commune, sans déterminer ni les racines de A, ni les racines de B.

Q28. — On introduit les deux parties

$$\Delta_n := \{P \in \mathbf{C}_n[X] \ : \ \deg(P) = n\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}_n := \{P \in \Delta_n \ : \ P \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbf{C}\}$$

de $\mathbf{C}_n[X]$. Démontrer que $\mathcal{U}_n$ est un ouvert relatif de Δ_n.

- Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. D'après la caractérisation de la multiplicité d'une racine via les polynômes dérivés itérés, P possède une racine de multiplicité au moins 2 dans $\mathbf{C}$, si et seulement si P et P' ont une racine complexe commune, si et seulement si P et P' ne sont pas premiers entre eux (cf. question 24). Nous en déduisons, grâce à la question 27 que

$$P \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Res}(P, P') \neq 0$$

- D'après la question 26 et la nature polynomiale du déterminant, l'application

$$h \left| \begin{array}{ccc} \Delta_n & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ P & \longmapsto & \mathrm{Res}(P, P') \end{array} \right.$$

est polynomiale en les coefficients de P, donc continue.
- Des deux points précédents, nous déduisons que

$$\mathcal{U}_n = h^{-1}(\mathbf{C}^*)$$

est un ouvert relatif de Δ_n, comme image réciproque de l'ouvert $\mathbf{C}^*$ de $\mathbf{C}$ par l'application continue h.

1.8. Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Q29. — Démontrer que

$$\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ : \ \chi_M \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbf{C}\}$$

est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

- Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est de degré n. L'application

$$\chi^{|\,\Delta_n} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \Delta_n \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$$

est donc bien définie. D'après la question 16, l'application $\chi^{|\,\Delta_n}$ est continue.
- D'après la question 28

$$\mathcal{O} = \left(\chi^{|\,\Delta_n}\right)^{-1}(\mathcal{U}_n)$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, comme image réciproque de l'ouvert relatif $\mathcal{U}_n$ de Δ_n par une application continue $\chi^{|\,\Delta_n}$.

Q30. — En déduire l'inclusion $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$.

- Si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ possède un polynôme caractéristique scindé à racines simples dans $\mathbf{C}[X]$, alors la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Ainsi

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$$

- Comme $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$ est le plus grand ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ contenu dans $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$, nous déduisons de la question 29 et du point précédent que

$$\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$$

Considérons une matrice $A \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$. Il existe donc un entier $r \geqslant 1$, des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ deux à deux distincts et des nombres entiers $m_1 \geqslant 2$, $m_2, \ldots, m_r \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Q31. — En introduisant l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associé à A, démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$A = P \underbrace{\mathrm{diag}\left(\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_r I_{m_r}\right)}_{=:D} P^{-1}$$

- Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et φ_A l'unique endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi_A) = A$.
- Comme la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, l'endomorphisme φ_A est diagonalisable. Ainsi

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) = E_{\lambda_1}(\varphi_A) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}(\varphi_A)$$

et

$$\forall\, i \in [\![1, r]\!] \quad \dim\left(E_{\lambda_i}(\varphi_A)\right) = \mathrm{mult}\left(\chi_{\varphi_A}, \lambda_i\right) = \mathrm{mult}\left(\chi_A, \lambda_i\right) = m_i \qquad \left[\chi_{\varphi_A} = \chi_A\right]$$

- Si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition de E en somme directe ci-dessus alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = \mathrm{diag}\left(\lambda_1\, I_{m_1}, \ldots, \lambda_r\, I_{m_r}\right)$$

- D'après le théorème de changement de changement de bases

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi_A)}_{=A} = P \qquad \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)}_{=\mathrm{diag}\left(\lambda_1\, I_{m_1}, \ldots, \lambda_r\, I_{m_r}\right)} \qquad P^{-1}$$

où $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.

Q32. — Démontrer que, pour tout $\rho > 0$, la boule ouverte

$$B_\infty(D, \rho) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ : \ ||\, M - D\,||_\infty < \rho\}$$

contient une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

Nous observons que

$$M := D + \frac{\rho}{2}\, E_{1,2} \in B_\infty(D, \rho)$$

La matrice M est triangulaire supérieure et possède les mêmes coefficients diagonaux que la matrice D, donc

$$\chi_M = \chi_D = (X - \lambda_1)^{m_1}\, (X - \lambda_2)^{m_2}\, \ldots\, (X - \lambda_r)^{m_r}$$

Comme

$$M - \lambda_1\, I_n = D + \frac{\rho}{2}\, E_{1,2} - \lambda_1\, I_n = \mathrm{diag}\left(0\, I_{m_1}, (\lambda_2 - \lambda_1)\, I_{m_2}, \ldots, (\lambda_r - \lambda_1)\, I_{m_r}\right) + \frac{\rho}{2}\, E_{1,2}$$

nous obtenons

$$\mathrm{rg}\left(M - \lambda_1\, I_n\right) = 1 + m_2 + \ldots + m_r \qquad [\text{on rappelle que } m_1 \geqslant 2]$$

D'après la formule du rang

$$\dim\left(E_{\lambda_1}(M)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(M - \lambda_1\, I_n\right)\right) = n - (1 + m_2 + \ldots + m_r) = m_1 - 1 < m_1 = \mathrm{mult}\left(\chi_M, \lambda_1\right)$$

La matrice M n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q33. — En déduire que $A \notin \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $A \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$. D'après la question 19

$$\left(\mathrm{Conj}_P\right)^{-1}\left(\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}\right)$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ inclus dans $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$. Comme $D \in \left(\mathrm{Conj}_P\right)^{-1}\left(\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}\right)$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$B_\infty(D, \rho) \subset \left(\mathrm{Conj}_P\right)^{-1}\left(\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}\right) \subset \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$$

ce qui contredit le résultat de la question 32.

Q34. — Conclure quant à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables sur $\mathbf{C}$.

- Nous avons déjà établi que $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$ (cf. question 30).
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{O}$, alors $A \notin \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$ (cf. question 33). Nous en déduisons que

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{O} \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \setminus \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$$

puis

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}} \subset \mathcal{O}$$

- Nous en déduisons que $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}} = \mathcal{O}$.

1.9. Adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Q35. — Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, de degré n et unitaire. Démontrer que

$$P \text{ est scindé sur } \mathbf{R} \quad \iff \quad (\forall z \in \mathbf{C} \quad |\mathrm{Im}\,(z)|^n \leqslant |P(z)|\,)$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$$

Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |z - \lambda_i| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,(z) - \lambda_i)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2} \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)| \geqslant 0$$

On en déduit que

$$|P(z)| = |z - \lambda_1| \ldots |z - \lambda_n| \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^n$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|\mathrm{Im}\,(z)|^n \leqslant |P(z)|$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, il existe des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$0 = |P(\lambda_i)| \geqslant |\mathrm{Im}\,(\lambda_i)|^n \geqslant 0$$

donc λ_i est réel. Nous en déduisons que le polynôme P est scindé dans $\mathbf{R}[X]$.

Q36. — En déduire que l'ensemble

$$\mathcal{T}'_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ M \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{R}\}\,.$$

est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Soit $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$ qui converge vers une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Nous démontrons que $M \in \mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$ (cf. caractérisation séquentielle des fermés).
- Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, χ_{M_k} est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ et donc

$$|\mathrm{Im}\,(z)|^n \leqslant \left|\chi_{M_k}(z)\right|$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, il vient, grâce à la question 13

$$|\mathrm{Im}\,(z)|^n \leqslant \left|\chi_{M}(z)\right|$$

- Grâce à la question 35, nous savons que χ_M est scindé dans $\mathbf{R}[X]$. La matrice M est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q37. — Déterminer alors l'adhérence de la partie

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\}\,.$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Comme $\mathcal{D}'_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (question 36), nous savons
$$\overline{\mathcal{D}'_n(\mathbf{R})} \subset \mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$$
- En adaptant les arguments de la partie 1.5, on démontre que toute matrice de $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{D}'_n(\mathbf{R})$. Ainsi
$$\mathcal{T}'_n(\mathbf{R}) \subset \overline{\mathcal{D}'_n(\mathbf{R})} \qquad \text{[caractérisation séquentielle de l'adhérence]}$$
- Nous en déduisons que $\overline{\mathcal{D}'_n(\mathbf{R})} = \mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$.

1.10. Propriétés topologiques l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Q38. — Démontrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

D'après le cours, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente si et seulement si $\chi_M = X^n$. Donc
$$\mathcal{N} = \chi^{-1}(\{X^n\})$$
est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, comme image réciproque de la partie fermée $\{X^n\}$ de $\mathbf{K}_n[X]$ par l'application continue
$$\chi\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}_n[X] \qquad \text{[cf. question 16]}$$

Q39. — La partie $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est-elle compacte ?

Soit $k \in \mathbf{N}$. Posons
$$N_k = k\, E_{1,2}$$
Comme $\chi_{N_k} = X^n$, $N_k \in \mathcal{N}$. De plus
$$||\, N_k \,||_\infty = k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$
La partie $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'est donc pas bornée, donc *a fortiori* pas compacte.

Q40. — Déterminer l'intérieur de la partie $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Nous démontrons que $\overset{\circ}{\mathcal{N}} = \varnothing$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $A \in \overset{\circ}{\mathcal{N}}$. Comme A est une matrice nilpotente, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure stricte telles que
$$A = P\,T\,P^{-1}$$
Comme une matrice conjuguée à une matrice nilpotente est nilpotente et l'application $\mathrm{Conj}_{P^{-1}}$ est continue (cf. question 19)
$$(\mathrm{Conj}_P)^{-1}\left(\overset{\circ}{\mathcal{N}}\right)$$
est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ inclus dans $\mathcal{N}$. Comme $T \in (\mathrm{Conj}_P)^{-1}\left(\overset{\circ}{\mathcal{N}}\right)$, il existe $\rho > 0$ tel que
$$B_\infty(T, \rho) \subset (\mathrm{Conj}_P)^{-1}\left(\overset{\circ}{\mathcal{N}}\right) \subset \mathcal{N}$$
La matrice
$$M = T + \frac{\rho}{2}\, E_{1,1} \qquad \text{[matrice triangulaire supérieure]}$$

appartient à $B_\infty(T, \rho)$, mais n'est pas nilpotente puisque

$$\chi_M = X^{n-1}\left(X - \frac{\rho}{2}\right) \neq X^n$$

Contradiction.

Q41. — Démontrer que $\mathcal{N}$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Nous démontrons que la partie $\mathcal{N}$ est étoilée en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$, ce qui livrera sa connexité par arcs.
Soit $N \in \mathcal{N}$. Comme, pour tout $t \in [0,1]$

$$\left(t\,N + (1-t)\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\right)^n = t^n\,N^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$$

le segment $\left[N, 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\right]$ est inclus dans $\mathcal{N}$.

2. Théorème de Riesz sur la boule unité fermée d'un K-espace vectoriel

Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On rappelle que la distance d'un vecteur x de E à une partie non vide A de E est définie par

$$\mathrm{d}(x, A) := \inf\{||\,x - a\,|| \ : \ a \in A\} \in \mathbf{R}_+$$

Q42. — Soit x un vecteur de E. Démontrer que

$$\exists\, x_F \in F \quad ||\,x - x_F\,|| = \mathrm{d}(x, F) \qquad \text{[la distance de } x \text{ à } F \text{ est atteinte]}$$

et discuter l'unicité de x_F.

- D'après la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de F telle que
$$||\,x - x_n\,|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{d}(x, F) \tag{10}$$
- La suite de nombres réels $(||\,x - x_n\,||)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente donc bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad ||\,x - x_n\,|| \leqslant M$$
En appliquant l'inégalité triangulaire pour la norme $||\cdot||$, nous en déduisons que
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad ||\,x_n\,|| \leqslant ||\,x\,|| + M$$
- Notons $||\cdot||_F$ la norme sur F induite par la norme $||\cdot||$ sur E. D'après ce qui précède, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de vecteurs de
$$K := \{y \in F \ : \ ||\,y\,||_F \leqslant ||\,x\,|| + M\} \qquad \text{[boule fermée de } (F, ||\cdot||_F)\text{]}$$
qui est une partie fermée et bornée de l'espace vectoriel normé de dimension finie $(F, ||\cdot||_F)$. D'après le théorème B, K est une partie compacte de F. Il existe donc une application $\varphi \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $x_F \in F$ tels que
$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_F$$
- La norme $||\cdot||$ étant 1-lipschitzienne, elle est continue. Ainsi
$$\left|\left|\,x - x_{\varphi(n)}\,\right|\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||\,x - x_F\,|| \tag{11}$$
Des résultats (10) et (11), on déduit
$$||\,x - x_F\,|| = \mathrm{d}(x, F)$$

- Si E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $||\cdot||$ est la norme associée, alors nous savons que
$$\exists!\, x_F \in F \quad ||\, x - x_F \,|| = \mathrm{d}(x, F)$$
Ce vecteur x_F de F est le projeté orthogonal du vecteur x sur le sous-espace de dimension finie F.
- Cependant, il n'y a pas toujours unicité du vecteur x_F. En effet, si l'on considère $E = \mathbf{R}^2$ muni de la norme $||\cdot|| := ||\cdot||_\infty$, $F := \mathrm{Vect}\,((1,0))$ et $x := (0,1)$, alors
$$\forall\, x_F \in [-1,1] \times \{0\} \quad ||\, x - x_F \,|| = \mathrm{d}(x, F) = 1$$

Q43. — On suppose que $F \neq E$. Déduire de la question 42 qu'il existe un vecteur u de E tel que
$$||\, u \,|| = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(u, F) = 1$$

- Considérons un vecteur $x \in E \setminus F$. D'après la question 42, il existe $x_F \in F$ tel que
$$\mathrm{d}(x, F) = ||\, x - x_F \,|| > 0$$
- Posons $u := \dfrac{x - x_F}{||\, x - x_F \,||}$, de sorte que $||\, u \,|| = 1$.
- Soit $a \in F$. Comme
$$||\, u - a \,|| = \left|\left| \frac{x - x_F}{||\, x - x_F \,||} - a \right|\right| = \frac{1}{||\, x - x_F \,||} \left|\left| x - \underbrace{(x_F + ||\, x - x_F \,||\, a)}_{\in F} \right|\right| \geqslant \frac{1}{||\, x - x_F \,||}\, \mathrm{d}(x, F) = 1$$
il vient, en passant à l'inf sur tous les $a \in F$, $\mathrm{d}(u, F) \geqslant 1$. Comme $0_E \in F$
$$\mathrm{d}(u, F) \leqslant ||\, u - 0_E \,|| = ||\, u \,|| = 1$$
Ainsi $\mathrm{d}(u, F) = 1$.

On suppose désormais que le $\mathbf{K}$-espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

Q44. — Justifier qu'il existe une famille libre $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E.

- Comme E n'est pas de dimension finie, il existe un vecteur non nul e_0 dans E. La famille (e_0) est donc libre.
- Soient $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits des vecteurs $e_0, \dots, e_n$ de E tels que la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est libre. Comme E n'est pas de dimension finie
$$E \neq \mathrm{Vect}\,(e_0, \dots, e_n)$$
Soit $e_{n+1} \in E \setminus \mathrm{Vect}\,(e_0, \dots, e_n)$. On vérifie alors que la famille $(e_0, \dots, e_n, e_{n+1})$ est libre (cf. lemme clé pour le théorème de la base incomplète).
- Nous construisons ainsi par récurrence une famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E qui est libre, puisque toute sous-famille finie de cette famille est libre.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n := \mathrm{Vect}\,(e_0, \dots, e_n)$.

Q45. — Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que

(P1) $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n \in F_n$

(P2) $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad ||\, u_n \,|| = 1$

(P3) $\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \mathrm{d}\,(u_n, F_{n-1}) = 1$

- Soit u_0 un vecteur de F_0, de norme 1

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On applique le résultat de la question 43 avec $E \leftarrow F_n$ et $F \leftarrow F_{n-1}$. Il existe donc

$$u_n \in F_n \text{ tel que } \|\, u_n \,\| = 1 \text{ et } \mathrm{d}\,(u_n, F_{n-1}) = 1$$

Q46. — En déduire que, pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $p \neq q$, $\|\, u_p - u_q \,\| \geqslant 1$.

Soient p et q des entiers naturels distincts. On peut supposer que $p < q$. Comme

$$u_p \in F_p \subset \ldots \subset F_{q-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\,(u_q, F_{q-1}) = 1$$

il vient

$$\|\, u_q - u_p \,\| \geqslant \mathrm{d}\,(u_q, F_{q-1}) = 1$$

Q47. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $u \in E$ tel que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$$

D'après la question 46

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \left\|\, u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)} \,\right\| \geqslant 1$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité large, nous obtenons, grâce à la continuité de la norme $\|\cdot\|$

$$1 \leqslant \|\, u - u \,\| = 0$$

Contradiction.

Q48. — Démontrer enfin le

Théorème (Riesz). — *Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si E est $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, alors sa boule unité fermée est compacte, d'après le théorème B.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Nous raisonnons par contraposition et supposons que E n'est pas un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Nous avons construit une suite de vecteurs de $\overline{B(0_E,1)}$ qui ne possède aucune valeur d'adhérence dans E, donc *a fortiori* dans $\overline{B(0_E,1)}$ (cf. questions 44—47). La boule unité fermée de E n'est donc pas compacte.