Devoir maison n°4

pour le lundi 4 novembre

Préambule. — Les élèves de MPI résolvent les questions Q1 – Q37, ceux de MPI* toutes les questions. Il s'agit d'un TRAVAIL PERSONNEL, à réaliser sans l'aide de camarade ou d'internet. Vous attacherez la plus grande importance à la CLARTÉ, à la PRÉCISION et à la CONCISION de la RÉDACTION. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

1. Topologie matricielle et théorème de Cayley-Hamilton

Notation. — La lettre **K** désigne le corps **R** ou **C** et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1.1. Topologie des K-espaces vectoriels de dimension finie

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et

$$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i & \longmapsto & \max\{|x_i| \ :\ i \in [\![1, n]\!]\} \end{array} \right.$$

Dans l'exercice 9 de la feuille d'exercices « Espaces vectoriels normés 2 », nous avons démontré le

> **Théorème A.** — *Soit N une norme sur le **K**-espace vectoriel E de dimension finie. Alors*
>
> $$\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall\, x \in E \quad N(x) \leqslant \alpha\, N_\infty(x) \quad \textit{et} \quad N_\infty(x) \leqslant \beta\, N(x)$$

Q1. — Soient N_1, N_2 deux normes sur E, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E et x un vecteur de E. Démontrer l'équivalence

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} x \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} x$$

D'après la question 1, pour étudier la convergence d'une suite de vecteurs de E, on peut placer sur E la norme que l'on souhaite. Cette souplesse nous permet de considérer une norme idoine pour la problématique considérée. En outre, la propriété établie à la question 1 a pour conséquence que les concepts suivants ne dépendent pas de la norme dont le **K**-espace vectoriel de dimension finie E est équipé.

- partie fermée (cf. caractérisation séquentielle) ;
- partie ouverte (complémentaire d'une partie fermée) ;
- adhérence d'une partie (définie par une propriété de minimalité mettant en jeu des parties fermées) ;
- intérieur d'une partie (défini par une propriété de minimalité mettant en jeu des parties ouvertes) ;
- partie compacte (définie à l'aide de la propriété de Bolzano-Weierstraß).

Dans la question suivante, nous étalissons que la notion de « partie bornée » ne dépend pas non plus du choix de la norme sur E.

Q2. — Soient N_1, N_2 deux normes sur E et A une partie de E. Démontrer que la partie A est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2.

Q3. — En considérant la norme N_∞ sur le **K**-espace vectoriel de dimension finie E, démontrer le

> **Théorème B.** — *Soit A une partie fermée et bornée du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors A est compacte.*

Q4. — Soient F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Soient $||\cdot||_E$, N_E deux normes sur E et $||\cdot||_F$, N_F deux normes sur F. Démontrer l'équivalence

$$f\colon\ (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F) \text{ est continue} \quad \Longleftrightarrow \quad f\colon\ (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F) \text{ est continue}$$

Pour étudier la continuité de l'application $f\colon E \longrightarrow F$, on peut placer sur E et F les normes que l'on souhaite. Cette souplesse nous permet de considérer des normes idoines pour la problématique considérée.

Q5. — Soient F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme N_F et $f\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire. Démontrer qu'il existe une constante réelle $k > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E \quad N_F\left(f(x)\right) \leqslant k\, N_\infty(x)$$

et en déduire le

> **Théorème C.** — *Toute application linéaire du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vers le $\mathbf{K}$-espace vectoriel F de dimension finie est continue.*

1.2. Polynômes de matrices

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ fixée. Pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, on définit la matrice $P(A)$ par

$$P(A) := \sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i\, A^i$$

Par exemple, si $P = X^3 - 5X + 2$, $P(A) = A^3 - 5\,A + 2\,I_n$.

Q6. — Démontrer que l'application

$$\mathrm{Eval}_A \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) := \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i\, A^i \end{array}\right.$$

est linéaire.

Q7. — Démontrer qu'il existe un polynôme non nul P tel que $\deg(P) \leqslant n^2$ et $P(A) = 0$.

Q8. — Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $(P\,Q)(A) = P(A)\,Q(A)$.

1.3. Un résultat de convergence pour une suite de polynômes de matrices

On équipe $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des normes

$$||\cdot||_\infty \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ Q & \longmapsto & \max\left\{ |\,[Q]_i\,| \ :\ i \in [\![0, n]\!] \right\} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad ||\cdot|| \left|\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ M & \longmapsto & \max\left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\,[M]_{i,j}\,| \ :\ j \in [\![1, n]\!] \right\} \end{array}\right.$$

Q9. — Démontrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $||\,AB\,|| \leqslant ||\,A\,||\ ||\,B\,||$.

Soient $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbf{K}_n[X]$, $P \in \mathbf{K}_n[X]$, $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que

$$P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}_n[X]} P \qquad \text{et} \qquad A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} A$$

et on se propose de démontrer

$$P_k(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} P(A) \tag{1}$$

Q10. — Démontrer que $||\, P_k(A_k) - P(A_k)\, || \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} 0$.

Q11. — Justifier que l'application

$$\mathrm{Eval}_P \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & P(M) := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} [P]_i\, M^i \end{array} \right.$$

est continue.

Q12. — En déduire le résultat (1).

1.4. Continuité de l'application $\chi\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}_n[X]$

Soient $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} A$ et on se propose de démontrer

$$\chi_{A_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}_n[X]} \chi_A \tag{2}$$

Q13. — Jusitifier que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\widetilde{\chi_{A_k}}(\lambda) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}} \widetilde{\chi_A}(\lambda)$.

Q14. — Démontrer que l'application

$$N \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left|\widetilde{P}(i)\right| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathbf{K}_n[X]$.

Q15. — En déduire le résultat (2).

Q16. — Énoncer une conséquence pour l'application

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$$

Q17. — En déduire que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, l'application

$$\mathrm{Coeff}_i \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ M & \longmapsto & \left[\chi_M\right]_i \end{array} \right.$$

est continue.

1.5. Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On définit la partie $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ par :

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ : \ M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{C}\}\,.$$

Q18. — Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Si tous les coefficients diagonaux de T sont égaux on pose $\mu = 1$ et si au moins deux des coefficients diagonaux de T sont distincts on pose

$$\mu = \min\left\{|\, [T]_{i,i} - [T]_{j,j}\,| \ : \ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } [T]_{i,i} \neq [T]_{j,j}\right\}$$

On introduit, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$T_k := T + \frac{\mu}{k}\ \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$$

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $T_k \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ et que

$$T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} T$$

Q19. — Soit $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que, pour tout $D' \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$, la matrice $P\,D'\,P^{-1}$ appartient à $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ et justifier que l'application

$$\mathrm{Conj}_P \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & P\,A\,P^{-1} \end{array} \right.$$

est continue.

Q20. — Démontrer que la partie $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.

1.6. Théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Q21. — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres complexes et $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Démontrer que $\chi_D(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.

Q22. — Soit $A \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.

Q23. — En déduire le

Théorème (Cayley-Hamilton). — *Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.*

1.7. Résultant d'un couple de polynômes

Soient A un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $p \geqslant 1$ et B un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $q \geqslant 1$.

Q24. — Démontrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucune racine complexe commune.

Q25. — Démontrer que l'application

$$\varphi_{A,B} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_{p+q-1}[X] \\ (P, Q) & \longmapsto & AP + QB \end{array} \right.$$

est linéaire.

Nous introduisons les bases $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X]$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbf{C}_{p+q-1}[X]$ définies par

$$\mathcal{B} := \big((1,0), (X,0), \ldots, \big(X^{q-1}, 0\big), (0,1), (0,X), \ldots, \big(0, X^{p-1}\big)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} := \big(1, X, \ldots, X^{p+q-1}\big)$$

Q26. — Expliciter la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(\varphi_{A,B})$ à l'aide des coefficients $a_0, \ldots, a_p$ de A et des coefficients $b_0, \ldots, b_q$ de B.

Le résultant du couple (A, B) de polynômes est le nombre complexe

$$\mathrm{Res}(A, B) := \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(\varphi_{A,B})\right)$$

Q27. — Démontrer que les polynômes A et B ont une racine complexe commune si et seulement si $\mathrm{Res}(A, B) = 0$.

Q28. — On introduit les deux parties

$$\Delta_n := \{P \in \mathbf{C}_n[X] \ : \ \deg(P) = n\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}_n := \{P \in \Delta_n \ : \ P \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbf{C}\}$$

de $\mathbf{C}_n[X]$. Démontrer que $\mathcal{U}_n$ est un ouvert relatif de Δ_n.

1.8. Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Q29. — Démontrer que

$$\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ : \ \chi_M \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbf{C}\}$$

est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q30. — En déduire l'inclusion $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$.

Considérons une matrice $A \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$. Il existe donc un entier $r \geqslant 1$, des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts et des nombres entiers $m_1 \geqslant 2$, $m_2, \dots, m_r \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Q31. — En introduisant l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associé à A, démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$A = P \underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_r I_{m_r})}_{=:D} P^{-1}$$

Q32. — Démontrer que, pour tout $\rho > 0$, la boule ouverte

$$B_\infty(D, \rho) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ : \ || M - D ||_\infty < \rho\}$$

contient une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

Q33. — En déduire que $A \notin \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}}$.

Q34. — Conclure quant à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables sur $\mathbf{C}$.

1.9. Adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Q35. — Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, de degré n et unitaire. Démontrer que

$$P \text{ est scindé sur } \mathbf{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall z \in \mathbf{C} \quad |\mathrm{Im}\,(z)|^n \leqslant |P(z)|\,)$$

Q36. — En déduire que l'ensemble

$$\mathcal{T}'_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ M \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{R}\}\,.$$

est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q37. — Déterminer alors l'adhérence de la partie

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\}\,.$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1.10. Propriétés topologiques l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Q38. — Démontrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Q39. — La partie $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est-elle compacte ?

Q40. — Déterminer l'intérieur de la partie $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Q41. — Démontrer que $\mathcal{N}$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

2. Théorème de Riesz sur la boule unité fermée d'un K-espace vectoriel

Soit $(E, ||\cdot||)$ un **K**-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On rappelle que la distance d'un vecteur x de E à une partie non vide A de E est définie par

$$\mathrm{d}(x, A) := \inf \{||\, x - a \,|| \ : \ a \in A\} \in \mathbf{R}_+$$

Q42. — Soit x un vecteur de E. Démontrer que

$$\exists\, x_F \in F \quad ||\, x - x_F \,|| = \mathrm{d}(x, F) \qquad \text{[la distance de } x \text{ à } F \text{ est atteinte]}$$

et discuter l'unicité de x_F.

Q43. — On suppose que $F \neq E$. Déduire de la question 42 qu'il existe un vecteur u de E tel que

$$||\, u \,|| = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(u, F) = 1$$

On suppose désormais que le **K**-espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

Q44. — Justifier qu'il existe une famille libre $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n := \mathrm{Vect}\,(e_0, \ldots, e_n)$.

Q45. — Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que
(P1) $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n \in F_n$
(P2) $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad ||\, u_n \,|| = 1$
(P3) $\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \mathrm{d}\,(u_n, F_{n-1}) = 1$

Q46. — En déduire que, pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $p \neq q$, $||\, u_p - u_q \,|| \geqslant 1$.

Q47. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence.

Q48. — Démontrer enfin le

> **Théorème (Riesz).** — *Un* **K***-espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*