# Un corrigé du devoir maison n°3

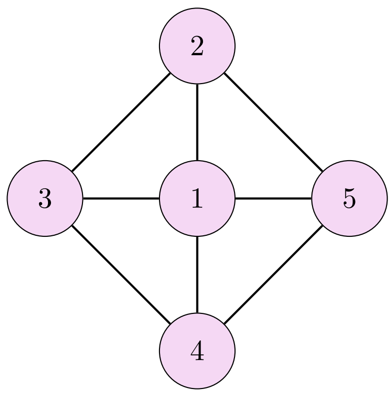
d'après Christophe Devulder



*Préambule.* — Vous attacherez la plus grande importance à la CLARTÉ, à la PRÉCISION et à la CONCISION de la RÉDACTION. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

## 1. Problématique

*Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :*




*Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant $k$ ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro $i$ ($1 \leqslant i \leqslant 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle $i$ et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle $i$. On admet que l'on peut introduire, pour tout $k$ entier naturel, une variable aléatoire $S_k$ donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant $k$. À titre d'exemple, on aura donc*

$$\forall\, k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

*Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice-colonne*

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \\ \mathbf{P}(S_k = 4) \\ \mathbf{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

## 2. Premiers pas

**Q1.** — Démontrer que $\mathbf{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(\mathbf{P}(S_k = i),\ i = 1, \ldots, 5)$.

$(S_k = i)_{1 \leq i \leq 5}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(S_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = i)\mathbf{P}(S_k = i)$$

Il reste à remarquer que les salles $2, 3, 4, 5$ mènent toutes à 1 avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ pour en déduire

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{5} \mathbf{P}(S_k = i)}$$

**Q2.** — Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout $k$ entier naturel.

On peut procéder de même pour expliciter $\mathbf{P}(S_{k+1} = j)$ pour $j = 2, 3, 4, 5$ et obtenir

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 2) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 3) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 5)$$

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 3) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 4)$$

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 4) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 3) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 5)$$

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 5) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k = 4)$$

Ce qui se traduit matriciellement par

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ X_{k+1} = BX_k \text{ avec } \ B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}$$

**Q3.** — En observant les colonnes de la matrice $B$, montrer que le réel 1 est valeur propre de $B^\top$ et expliciter un vecteur propre associé.

La somme des éléments de chaque colonne de $B$, et donc de chaque ligne de $B^\top$, vaut 1. Ceci signifie que

$$B^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore que

$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(B^\top) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B^\top - I_5)}$$

*On suppose que la loi de la variable $S_0$ est donnée par*

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

**Q4.** — Montrer qu'alors les variables aléatoires $S_k$ ont toutes la même loi.

Un calcul immédiat donne $BX_0 = X_0$ et, par récurrence immédiate, $X_k = B^k X_0 = X_0$ pour tout entier $k$. $X_k$ donnant la loi de $S_k$,

$$\boxed{\text{toutes les } S_k \text{ ont même loi dans ce cas}}$$

**Q5.** — Est-ce que $S_0$ et $S_1$ sont indépendantes ?

Si le rat est dans une pièce, il la quitte au temps suivant. Ainsi, $\mathbf{P}(S_0 = 1 \cap S_1 = 1) = 0$.
Or $\mathbf{P}(S_0 = 1)\mathbf{P}(S_1 = 1) = \frac{1}{16} \neq 0$. Ainsi

$$\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

## 3. Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

*Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $||\cdot||$ sur $E$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,*

$$||\, u(x)\, || \leqslant ||\, x\, ||\,.$$

*Pour tout entier naturel $k$ non nul, on considère l'endomorphisme*

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

*où $I_E$ représente l'endomorphisme identité de $E$.*

**Q6.** — Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Ainsi

$$\boxed{r_k(x) = x \xrightarrow[k\to+\infty]{} x}$$

**Q7.** — Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Il existe $y$ tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. Ainsi, pour tout $\ell \in \mathbf{N}$

$$u^l(x) = u^{l+1}(x) - u^l(x)$$

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Nous calculons

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}(u^{l+1}(x) - u^l(x)) = \frac{1}{k}(u^k(x) - x) \qquad \text{[télescopage]}$$

pour en déduire que

$$\|r_k(x)\| \leqslant \frac{1}{k}(\|u^k(x)\| + \|x\|)$$

Or, $u$ contractant les normes, $\|u^k(x)\| \leq \|x\|$ et donc

$$\|r_k(x)\| \leqslant \frac{2\,\|x\|}{k}$$

Le théorème d'encadrement livre alors

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathrm{Im}(u - I_E),\ r_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_E}$$

**Q8.** — En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.

Par théorème du rang

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u - I_E)) + \dim(\mathrm{Im}(u - I_E))$$

De plus, si $x \in \mathrm{Im}(u - I_E) \cap \mathrm{Ker}(u - I_E)$, la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbf{N}^*}$ est simultanément de limite $x$ et $0_E$. Donc $x = 0_E$ par unicité de la limite. L'intersection est donc réduite à $0_E$ et la somme est directe. Finalement

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)}$$

**Q9.** — Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de $E$, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p\colon E \longrightarrow E$ ainsi définie.

Soit $x \in E$. Il existe $y \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. On a alors

$$r_k(x) = r^k(y) + r^k(z) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y =: p(x)$$

L'application

$$p \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & p(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) \end{array} \right.$$

est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - I_E)$ de direction $\mathrm{Im}(u - I_E)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in E,\ r_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} p(x) \text{ avec } p \text{ la projection sur } \mathrm{Ker}(u - I_E) \text{ de direction } \mathrm{Im}(u - I_E)}$$

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|\, AX \,\|_\infty \leqslant \|\, X \,\|_\infty$. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on considère la matrice*

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \qquad (2)$$

*où $I_n$ est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*

**Q10.** — Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vers une matrice $P$, telle que $P^2 = P$.

Les mêmes calculs que ceux menés ci-dessus montrent que

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad R_k X \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} PX$$

où $P$ est la matrice, dans la base canonique, de la projection de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction

$\operatorname{Im}(A-I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$). Appliquons ceci aux éléments $E_1,\dots,E_n$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ :

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!] \quad \|R_k E_j - P E_j\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. La $i$-ème composante du vecteur colonne $R_k E_j - P E_j$ ($j$-ème colonne de la matrice $R_k - P$) égale

$$[R_k - P]_{i,j} = [R_k]_{i,j} - [P]_{i,j}$$

Ainsi

$$\forall\, k \in \mathbf{N}^* \quad |[R_k]_{i,j} - [P]_{i,j}| \leqslant |R_k E_j - P E_j\|_\infty$$

En appliquant le théorème d'encadrement nous obtenons

$$[R_k]_{i,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} [P]_{i,j}$$

On a donc convergence de la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ vers la matrice $P$ coefficient par coefficient, ce qui équivaut à la convergence pour la norme $||\cdot||_\infty$. Enfin, $P$ est la matrice d'une projection donc $P^2 = P$.

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ telle que } R_k \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_\infty} P \text{ et } P^2 = P}$$

## 4. Matrices stochastiques

*On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.*

**Définition 1** *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

**Définition 2** *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

*Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients $\lambda_i$ sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.*

**Q11.** — Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

On a

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad [AU]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,[U]_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

On en déduit que

$$\boxed{(4) \text{ équivaut à } AU = U}$$

**Q12.** — En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre $n$) est stable pour le produit matriciel.

Soient $A, B$ stochastiques.

- D'après les formules du produit matriciel, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes positifs ou nuls).
- En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que $C$

vérifie (4).

La matrice AB est donc stochastique.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est stable par multiplication.}}$$

**Q13.** — Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$.

- Soit $(A_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite convergente de matrices stochastiques et $A$ sa limite.
  - — Chaque coefficient de $A$ est limite de la suite correspondante des coefficients de $A_k$ et est positif comme limite de tels termes.
  - — Nous observons que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad ||\, MX\,||_\infty \leqslant n\, ||\, M\,||_\infty\, ||\, X\,||_\infty$$

et en déduisons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$||\, A_kU - AU\,||_\infty = ||\, (A_k - A)U\,||_\infty \leqslant n\, ||\, A_k - A\,||_\infty\, ||\, U\,||_\infty = n\, ||\, A_k - A\,||_\infty$$

Par théorème d'encadrement

$$U = A_kU \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_\infty} AU$$

d'où $AU = U$ (unicité de la limite).

La matrice $A$ est donc stochastique.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est donc fermé dans } (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty).}$$

- Soient $A, B$ stochastiques et $\lambda \in [0,1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$.
  - — La positivité de $\lambda$, $1-\lambda$ et des coefficients de $A$ et $B$ entraîne celle des coefficients de $M$.
  - — De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour $M$, qui est donc stochastique.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est convexe.}}$$

**Q14.** — Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $||\, AX\,||_\infty \leqslant ||\, X\,||_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Comme la matrice $A$ est stochastique, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$|[AX]_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}[X]_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |[A]_{i,j}|\ |[X]_j| \leqslant ||\, X\,||_\infty \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j} = \underbrace{||\, X\,||_\infty}_{\text{indépendant de } i}$$

Par passage au max sur les $i \in [\![1, n]\!]$, il vient

$$\boxed{\text{pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ ||\, AX\,||_\infty \leqslant ||\, X\,||_\infty}$$

*Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que la matrice $A^p$ ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on posera*

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell.$$

**Q15.** — Montrer que $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

Notons $B = A^p$.

- La matrice $B$ est une matrice stochastique (question 12) à coefficients strictement positifs.
- Comme $B$ est stochastique, $U \in \mathrm{Ker}(B - I_p)$ donc $\mathrm{Vect}\,(U) \subset \mathrm{Ker}(B - I_p)$.
- Nous démontrons à présent que $\mathrm{Ker}(B - I_p) \subset \mathrm{Vect}\,(U)$. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B - I_n)$. Nous allons démontrer que toutes les composantes du vecteur colonne $X$ sont égales, i.e. :

$$[X]_1 = \ldots = [X]_n$$

ce qui livrera $X \in \mathrm{Vect}\,(U)$. Soit $s$ un indice tel que $[X]_s$ est le maximum des composantes $[X]_1, \ldots, [X]_n$ de $X$. On a $BX = X$ et, en regardant le coefficient d'indice $s$ de ce vecteur colonne, il vient

$$[X]_s = \sum_{j=1}^{n} [B]_{i,j}\,[X]_j \leqslant [X]_s \sum_{j=1}^{n} [B]_{i,j} = [X]_s$$

Ci-dessus, on a utilisé la positivité des coefficients de la matrice $B$ pour obternir

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad [B]_{i,j}\,[X]_j \leqslant [B]_{i,j}\,[X]_s$$

Si, par l'absurde, il existait un $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $[X]_j < [X]_s$ alors, la stricte positivité des coefficients de $B$, entraînerait

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad [B]_{i,j}\,[X]_j < [X]_{i,j}\,[X]_s$$

et on obtiendrait ci-dessus $[X]_s < [X]_s$ et donc une contradiction.
Ceci montre que $[X]_1 = \ldots = [X]_n$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U) \text{ et donc } \dim(\mathrm{Ker}(A^p - I_n)) = 1}$$

**Q16.** — En déduire que $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

$\supset$ On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car $A$ est stochastique.

$\subset$ Si $AX = X$ alors par récurrence $A^k X = X$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. En particulier $A^p X = X$. la question précédente montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)}$$

**Q17.** — Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice $R_k$ est stochastique.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

- Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, la matrice $A^\ell$ est stochastique (question 12).
- La matrice $R_k$ est à coefficients positifs, comme somme de telles matrices.
- De plus

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell\, U = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} U = U$$

et on a aussi (4).

$$\boxed{\text{La matrice } R_k \text{ est stochastique.}}$$

On aurait aussi pu utiliser la convexité de $\mathcal{E}$ puisque $R_k$ est isobarycentre de matrices stochastiques.

**Q18.** — Montrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ vers une matrice $P$, stochastique, de rang 1.

- Les questions 10 et 14 montrent que $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est convergente de limite $P$ telle que $P^2 = P$.
- De plus, les questions 17 et 13 (caractère fermé) montrent que $P$ est stochastique.
- La partie 3 a montré que $P$ est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$. On a donc $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ et $P$ est de rang 1.

$$\boxed{R_k \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_\infty} P,\ P \in \mathcal{E},\ \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)}$$

**Q19.** — En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

Toutes les colonnes de $P$ sont ainsi multiples de $U$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_j \in \mathbf{R}$ telle que la $j$-ème colonne de $P$ s'écrive $\lambda_j U$.
En posant $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a alors $P = UL$.
Comme toutes les coordonnées de $U$ valent 1, toutes les lignes de $P$ valent $L$. Comme $P$ est stochastique, $L$ l'est aussi.

$$\boxed{P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique}}$$

**Q20.** — Montrer que $PA = P$. En déduire que $L$ est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

- Remarquons que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$
$$R_k A = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} A^l = \frac{1}{k}\left((k+1)\,R_{k+1} - I_n\right) = \frac{k+1}{k}\,R_{k+1} - \frac{1}{k}\,I_n$$
En faisant tendre $k$ vers $+\infty$, on obtient
$$R_k A \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_\infty} P$$
Comme
$$\forall\,(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad ||\,MN\,||_\infty \leqslant n\,||\,M\,||_\infty\,||\,N\,||_\infty$$
nous avons également, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$
$$||\,R_k A - PA\,||_\infty \leqslant n\,||\,R_k - P\,||_\infty\,||\,A\,||_\infty$$
Par théorème d'encadrement, nous en déduisons
$$R_k A \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_\infty} PA$$
D'après l'unicité de la limite
$$\boxed{PA = P}$$
- $P$ est une matrice dont toutes les lignes sont égale à $L$. $PA$ est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont $LA$. L'égalité $PA = P$ donne ainsi
$$\boxed{LA = L}$$
- Si $Y$ est une matrice ligne, $YA = Y$ s'écrit aussi $A^\top Y^\top = Y^\top$ ou encore
$$(A^\top - I_n)\,Y^\top = 0$$
Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n - 1$ (par théorème du rang) et il en est de même de $A^\top - I_n$. Le noyau de $A^\top - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice $L^\top$ qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices ligne $Y$ vérifiant $YA = Y$ sont les multiples de $L$. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, la somme des coefficients de $\lambda L$ ne vaut 1 que si $\lambda = 1$. Ainsi
$$\boxed{L \text{ est la seule ligne stochastique telle que } LA = L}$$

**Q21.** — Montrer que les coefficients de la matrice ligne $L$ sont tous strictement positifs.

On montre par récurrence simple que $LA^k = L$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. En particulier, $LA^p = L$.
Si, par l'absurde, il existait $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $[L]_j = 0$ alors en regardant le $j$-ème coefficient de la matrice ligne $LA^p = L$, on aurait

$$0 = \sum_{k=1}^{n} [L]_k \, [A^p]_{k,j}$$

Les coefficients de la matrice $A^p$ étant strictement positifs et les coefficients de $L$ étant positifs non tous nuls, ceci est impossible.
On a montré que

$$\boxed{L \text{ est à coefficients strictement positifs}}$$

**Q22.** — Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de $A$.

On sait que $\mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Les espaces $F = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $G = \mathrm{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. En notant $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u_G \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F \oplus G = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

$$\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$$

$F$ est de dimension 1 et $u_F = \mathrm{Id}_F$ donc $\chi_{u_F} = (X - 1)$.
Comme $F \cap G = \{0\}$, $u_G - \mathrm{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de $\chi_{u_G}$.
De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de $\chi_u$, i.e.

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre simple de } A}$$

## 5. Application au labyrinthe

*On approfondit l'étude commencée dans la partie 2 en exploitant les résultats de la partie 4.*
*On pose $A = B^\top$ où $B$ est la matrice construite dans la partie 2.*
*Un calcul, qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice $A^2$ sont tous strictement positifs.*

**Q23.** — Expliciter la limite $P$ de la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ définie en (2).

On a $P = UL$ où $L$ est l'unique ligne stochastique telle que $LA = L$, c'est-à-dire où $L^\top$ a des coefficients positifs de somme 1 et vérifie $A^\top L^\top = L^\top$, c'est-à-dire où $L^\top$ est vecteur propre de $B$ associé à la valeur propre 1. $(4, 3, 3, 3, 3)$ est un tel vecteur propre et donc $L = \frac{1}{16}(4, 3, 3, 3, 3)$. Finalement,

$$\boxed{P = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

**Q24.** — Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire $S_0$ suit cette loi, alors les variables $S_k$ suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants $k$, $k \in \mathbf{N}$).

- Supposons que $S_0$ suive une loi convenable. On a alors $X_0 = BX_0$ et, en transposant, $X_0^\top A = X_0^\top$. Comme $X_0^\top$ est stochastique, la question 20 montre que $X_0^\top = L$ trouvé ci-dessus.

- La réciproque a été traitée en question 4.

$$\boxed{\text{Le seul cas où les } S_k \text{ ont la même loi est donnée par } X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}}$$