# Devoir maison n°3

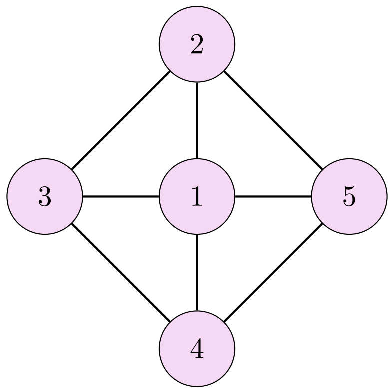
pour le jeudi 10 octobre



*Préambule.* — Vous attacherez la plus grande importance à la CLARTÉ, à la PRÉCISION et à la CONCISION de la RÉDACTION. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

## 1. Problématique

*Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de* $1$ *à* $5$*, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :*




*Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés* $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ $(k \in \mathbf{N})$*. On admet que, si le rat se trouve à l'instant* $k$ $(k \in \mathbf{N})$ *dans la salle numéro* $i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$*, alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle* $i$ *et se trouvera donc, à l'instant* $k+1$*, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle* $i$*. On admet que l'on peut introduire, pour tout* $k$ *entier naturel, une variable aléatoire* $S_k$ *donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant* $k$*. À titre d'exemple, on aura donc*

$$\forall\, k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

*Pour tout* $k \in \mathbf{N}$*, on introduit la matrice-colonne*

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \\ \mathbf{P}(S_k = 4) \\ \mathbf{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

## 2. Premiers pas

**Q1.** — Démontrer que $\mathbf{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(\mathbf{P}(S_k = i),\ i = 1, \ldots, 5)$.

**Q2.** — Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout $k$ entier naturel.

**Q3.** — En observant les colonnes de la matrice $B$, montrer que le réel 1 est valeur propre de $B^\top$ et expliciter un vecteur propre associé.

*On suppose que la loi de la variable $S_0$ est donnée par*

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

**Q4.** — Montrer qu'alors les variables aléatoires $S_k$ ont toutes la même loi.

**Q5.** — Est-ce que $S_0$ et $S_1$ sont indépendantes ?

## 3. Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

*Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $||\cdot||$ sur $E$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,*

$$||\, u(x)\, || \leqslant ||\, x\, ||\, .$$

*Pour tout entier naturel $k$ non nul, on considère l'endomorphisme*

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

*où $I_E$ représente l'endomorphisme identité de $E$.*

**Q6.** — Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)$.

**Q7.** — Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

**Q8.** — En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.

**Q9.** — Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de $E$, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p\colon E \longrightarrow E$ ainsi définie.

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $||\, AX\, ||_\infty \leqslant ||\, X\, ||_\infty$. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on considère la matrice*

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

*où $I_n$ est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*

**Q10.** — Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vers une matrice $P$, telle que $P^2 = P$.

## 4. Matrices stochastiques

*On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.*

**Définition 1** *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

**Définition 2** *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

*Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients $\lambda_i$ sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.*

**Q11.** — Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

**Q12.** — En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre $n$) est stable pour le produit matriciel.

**Q13.** — Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), || \cdot ||_\infty)$.

**Q14.** — Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $|| AX ||_\infty \leqslant || X ||_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

*Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que la matrice $A^p$ ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on posera*

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell.$$

**Q15.** — Montrer que $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

**Q16.** — En déduire que $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

**Q17.** — Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice $R_k$ est stochastique.

**Q18.** — Montrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), || \cdot ||_\infty)$ vers une matrice $P$, stochastique, de rang 1.

**Q19.** — En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

**Q20.** — Montrer que $PA = P$. En déduire que $L$ est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

**Q21.** — Montrer que les coefficients de la matrice ligne $L$ sont tous strictement positifs.

**Q22.** — Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de $A$.

## 5. Application au labyrinthe

*On approfondit l'étude commencée dans la partie 2 en exploitant les résultats de la partie 4.*
*On pose $A = B^\top$ où $B$ est la matrice construite dans la partie 2.*
*Un calcul, qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice $A^2$ sont tous strictement positifs.*

**Q23.** — Expliciter la limite $P$ de la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ définie en (2).

**Q24.** — Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1,5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire $S_0$ suit cette loi, alors les variables $S_k$ suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants $k$, $k \in \mathbf{N}$).