Corrigé DM2

Exercice 4

(Q12) Thm du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathbb{R}^3$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Donc $f(x) = 0$ et il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tq $x = f(y)$ ) $f^2(y) = 0$

Or $\underbrace{\cancel{f^3(y)}}_{=0} + \underbrace{f(y)}_{x} = 0$

(Q13) Mq $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, i.e $rg(f) = 2$

- $rg(f) \neq 0$
- si $rg(f) = 3$, alors $f$ surjective, donc bijective ($\mathbb{R}^3$ e.v de dim $< +\infty$) et $f^2 + id = 0$. D'où $\underbrace{\det(f^2)}_{\det(f)^2 > 0} = \underbrace{\det(-id)}_{(-1)^3 \det(I_d)} = -1$

- si $rg(f) = 1$, (clé : $\mathrm{Im}(f)$ stable par $f$)

Donc $g = f_{|\mathrm{Im}(f)}^{|\mathrm{Im}(f)} \mid \begin{array}{l} \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ y \longmapsto f(y) \end{array}$

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$

$$\underbrace{f^2(\underbrace{f(x)}_{y})}_{g^2(y)} + \underbrace{f(x)}_{y} = 0$$

Donc $g^2 + id = 0$ sur $\mathrm{Im}(f) \longrightarrow$ m̂ chose qu'avant

Donc $rg(f) = 2$

Q14) Trouver $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tq ...

Soit $e_2$ un $\vec{v}$ non-nul de $\mathrm{Im}(f)$

Mq $(e_2, f(e_2))$ est libre, ce sera donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ (de dim 2)

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda e_2 + \mu f(e_2) = 0$

Donc $\lambda f(e_2) + \mu \underbrace{f^2(e_2)}_{-e_2} = 0$

$-e_2 \leftarrow$ car $e_2 \in \mathrm{Im}(f)$

$$\begin{cases} \lambda e_2 + \mu f(e_2) = 0 \\ -\mu e_2 + \lambda f(e_2) = 0 \end{cases} \qquad \text{Supposons } \lambda \neq 0 \qquad (*)$$

$$\begin{cases} e_2 + \frac{\mu}{\lambda} f(e_2) = 0 \\ -\mu e_2 + \lambda f(e_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_2 + \frac{\mu}{\lambda} f(e_2) = 0 \\ \underbrace{\left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda}\right)}_{\neq 0} f(e_2) = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \mu L_1$$

et $f(e_2) = 0$

$e_2 \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, contradiction, donc $\lambda = 0$

$(*)$ s'écrit donc $-\mu \underbrace{e_2}_{\neq 0} = 0$, donc $\mu = 0$.

Soit $e_1$ un $\vec{v}$ non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, Q12 $\Rightarrow (e_1, e_2, f(e_2))$ base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array}$$

Exercice 3

(Q7) $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ une famille presque finie

$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$, $f(Q) = P$ $\quad f(\tilde{1}) = 0$, $\tilde{1} \in \mathrm{Ker}(f)$.

(Q6) $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$ Les polynômes cst $\neq 0$ n'ont pas d'antécédents par g dans $\mathbb{R}[X]$

par intégrité, $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

(Q9) Cherchons $f$ tq $f^2 = 0$ $(\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f))$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (A^2 = 0)$

(calcu) $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y, 0) \end{array} \right.$ $\quad f^2 = 0$ et $rg(f) = 1 \to \mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$.

Q11) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = AB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n = C$. $f$ endo de $\mathbb{R}^2$ can. associé à A nilpotent.
$g$ ——— B nilpotent.
$f \circ g$ non-nilpotent car C ne l'est pas.

Q8) dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ base can de $\mathbb{R}^3$

On pose $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$
$F_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$
$F_3 = \mathrm{Vect}(e_1)$
$F_4 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$

Q10) $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (0,y,-z) \end{array} \right.$

Supposons $f = \lambda p$, $f^2 = \lambda^2 p = \lambda f$

$f^2(e_2) = f(e_2) = e_2 \Rightarrow \lambda = 1$
$f^2(e_3) = -f(-e_3) = e_3$
$f(e_3) = -e_3$ $\Big\}$ $\lambda = -1$

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$

Exercice 1

(Q3) (Q2) (Q1) Binomiale $V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$

Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n expression de Bernoulli avec une probabilité de 1/3 et tout cela de manière indépendante. $X_1$ dénombre ce succès
De ce fait, $X_1 \sim B(n, \frac{1}{3})$

OU

pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $X_{1,k} = \begin{cases} 1 & \text{si la } k\text{-ième voiture franchi la barrière 1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$\sim B(\frac{1}{3})$

$X_{1,1} + \dots + X_{1,n}$ mut. indé., donc $X_1 = X_{1,1} + \dots + X_{1,n} \sim B(n, \frac{1}{3})$

(Q2) $V(X_1) = V(X_2) = \frac{2n}{9}$

Comme $X_1+X_2+X_3 = n$, $X_1+X_2 = n-X_3$

~~donc~~ $\cancel{X_1+X_2 =}$

Donc $V(X_1+X_2) = V(n-X_3) = (-1)^2\, V(X_3) = V(X_3) = \frac{2n}{9}$

(Q3) $V(X_1+X_2) = V(X_1)+V(X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$

Exercice 2

(Q4) $E(\mathrm{tr}(A)) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_{i,i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_{i,i}) = 0$

$V(\mathrm{tr}(A)) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_{i,i}\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_{i,i})$ (décorellées)

$V(X_{i,i}) = \underbrace{E(X_{i,i}^2)}_{1} - \cancel{E(X_{i,i})^2}\ 0$

$= \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(Q5) $E(\det(A)) = E\left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)}\right)$ (*)

$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_{i,\sigma(i)})}_{=0} = 0$

(*) linéarité de l'espérance

$\forall \sigma \in S_n$, $X_{1,\sigma(1)}, \dots, X_{n,\sigma(n)}$ sont mutuellement indépendantes, ~~donc~~ et l'espérance du produit est donc le produit des espérances.

$$V(\det(A)) = E(\det(A)^2) - \underbrace{E(\det(A))^2}_{=0}$$ formule de Huygens

en dvlp / 1ère ligne
$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} X_{1,i} |A_{1,i}|\right)^2\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+i}(-1)^{1+j} X_{1,i} X_{1,j} |A_{1,i}||A_{1,j}|\right)$$

linéarité de l'espérance
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (-1)^{2+i+j} \underbrace{E(X_{1,i} X_{1,j} |A_{1,j}||A_{1,i}|)}_{(*)} \quad (**)$$

Si $i \neq j$, par lemme des coalitions,

$$(*) = \underbrace{E(X_{1,i})}_{=0} \underbrace{E(X_{1,j})}_{=0} E(|A_{1,i}||A_{1,j}|) = 0$$

$$(**) = \sum_{i=1}^{n} ((-1)^{1+i})^2 E(X_{1,i}^2 |A_{1,i}|^2)$$

lemme coalitions
$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_{1,i}^2) E(|A_{1,i}|^2) = \sum_{i=1}^{n} E(|A_{1,i}|^2)$$

On démontre par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ H_n = \text{"} V(\det(A)) = n! \text{"}$$ fonction $\to \mathcal{M}_n(\Omega)$

# Exercice 5

Q15) On suppose que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = \lambda_x x$
On veut tq mq $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$

Soit $x, y \in E$.
$\exists (\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2$ tq $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$

• 1er cas : La famille $(x,y)$ est libre.

Donc $x+y \in E$
$\underbrace{f(x+y)} = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$

$\exists k \in \mathbb{K}, f(x+y) = k(x+y) = kx + ky$
D'où $kx + ky = \lambda_x x + \lambda_y y$
Par liberté de $(x,y)$, on a $k = \lambda_x = \lambda_y$

• 2e cas : La famille $(x,y)$ est liée, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Alors $\exists \gamma \in \mathbb{K}^*$ tq $y = \gamma x$.
alors $f(y) = \gamma f(x)$
càd $\lambda_y y = \gamma \lambda_x x$, càd $\lambda_y \gamma x = \lambda_x \gamma x$

Donc par liberté de $(x) \neq (0)$, $\lambda_x = \lambda_y$.

Q16) Soit $g$ qui commute avec tout $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $x \in E$

On va considérer $f$ la projection de $E$ sur $\mathrm{Vect}(x)$ // à un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$.

$f(g(x)) \in \mathrm{Vect}(x)$,

Or $f(g(x)) = g(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Vect}(x)}) = g(x)$

Donc $\forall x \in E$, $g(x) \in \mathrm{Vect}(x)$ et par Q15, on a $g$ qui est une homothét

Q17) $A = \{ u \in \mathcal{L}(E) \mid u$ commute avec tous les endos de $E \}$.

$B = \{ v \in \mathcal{L}(E) \mid v$ est une homothétie $\}$

D'après Q16, $A \subset B$.

Mq $B \subset A$.

Soit $f \in B$ $\rightarrow$ $f \left| \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ x \mapsto \lambda x \end{array} \right.$ ($\lambda \in \mathbb{K}$ fixé)

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$

Soit $x \in E$, $f(\underbrace{g(x)}_{\in E}) = \lambda g(x)$

$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$