Devoir maison n°2

pour le lundi 16 septembre

Préambule. — Les élèves de MPI résolvent les parties 1,2,3,4,5, ceux de MPI* toutes les parties. Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps (commutatif).

1. Franchissement d'une barrière de péage à trois voies

À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

Q1. — Déterminer la loi de X_1.

Q2. — Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.

Q3. — En déduire la covariance de X_1 et X_2.

2. Matrices de Rademacher

Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, n un entier naturel non nul et $(X_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de variables aléatoires définies sur Ω, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On note A la matrice aléatoire :

$$A \left| \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ \omega & \longmapsto & A(\omega) =: (X_{i,j}(\omega))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \end{array} \right.$$

Hans Rademacher (1892-1969)

Q4. — Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{tr}(A))$ et $\mathbf{V}(\mathrm{tr}(A))$.

Q5. — Calculer $\mathbf{E}(\det(A))$ et $\mathbf{V}(\det(A))$.

3. Des contre-exemples en algèbre linéaire

Q6. — Trouver un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme f de E qui est injectif et non surjectif.

Q7. — Trouver un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme f de E qui est surjectif et non injectif.

Q8. — Trouver un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et, pour tout entier $n \geqslant 3$, des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ qui sont deux à deux en somme directe, mais tels que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ n'est pas directe.

Q9. — Trouver un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme f de E tels que la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ n'est pas directe.

Q10. — Trouver un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme f de E tels que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$, $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et f n'est pas colinéaire à un projecteur de E.

Q11. — Trouver un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et deux endomorphismes f, g de E tels que f, g sont nilpotents et $f \circ g$ n'est pas nilpotent.

4. Réduction guidée d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, non nul, tel que $f^3 + f = 0$.

Q12. — Prouver que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Q13. — Justifier que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Q14. — Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Centre de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

Q15. — On suppose que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Démontrer que f est une homothétie.

Q16. — On suppose que f commute avec tous les endomorphismes de E. Démontrer que f est une homothétie. On pourra, pour un vecteur x de E fixé, considérer la projection de E sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$ dans E.

Q17. — Déterminer l'ensemble $\{u \in \mathcal{L}(E) \ : \ u \text{ commute avec tous les endomorphismes de } E\}$.

6. Unions finies de sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel

On suppose ici que le corps $\mathbf{K}$ est infini et on considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E distinct de $\{0_E\}$.

Q18. — Soient un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, tous distincts de E. Démontrer que $F_1 \cup \ldots \cup F_n \neq E$. On pourra commencer par considérer le cas où $E = \mathbf{R}^2$ et considérer judicieusement une droite affine.

7. Existence d'un supplémentaire commun

Ici aussi, le corps $\mathbf{K}$ est supposé infini. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.

Q19. — Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, de même dimension. Démontrer que F_1 et F_2 possèdent un supplémentaire commun. On pourra commencer par considérer le cas où F_1 et F_2 sont des hyperplans de E.

Q20. — Soient un entier $p \geqslant 3$ et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E, de même dimension. Démontrer que $F_1, \ldots, F_p$ possèdent un supplémentaire commun.