Un corrigé du devoir maison n°11

1. Calcul de l'intégrale de Dirichlet à l'aide d'une intégrale à paramètre

Soit F la fonction définie par :

$$F\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-xt}\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction F est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

- La fonction $\varphi\colon t \longmapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Comme :

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \frac{1-\left(1-t^2/2+\mathrm{o}\left(t^2\right)\right)}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}+\mathrm{o}\left(1\right) \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

la fonction φ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0. De plus :

$$\forall\, t>0 \qquad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{2}{t^2}$$

et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (critère de Riemann). D'après le théorème de domination pour les fonctions positives, la fonction φ est intégrable en $+\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi\colon t \longmapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\,.}$$

- Nous allons appliquer le critère de continuité pour les intégrales à paramètres. Pour cela, introduisons la fonction f définie par :

$$f \left|\begin{array}{ccc} [0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-xt} \end{array}\right.$$

(H1) À $t>0$ fixé, la fonction $f(\,\cdot\,,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
(H2) À $x \geqslant 0$ fixé, la fonction $f(x,\,\cdot\,)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
(H3) Pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$:

$$|f(x,t)| = f(x,t) \leqslant \varphi(t) \qquad [\text{indépendant de } x]$$

et nous savons que la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le critère s'applique.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est bien définie et continue sur } [0,+\infty[\,.}$$

À $x \geqslant 0$ fixé, nous avons établi non seulement la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-xt}\ \mathrm{d}t$, mais encore son absolue convergence.

2. Étudier la limite éventuelle de la fonction F en $+\infty$.

Nous allons appliquer la version continue du théorème de convergence dominée.

(H1) À $x \geqslant 0$ fixé, la fonction $f(x, \cdot)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

(H2) À $t > 0$ fixé :

$$f(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 =: g(t)$$

et la fonction $g\colon t \longmapsto 0$ est continue sur $]0,+\infty[$.

(H3) Pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$|f(x,t)| = f(x,t) \leqslant \varphi(t) \qquad \text{[indépendant de } x\text{]}$$

et nous savons que la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème s'applique.

$$\boxed{F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-xt} \ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} g(t) \ \mathrm{d}t = 0}$$

3. Démontrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $F''(x)$, pour tout $x > 0$.

Nous allons appliquer le critère $\mathcal{C}^2$ pour les intégrales à paramètres.

(H1) À $t > 0$ fixé, la fonction $f(\cdot\,, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\cos(t)-1}{t}\, e^{-xt} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))\, e^{-xt}$$

(H2) À $x > 0$ fixé, les fonctions $f(x, \cdot)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

(H3) Soit $x > 0$ fixé. En Q1, nous avons démontré que la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Comme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1+\mathrm{o}(t)-1}{t}\, e^{-xt} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}(1)\ e^{-xt} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0. De plus :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{-xt}\right)$$

et la fonction $t \longmapsto e^{-xt}$ est intégrable en $+\infty$ $(x > 0)$. D'après le théorème de comparaison pour les fonctions intégrables, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable en $+\infty$.

(H4') Soient a, b des réels tels que $0 < a < b$. Pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \leqslant 2\, e^{-xt} \leqslant 2\, e^{-at} =: \psi(t) \qquad \text{[indépendant de } x\text{]}$$

La fonction ψ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ $(a > 0)$.

Le critère s'applique. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ avec, pour tout } x>0,\ F''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\, e^{-xt} \ \mathrm{d}t.}$$

Fixons un réel $x > 0$. Soit un réel $A > 0$.

$$\int_0^A e^{(i-x)t} \ \mathrm{d}t = \frac{e^{(i-x)A}-1}{i-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{x-i} \qquad \left[\text{car } \left|e^{(i-x)A}\right| = e^{-xA} \text{ et } x > 0\right]$$

Nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A e^{(i-x)t} \ \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{x-i}$. L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t)\, e^{-xt} \ \mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} \ \mathrm{d}t\right)$$

est donc convergente et vaut $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{x}{x^2+1}$. D'autre part, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{x}$. Nous en déduisons que :

$$\boxed{\text{pour tout } x>0,\ F''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.}$$

4. En déduire la valeur de $F(0)$, puis celle de l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

- D'après la question précédente, il existe une constante réelle k_1 telle que :

$$\forall\, x>0 \quad F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + k_1$$

Soit $x>0$. Les fonctions $u\colon t \longmapsto t$ et $v\colon t \longmapsto \ln\left(t^2+1\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,x]$. Par intégrations par parties :

$$\int_0^x \ln\left(t^2+1\right)\ \mathrm{d}t = \left[t\,\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = x\,\ln\left(x^2+1\right) + 2\arctan(x) - 2\,x$$

La fonction $x \longmapsto x\,\ln\left(x^2+1\right)+2\arctan(x)-2\,x$ est donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln\left(x^2+1\right)$ (théorème fondamental de l'analyse).
Nous en déduisons qu'il existe une constante réelle k_2 telle que, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= x\,\ln(x) - x - \frac{1}{2}\left(x\,\ln\left(x^2+1\right) + 2\arctan(x) - 2\,x\right) + k_1\,x + k_2 \\ &= x\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + k_1\right) - \arctan(x) + k_2 \end{aligned}$$

Comme :

$$x\,\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = x\,\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}}\right) = -\frac{1}{2}\,x\,\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

nous déduisons de Q2 que $k_1=0$ et $k_2=\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$\forall\, x>0 \qquad F(x) = x\,\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

Comme :

$$x\,\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = x\,\ln(x) + x\,\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0 \qquad \text{[croissances comparées]}$$

la continuité de F en 0 à droite (cf. Q1) nous livre :

$$\boxed{F(0) := \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

- Les fonctions $u\colon t \longmapsto 1-\cos(t)$ et $v\colon t \longmapsto -\frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$u(t)v(t) = \frac{\cos(t)-1}{t} \underset{t\to0}{=} \frac{1+\mathrm{o}\left(t\right)-1}{t} \underset{t\to0}{=} \mathrm{o}\left(1\right) \xrightarrow[t\to0]{} 0$$

et :

$$0 \leqslant |u(t)v(t)| \leqslant \frac{2}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc $[u\,v]_0^{+\infty}$ est bien défini et vaut 0. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et le théorème d'intégration par parties nous livre la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et :

$$F(0) := \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = [u\,v]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

2. Rayon de convergence et somme d'une série entière

5. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,(2n+1)}\,x^{2n+1}$.

- Soit $r \geqslant 0$. Par croissances comparées :

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,(2n+1)}\,r^{2n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } r \leqslant 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

La suite $\displaystyle\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,(2n+1)}\,r^{2n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée si et seulement si $r \leqslant 1$. Ainsi :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,(2n+1)}\,x^{2n+1}\right) := \sup([0,1]) = 1}$$

- La fonction :

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,(2n+1)}\,x^{2n+1} \end{array}\right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées itérées sont obtenues en dérivant terme à terme la série. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,x^{2n} = 1 + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,x^{2n-1} = 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\,x^{2n+1} = 1 + x\,\arctan(x)$$

Soit $x \in]-1,1[$ Les fonctions $u\colon t \longmapsto t^2/2$ et $v\colon t \longmapsto \arctan(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,x]$ ou $[0,x]$. Par intégrations par parties :

$$\int_0^x t\,\arctan(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2\,\arctan(t)}{2}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2\,\arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\,(x-\arctan(x))$$

La fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\,\left(x^2+1\right)\,\arctan(x) - \frac{x}{2}$$

est donc une primitive de la fonction $x \longmapsto x\,\arctan(x)$ (théorème fondamental de l'analyse).
Nous en déduisons qu'il existe une constante réelle k telle que, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$S(x) = \frac{1}{2}\,\left(x^2+1\right)\,\arctan(x) + \frac{x}{2} + k$$

En comparant les valeurs en 0, il vient $k = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall\, x \in]-1,1[\qquad S(x) = \frac{1}{2}\,\left(x^2+1\right)\,\arctan(x) + \frac{x}{2}}$$

3. Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

On considère les équations différentielles :

$$\begin{array}{lrcl} (\mathcal{E}) & \left(t^2+1\right) x'' - 2\,x & = & t \\ (\mathcal{EH}) & \left(t^2+1\right) x'' - 2\,x & = & 0 \end{array}$$

6. Déterminer toutes les fonctions solutions de $(\mathcal{EH})$, qui sont développables en séries entières au voisinage de 0. Pour chacune d'entre elles, on précisera le rayon de convergence de la série entière sous-jacente et on donnera une expression des valeurs à l'aide de fonctions usuelles.

Nous raisonnons par analyse et synthèse.

- *Analyse.* Soit $\sum a_n\, t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées itérées sont obtenues en dérivant terme à terme la série. La fonction f est solution de $(\mathcal{EH})$ sur $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall\, t \in]-R, R[\qquad \left(t^2+1\right) \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\, n\,(n-1)\, t^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0$$

i.e. si et seulement si :

$$\forall\, t \in]-R, R[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, n\,(n-1)\, t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\, t^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0$$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul, cette assertion est équivalente à :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad a_n\, n\,(n-1) + a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) - 2\,a_n = 0$$

i.e. à :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad a_{n+2} = -\frac{n^2-n-2}{(n+1)(n+2)}\, a_n = -\frac{(n-2)(n+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n = -\frac{n-2}{n+2}\, a_n$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = a_0 \\ \forall\, n \geqslant 2 \quad a_{2n} = 0 \end{array} \right.$$

En calculant :

$$a_3 = \frac{a_1}{1\times 3} \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5}\, a_3 = -\frac{a_1}{3\times 5} \qquad a_7 = -\frac{3\,a_5}{7} = \frac{a_1}{5\times 7} \qquad a_9 = -\frac{7\,a_7}{9} = \frac{a_1}{7\times 9}$$

on conjecture que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\, a_1$$

On démontre cette conjecture au moyen d'un raisonnement par récurrence (omis).

- *Synthèse.* Fixons deux réels a_0, a_1 et posons :
  - pour tout $n \geqslant 2$, $a_{2n} := 0$, et $a_2 := a_0$;
  - pour tout $n \geqslant 0$, $a_{2n+1} := \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\, a_1$.

  D'après Q5 :

$$R\left(\sum a_n\, x^n\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } a_1 \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{array} \right.$$

  Les calculs effectués dans l'analyse et Q5 nous livrent que la fonction :

$$\boxed{\left| \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = a_0\,\left(t^2+1\right) + a_1 \left(\frac{1}{2}\,\left(t^2+1\right) \arctan(t) + \frac{t}{2}\right) \end{array} \right.}$$

  est solution de $(\mathcal{EH})$ sur $]-1, 1[$.

7. En déduire l'ensemble solution de $(\mathcal{EH})$ sur $\mathbf{R}$.

- Soient x_1, x_2 les fonctions définies par :

$$x_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad x_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(t^2+1\right)\arctan(t)+\dfrac{t}{2} \end{array} \right.$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et, d'après Q6, elles sont solutions de $(\mathcal{EH})$ sur $]-1,1[$. Cependant, rien n'assure *a priori* qu'elles soient solutions de $(\mathcal{EH})$ sur $\mathbf{R}$.

- On vérifie sans peine que la fonction x_1 est solution de $(\mathcal{EH})$ sur $\mathbf{R}$. On calcule, pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$x_2'(t) = 1 + t\arctan(t) \qquad \text{et} \qquad x_2''(t) = \frac{t}{1+t^2} + \arctan(t)$$

On constate que x_2 est également solution de $(\mathcal{EH})$ sur $\mathbf{R}$.

- Comme, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t^2+1 \neq 0$, l'équation différentielle $(\mathcal{EH})$ est équivalente sur $\mathbf{R}$ à :

$$x'' = \frac{2}{t^2+1}\,x \qquad \text{[EDLS2 homogène normalisée]}$$

Les fonctions $a_0 \colon t \longmapsto \dfrac{2}{t^2+1}$ et $a_1 \colon t \longmapsto 0$ étant continues sur l'intervalle $\mathbf{R}$, le théorème de Cauchy linéaire nous apprend que $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

- Pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$W(x_1,x_2)(t) := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2+1 & \dfrac{1}{2}\left(t^2+1\right)\arctan(t)+\dfrac{t}{2} \\ 2t & 1+t\arctan(t) \end{vmatrix}$$

Comme $W(x_1,x_2)(0) = 1 \neq 0$, la famille (x_1,x_2) est libre. Elle forme donc une base de $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}, \mathbf{R})$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{Sol}(\mathcal{EH}, \mathbf{R}) & = & \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2) \\ & = & \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & k_1\left(t^2+1\right) + k_2\left(\left(t^2+1\right)\arctan(t)+t\right) \end{array} \right. \ : \ (k_1,k_2) \in \mathbf{R}^2 \right\} \end{array}}$$

8. Déterminer l'ensemble solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{R}$.

Comme, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t^2+1 \neq 0$, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est équivalente sur $\mathbf{R}$ à :

$$x'' = \frac{2}{t^2+1}\,x + \frac{t}{t^2+1} \qquad \text{[EDLS2 normalisée dont les coefficients et second membre sont continus sur } \mathbf{R}\text{]}$$

Nous remarquons que la fonction :

$$x_{\text{part}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & -\dfrac{t}{2} \end{array} \right.$$

est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{R}$. Nous savons alors que :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{Sol}(\mathcal{E}, \mathbf{R}) & = & x_{\text{part}} + \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2) \\ & = & \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & k_1\left(t^2+1\right) + k_2\left(\left(t^2+1\right)\arctan(t)+t\right) - \dfrac{t}{2} \end{array} \right. \ : \ (k_1,k_2) \in \mathbf{R}^2 \right\} \end{array}}$$