Devoir maison n°11

pour le lundi 10 mars

1. Calcul de l'intégrale de Dirichlet à l'aide d'une intégrale à paramètre

Soit F la fonction définie par :

$$F\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-xt}\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction F est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.
2. Étudier la limite éventuelle de la fonction F en $+\infty$.
3. Démontrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $F''(x)$, pour tout $x>0$.
4. En déduire la valeur de $F(0)$, puis celle de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

2. Rayon de convergence et somme d'une série entière

5. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,(2n+1)}\, x^{2n+1}$.

3. Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

On considère les équations différentielles :

$$\begin{array}{lrcl} (\mathcal{E}) & (t^2+1)\ x''-2\,x & = & t \\ (\mathcal{EH}) & (t^2+1)\ x''-2\,x & = & 0 \end{array}$$

6. Déterminer toutes les fonctions solutions de $(\mathcal{EH})$, qui sont développables en séries entières au voisinage de 0. Pour chacune d'entre elles, on précisera le rayon de convergence de la série entière sous-jacente et on donnera une expression des valeurs à l'aide de fonctions usuelles.
7. En déduire l'ensemble solution de $(\mathcal{EH})$ sur $\mathbf{R}$.
8. Déterminer l'ensemble solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{R}$.