Devoir maison n°1

pour le lundi 2 septembre

Préambule. — Les élèves de MPI résolvent les parties 1,2,3,4,5, ceux de MPI* toutes les parties. Il s'agit d'un TRAVAIL PERSONNEL, à réaliser sans l'aide de camarade ou d'internet. Vous attacherez la plus grande importance à la CLARTÉ, à la PRÉCISION et à la CONCISION de la RÉDACTION. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

1. Calculs de primitives et d'intégrales

Q1. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{2\pi/3}^{5\pi/4} \tan(x)\ \mathrm{d}x$.

Q2. — Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ sur $]\pi, 2\pi[$.

Q3. — Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ \ln^2(x)}$ sur $]1, +\infty[$.

Q4. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{e} x^2\ \ln^2(x)\ \mathrm{d}x$.

Q5. — Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^5(x)$ sur $\mathbf{R}$.

Q6. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(3x)\ \sin(7x)\ \mathrm{d}x$.

Q7. — Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ sur $\mathbf{R}$.

Q8. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.

Q9. — Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ sur $]1, +\infty[$.

Q10. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\ e^{3x}\ \mathrm{d}x$.

Q11. — Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos(3x)\, e^{-2x}$ sur $\mathbf{R}$.

Q12. — Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto e^{-\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Q13. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^3}\ \mathrm{d}x$.

2. Démonstration de la formule de Stirling grâce aux intégrales de Wallis

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi\,n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère l'intégrale de Wallis :

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\ \mathrm{d}x$$

Q14. — Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une relation entre les intégrales W_{n+2} et W_n.

Q15. — Exprimer, pour tout $p \in \mathbf{N}$, les intégrales W_{2p} et W_{2p+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de π.

Q16. — Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

Q17. — En déduire que $W_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} W_{2p+1}$, puis que :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\left(2^p\,p!\right)^2}{(2\,p)!}\right)^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} \pi \qquad (1)$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$u_n := \frac{\sqrt{n}}{n!}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Q18. — Démontrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

Q19. — En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\,\sqrt{n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Q20. — Démontrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$, à l'aide du résultat (1).

3. Étude d'une suite définie de manière implicite

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n - nx + 1 \end{array} \right.$$

Q21. — Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_n, dans $[0,1]$.

Q22. — Étudier la monotonie de la suite de terme général x_n et établir sa convergence.

Q23. — Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$, ainsi qu'un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q24. — Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Formule de Poincaré en probabilités

Q25. — Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}$$

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé fini.*

Q26. — Soient A et B deux événements. Exprimer la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\overline{A}}$ à l'aide la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ et la fonction indicatrice de $\mathbf{1}_{A \cap B}$ à l'aide des fonctions indicatrices $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

Q27. — Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Déduire des deux questions précédentes que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \qquad \text{[formule de Poincaré]}$$

Soit un entier $n \geqslant 2$. *On considère une urne contenant* n *boules numérotées de 1 à* n. *On les tire une à une, sans remise. Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *on note* A_i *l'événement défini par :*

$$A_i := \text{« La } i\text{-ème boule tirée porte le numéro } i. \text{ »}$$

Q28. — Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $(i_1, \ldots, i_k)$ un k-uplet d'entiers tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$.

Q29. — En déduire la probabilité, notée q_n, qu'aucun des événements $A_1, \ldots, A_n$ ne soit réalisé.

Q30. — Préciser le comportement asymptotique de la suite $(q_n)_{n \geqslant 2}$.

5. Calcul du déterminant d'une matrice circulante

Soient un entier $n \geqslant 2$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbf{C}^n$ *et* f *l'unique endomorphisme de* $\mathbf{C}^n$ *tel que :*

$$f(e_1) = e_n \quad , \quad f(e_2) = e_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f(e_n) = e_{n-1}$$

Q31. — Justifier que f est un automorphisme de $\mathbf{C}^n$ et préciser f^{-1}.

Q32. — Expliciter la matrice $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et donner sa décomposition dans la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q33. — Justifier que M est inversible et expliciter la matrice M^{-1}.

Q34. — Donner, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, la décomposition de la matrice M^k dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q35. — Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, l'équation :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \qquad f(x) = \lambda\, x$$

d'inconnue $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ *et, pour tout* $k \in [\![0, n-1]\!]$ *:*

$$u_k = \left(1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k}\right) \in \mathbf{C}^n$$

Q36. — Démontrer que la famille $\mathcal{C} := (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ est une base de $\mathbf{C}^n$.

Q37. — Expliciter la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

Q38. — Donner une relation liant les matrices M et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ *et :*

$$A := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \qquad [\textit{matrice circulante}]$$

Q39. — Décomposer A dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et en déduire une expression de A comme combinaison linéaire des matrices $I_n, M, \ldots, M^{n-1}$.

Q40. — Démontrer que la matrice A est semblable à la matrice :

$$\mathrm{diag}\left(P(1), P(\omega)\ \ldots, P\left(\omega^{n-1}\right)\right)$$

où $P = a_0 + a_1\, X + \ldots + a_{n-1}\, X^{n-1}$, puis donner la valeur de $\det(A)$.

6. Sous-groupes additifs de R et fonctions continues 1 et $\sqrt{2}$ périodiques

Soit G *un sous-groupe de* $(\mathbf{R}, +)$ *distinct de* $\{0\}$.

Q41. — Justifier que :

$$\alpha := \inf\{g \in G \;:\; g > 0\}$$

est bien défini.

Q42. — On suppose que $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$G = \alpha\mathbf{Z} := \{n\,\alpha \;:\; n \in \mathbf{Z}\}$$

On pourra commencer par établir que $\alpha \in G$, en raisonnant par l'absurde et en considérant l'intervalle $]\alpha, 2\alpha[$.

Q43. — On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que G est dense dans $\mathbf{R}$.

Un sous-groupe additif non trivial de $\mathbf{R}$ *est donc soit de la forme* $\alpha\mathbf{Z}$*, où* $\alpha \in \mathbf{R}$*, soit dense dans* $\mathbf{R}$.

Q44. — Que dire d'une fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, continue sur $\mathbf{R}$, qui est 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

7. Fonctions $f \in \mathcal{D}^3(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que $f'''\, f = 0$

Soit une fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$*, trois fois dérivable sur* $\mathbf{R}$*, telle que* $f'''\, f = 0$.

Q45. — Démontrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle non vide I, alors f prend une même valeur au plus deux fois sur I.

On pose :

$$\Gamma := \{x \in \mathbf{R} \;:\; f''(x) = 0\}$$

Q46. — Démontrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni minoré, ni majoré.

Q47. — Démontrer que Γ est un intervalle.

Q48. — En déduire f.