Suites et séries de fonctions 1

1. Convergence simple d'une suite de fonctions 1
2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions 2
3. Convergence uniforme dans le cas où les fonctions sont bornées 3
4. Un critère séquentiel de non-convergence uniforme 5
5. Passage du local pour la convergence simple, mais pas pour la convergence uniforme 5
6. Synthèse sur la convergence d'une suite de fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ 6
7. La convergence simple n'est pas associée à une norme (HP) 6
   7.1. Topologie sur un ensemble 6
   7.2. Topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble 7
   7.3. Convergence d'une suite pour une topologie 8
   7.4. Convergence d'une suite pour une topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble 8
   7.5. Partie dense pour une topologie 9
   7.6. Partie séquentiellement dense pour une topologie 9
   7.7. La séquentielle densité implique la densité 9
   7.8. Séquentielle densité versus densité dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé 9
   7.9. Critère pour qu'une topologie ne provienne pas d'une norme 9
   7.10. Topologie de la convergence simple 10
   7.11. La topologie de la convergence simple ne provient pas d'une norme 10
8. Convergence simple d'une série de fonctions 11
9. Convergence uniforme d'une série de fonctions 12
10. CU d'une série de fonctions versus CU de la suite des restes vers la fonction nulle 12
11. Convergence normale d'une série de fonctions bornées 13
12. Synthèse sur la convergence d'une séries de fonctions bornées sur une partie de $\mathbf{R}$ 16
13. Approximation uniforme 16
   13.1. Approximation uniforme par des fonctions en escalier 16
   13.2. Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass 17

Notation. — Dans tout le document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et X est un ensemble non vide.

1. Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 1. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur X, ce que l'on note $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} f$, si*

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(x) \qquad \left[\textit{convergence de la suite numérique } (f_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \textit{ vers } f(x)\right]$$

i.e. si

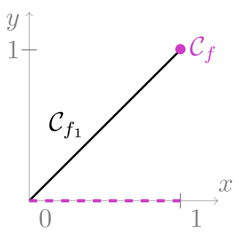
$$\forall\, x \in X \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_{x,\varepsilon} \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

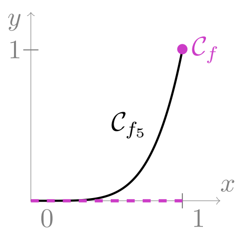
Exemple 2. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par

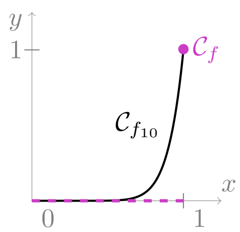
$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

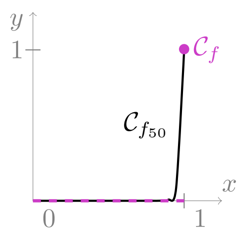
Alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $[0,1]$, où f est la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$









Dans l'exemple 2

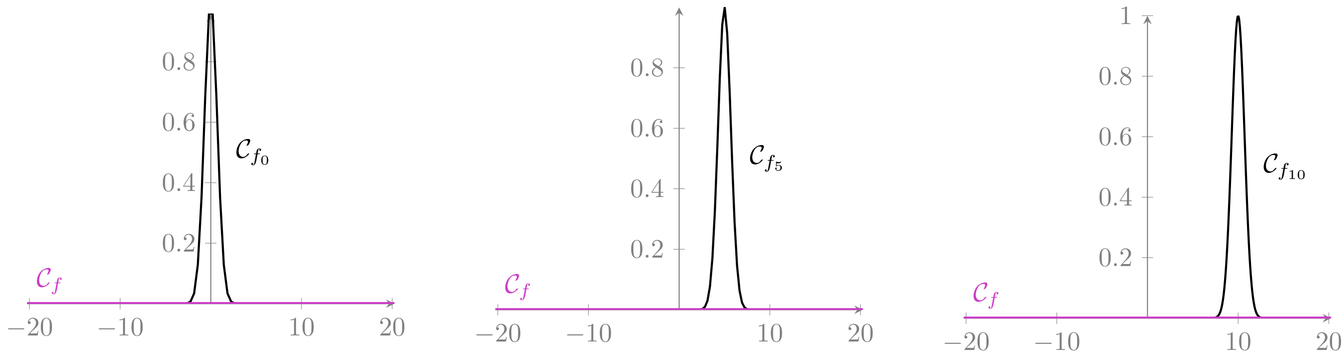
$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to 1} f_n(x) \quad \neq \quad \lim_{x \to 1} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

La seule convergence simple ne permet donc pas d'échanger les symboles $\displaystyle\lim_{n \to +\infty}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1}$, en supposant que les différentes limites existent.

Exercice 3. — Gaussienne glissante Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-(x-n)^2} \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.



Exercice 4. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = n$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, $f_n(1) = 0$ et f_n est affine sur chacun des segments $\left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$, $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$, $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$.

1. Représenter graphiquement les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4.
2. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
3. Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

Dans l'exercice 4

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t \quad \neq \quad \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

La seule convergence simple ne permet donc pas d'échanger les symboles $\displaystyle\lim_{n \to +\infty}$ et $\displaystyle\int_0^1$, en supposant que les différentes intégrales et limites existent.

2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 5. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur X, ce que l'on note $f_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\text{CU}} f$, si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 6. — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. Alors

$$f_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\text{CS}} f \iff \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon} \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\text{CU}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Dans la définition de la convergence uniforme, le rang N_ε peut être choisi le même pour tous les éléments x de X, d'où la terminologie « uniforme ».

Proposition 7. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$. Alors*

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CU}} f \quad\Longrightarrow\quad f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} f$$

La convergence simple n'implique par la convergence uniforme. Par exemple

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. \quad \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} \quad f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Cependant, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$, sinon

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad \forall\, x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{10}$$

ce qui implique

$$\forall\, n \geqslant N \quad \left| f_n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right| \leqslant \frac{1}{10}$$

i.e.

$$\forall\, n \geqslant N \quad \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{10}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient alors $\frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{10}$. Contradiction.

Remarque 8. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$. Alors

$$\exists\, N_1 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_1 \quad \underbrace{\forall\, x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1}_{\text{la fonction } f_n - f \text{ est bornée}}$$

Nous en déduisons que les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang.

3. Convergence uniforme dans le cas où les fonctions sont bornées

Rappel. — L'ensemble

$$\mathcal{B}(X,\mathbf{K}) := \{f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ f \text{ est bornée sur } X\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,\mathbf{K})$ et l'application

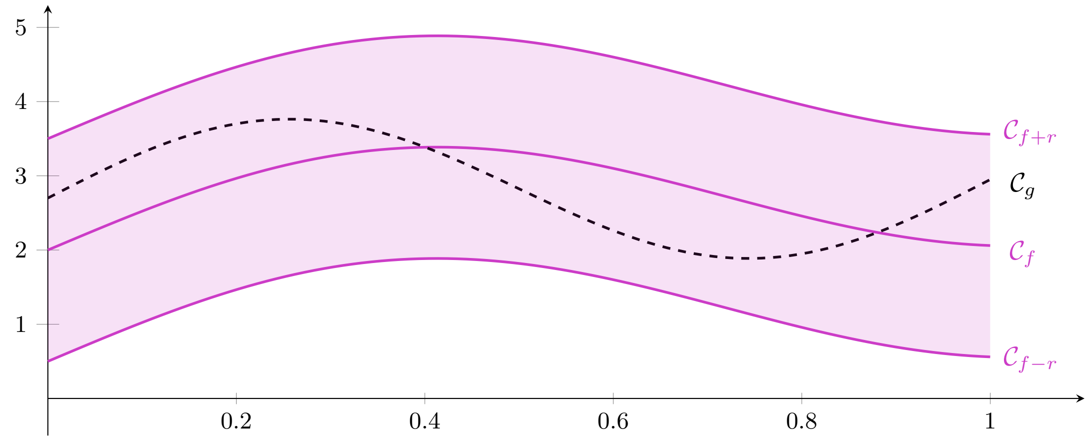
$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(X,\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & ||\,f\,||_\infty := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{B}(X,\mathbf{K})$.

Exemple 9. — $X = [0,1]$, $f \in \mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$ et $r > 0$, alors, pour tout $g \in \mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} g \in \overline{B(f,r)} &\iff ||\,f - g\,||_\infty \leqslant r \\ &\iff \forall\, x \in [0,1], \quad |f(x) - g(x)| \leqslant r \\ &\iff \forall\, x \in [0,1], \quad f(x) - r \leqslant g(x) \leqslant f(x) + r \\ &\iff f - r \leqslant g \leqslant f + r \end{aligned}$$

Les fonctions g dans la boule fermée $\overline{B(f,r)}$ sont donc celles qui ont leur courbe représentative dans le « tube » ci-dessous.



Proposition 10. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$ telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur X. Alors*

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CU}} f \quad\Longleftrightarrow\quad ||\, f_n - f \,||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 11. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\cos(x) \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.

Exercice 12. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \left[0, \dfrac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice 13. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array} \right.$$

Nous avons vu que la convergence simple ne permettait pas (seule) de préserver la continuité ou « d'échanger limite et intégrale sur un segment ». La convergence uniforme corrige ces deux défauts. Nous démontrerons plus tard que, si a et b des réels tels que $a < b$, si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{K})$ sont tels que

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$$

alors

1. la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$
2. $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

4. Un critère séquentiel de non-convergence uniforme

Proposition 14. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X telle que*

$$\textit{la suite numérique } (f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbf{N}} \textit{ ne converge pas vers } 0_{\mathbf{K}}$$

alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur X.

Démonstration. Nous raisonnons par contraposée. Supposons donc que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur X et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$. Nous allons établir que

$$f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathbf{K}}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse de convergence uniforme, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Nous en déduisons que

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon \qquad [\text{les } x_n \text{ appartiennent à } X]$$

Nous avons établi que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad |\,(f_n(x_n) - f(x_n)) - 0_{\mathbf{K}}\,| \leqslant \varepsilon$$

i.e. $f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathbf{K}}$. □

Exemple 15. — Dans l'exercice 3, nous avons établi que la suite de fonctions

$$\left(f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-(x-n)^2} \end{array} \right. \right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbf{R}$, que nous notons f. Comme

- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{R}$
- $f_n(n) - f(n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

nous pouvons appliquer la proposition 14 pour obtenir que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle f sur $\mathbf{R}$.

5. Passage du local pour la convergence simple, mais pas pour la convergence uniforme

Soient A une partie de $\mathbf{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A,\mathbf{K})$. Comme la convergence simple est une convergence point de A par point de A

$$\left(\forall\, [a,b] \subset A \quad f_{n|[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f_{|[a,b]}\right) \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \qquad [\text{passage du local au global pour la CS}]$$

En revanche, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers la fonction f sur chaque segment $[a,b]$ inclus dans A n'implique pas nécessairement la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers la fonction f sur A, comme l'illustre les deux exercices suivants.

Exercice 16. — Considérons

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$$

et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

1. Démontrer que, pour tout segment $[a,b] \subset [0,1[$, $f_{n|[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f_{|[a,b]}$.
2. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $[0,1[$.

Exercice 17. — Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\dfrac{n\,x}{n+1}\right) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On notera $f \in \mathcal{F}(\,]0,+\infty[,\mathbf{R})$ cette limite simple.
2. Démontrer que, pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $f_{n|[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f_{|[a,b]}$.
3. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $]0,+\infty[$.

6. Synthèse sur la convergence d'une suite de fonctions définies sur une partie de R

Soient A une partie de $\mathbf{R}$, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(A,\mathbf{K})$.

Définition 18. — *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de A, ce que l'on note $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} f$, si*

$$\forall\,[a,b] \subset A \quad f_{n|[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f_{|[a,b]}$$

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CUK}} f \arrow[d, Rightarrow] \\ & f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \end{tikzcd}$$

Aucune des implications réciproques du diagramme ci-dessus n'est vraie.

7. La convergence simple n'est pas associée à une norme (HP)

7.1. Topologie sur un ensemble

Définition 19. — *Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X, appelées ouverts, vérifiant les trois axiomes suivants.*

(T1) Les ensembles X et $\varnothing$ sont ouverts.

$$X \in \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \varnothing \in \mathcal{O}$$

(T2) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

$$\forall\, p \in \mathbf{N}^* \quad \forall\,(U_1,\ldots,U_p) \in \mathcal{O}^p \quad \bigcap_{k=1}^{p} U_k \in \mathcal{O}$$

(T3) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

$$\forall\,(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{O}^I \quad \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$$

Exemple 20. — Si X est un ensemble, alors $\{X,\varnothing\}$ est une topologie sur X, appelée topologie grossière.

Exemple 21. — Si X est un ensemble, alors $\mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X, appelée topologie discrète.

Exemple 22. — Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie U de E est dite ouverte si :

$$\forall\, x \in U \quad \exists\, r_x > 0 \quad B(x,r_x) \subset U$$

L'ensemble $\mathcal{O}$ des parties ouvertes de E définit une topologie sur E, i.e. vérifie les axiomes T1, T2 et T3.

7.2. Topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble

Proposition 23. — *Soient X un ensemble et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de X. Nous définissons l'ensemble*

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j \ : \ n \in \mathbf{N}^* \text{ et } (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n \right\} \qquad [\textit{ensemble des intersections finies d'éléments de } \mathcal{A}]$$

et l'ensemble

$$\mathcal{T} = \left\{ C \in \mathcal{P}(X) \ : \ \exists\, (B_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}^I, \ C = \bigcup_{i \in I} B_i \right\} \qquad [\textit{ensemble des réunions quelconques d'éléments de } \mathcal{B}].$$

1. *L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$ est une topologie sur X qui contient $\mathcal{A}$, i.e. dont tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont ouverts.*
2. *Parmi toutes les topologies de X contenant $\mathcal{A}$, $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion). On l'appelle topologie engendrée par $\mathcal{A}$.*
3. *Un ouvert de la topologie engendrée par $\mathcal{A}$ est donc $\varnothing$ ou X ou une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$.*

Démonstration.

- *L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$ vérifie l'axiome (T1).* Clair.
- *L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$ vérifie l'axiome (T2).* Soit $U_1, \ldots, U_n$ un nombre fini d'éléments de $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$. Nous démontrons que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

  (i) S'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $U_{k_0} = \varnothing$, alors $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k = \varnothing \in \mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

  (ii) S'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $U_{k_0} = X$, alors $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k = \bigcap_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{k_0\}} U_k$.

  (iii) D'après (i) et (ii), nous pouvons supposer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $U_k \in \mathcal{T}$. Ainsi

  $$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \exists\, (B_{k,i_k})_{i_k \in I_k} \in \mathcal{B}^{I_k}, \quad U_k = \bigcup_{i_k \in I_k} B_{k,i_k}.$$

  Alors

  $$\bigcap_{k=1}^{n} U_k = \bigcap_{k=1}^{n} \left(\bigcup_{i_k \in I_k} B_{k,i_k} \right) = \bigcup_{(i_1, \ldots, i_n) \in I_1 \times \ldots \times I_n} \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_{k,i_k} \right)$$

  Comme $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et $\mathcal{T}$ est stable par réunion quelconque, il vient $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{T}$.

- *L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$ vérifie l'axiome (T3).* Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$. Nous démontrons que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

  (iv) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} = X$, alors $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i = X \in \mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

  (v) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} = \varnothing$, alors $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} U_i$.

  (vi) D'après (iv) et (v), nous pouvons supposer que, pour tout $i \in I$, $U_i \in \mathcal{T}$. Ainsi

  $$\forall\, i \in I, \quad \exists\, (B_{i,j_i})_{j_i \in J_i} \in \mathcal{B}^{J_i}, \quad U_i = \bigcup_{j_i \in J_i} B_{i,j_i}.$$

  Alors

  $$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j_i \in J_i} B_{i,j_i} \right).$$

  Comme $\mathcal{T}$ est stable par réunion quelconque, il vient $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

- *Caractère minimal de la topologie $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$.* Tout élément de $\mathcal{A}$ est élément de $\mathcal{B}$ donc, *a fortiori*, appartient à $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$. La topologie $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\}$ contient donc $\mathcal{A}$.
  Soit $\mathcal{O}$ une topologie qui contient $\mathcal{A}$. Nous démontrons que $\mathcal{T} \cup \{\varnothing, X\} \subset \mathcal{O}$.
  D'après (T1), X et $\varnothing$ appartiennent à $\mathcal{O}$.
  D'après (T2), $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$. Alors, d'après (T3), $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$.

□

Remarque 24. — Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé tel que $E \neq \{0_E\}$. La topologie $\mathcal{O}$ associée, définie dans l'exemple 22, est la topologie engendrée par :

$$\{B(x,r)\ :\ (x,r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}\}$$

i.e. la plus petite topologie contenant toutes les boules ouvertes. Un ouvert de $\mathcal{O}$ est une union quelconque d'intersections finies de boules ouvertes (E et $\varnothing$ peuvent s'écrire ainsi).

7.3. Convergence d'une suite pour une topologie

Définition 25. — *Soient X un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X et $\ell \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ pour la topologie $\mathcal{O}$, et on note $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} \ell$, si*

$$\forall U \in \mathcal{O} \quad (\ell \in U \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad x_n \in U)$$

Exemple 26. — Si X est un ensemble muni de la topologie grossière, alors toute suite d'éléments de X converge vers tout point de X.

Exemple 27. — Si X est un ensemble muni de la topologie discrète, alors une suite d'éléments de X converge si et seulement si elle est stationnaire.

7.4. Convergence d'une suite pour une topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble

Proposition 28. — *Soient X un ensemble, $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de X, $\mathcal{O}$ la topologie engendrée par $\mathcal{A}$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X et $\ell \in X$. Alors*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{A} \quad (\ell \in U \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad x_n \in U)$$

Démonstration.

- *Implication directe.* Elle est claire car la topologie $\mathcal{O}$ engendrée par $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{A}$.
- *Implication réciproque.* Supposons

  $$(\star) \qquad \forall U \in \mathcal{A} \quad (\ell \in U \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad x_n \in U)\,.$$

  Soit $V \in \mathcal{O}$ tel que $\ell \in V$. D'après la proposition 23, $V = X$ ou V est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$. Nous démontrons

  $$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad x_n \in V$$

  Si $V = X$, alors $N = 0$ convient. Nous supposons désormais que V s'écrit

  $$V = \bigcup_{i\in I} \left(\bigcap_{j=1}^{p_i} A_{i,j} \right)$$

  où, pour tout $i \in I$, $p_i \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $j \in [\![1, p_i]\!]$, $A_{i,j} \in \mathcal{A}$. Comme $\ell \in V$

  $$\exists i_0 \in I \quad \ell \in \bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} A_{i_0,j}.$$

  D'après $(\star)$

  $$\forall j \in [\![1, p_{i_0}]\!] \quad \exists N_j \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N_j \quad x_n \in A_{i_0,j}.$$

  En posant $N := \max\{N_j\ :\ j \in [\![1, p_{i_0}]\!]\}$, il vient :

  $$\forall n \geqslant N \quad x_n \in \bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} A_{i_0,j}.$$

□

Exemple 29. — Soit E est un espace vectoriel normé et $\mathcal{O}$ est la topologie associée à une norme $||\cdot||$ sur E, qui est engendrée par toutes les boules ouvertes. Alors on vérifie que, pour tout $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, pour tout $\ell \in E$

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} \ell$$

où

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} \ell \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad ||x_n - \ell|| < \varepsilon)$$

7.5. Partie dense pour une topologie

Définition 30. — *Soient X un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et D une partie de X. L'ensemble D est dense dans X pour la topologie $\mathcal{O}$ si*

$$\forall U \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\} \quad U \cap D \neq \varnothing$$

7.6. Partie séquentiellement dense pour une topologie

Définition 31. — *Soient X un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et S une partie de X. L'ensemble S est séquentiellement dense dans X pour la topologie $\mathcal{O}$ si :*

$$\forall x \in X \quad \exists (s_n)_{n\in\mathbf{N}} \in S^{\mathbf{N}} \quad s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} x.$$

7.7. La séquentielle densité implique la densité

Proposition 32. — *Soient X un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et S une partie de X. Si S est séquentiellement dense dans X pour la topologie $\mathcal{O}$, alors S est dense dans X pour la topologie $\mathcal{O}$.*

Démonstration. Supposons S séquentiellement dense dans X pour la topologie $\mathcal{O}$.
Soit $U \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}$. Nous démontrons $U \cap S \neq \varnothing$.
Comme U est non vide, il existe $x \in U$.
Par hypothèse sur S, il existe $(s_n)_{n\in\mathbf{N}} \in S^n$ telle que $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} x$.
Comme U est un ouvert de $\mathcal{O}$ contenant x :

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad s_n \in U.$$

En particulier, $s_N \in U$ et donc $U \cap S \neq \varnothing$.

□

7.8. Séquentielle densité versus densité dans un K-espace vectoriel normé

Proposition 33. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, $\mathcal{O}$ la topologie associée sur E et D une partie de E. Alors D est séquentiellement dense dans E pour la topologie $\mathcal{O}$ si et seulement si D est dense dans E pour la topologie $\mathcal{O}$.*

Démonstration.

- *Implication directe.* Elle a déjà été établie (proposition 32).
- *Implication réciproque.* Supposons que la partie D est dense dans E pour la topologie $\mathcal{O}$.
  Fixons un vecteur x de E. Nous démontrons qu'il existe $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in D^{\mathbf{N}}$ telle que $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} x$.
  Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La boule ouverte $B(x, 1/n)$ est un ouvert non vide de la topologie $\mathcal{O}$. Par hypothèse sur D, il existe donc $d_n \in B(x, 1/n) \cap D$.
  Nous disposons ainsi d'une suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in D^{\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $||d_n - x|| \leqslant 1/n$.
  Par théorème d'encadrement, la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers x pour la norme $||\cdot||$, donc pour la topologie $\mathcal{O}$ associée.

□

7.9. Critère pour qu'une topologie ne provienne pas d'une norme

Remarque 34. — D'après la proposition précédente, si E est un espace vectoriel muni d'une topologie $\mathcal{O}$ possédant une partie dense, mais non-séquentiellement dense, alors la topologie $\mathcal{O}$ n'est associée à aucune norme.

7.10. Topologie de la convergence simple

Définition 35. — *Pour tout $(x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$, on note $V(x,z,\varepsilon)$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{K}$ dont la valeur en x est éloignée de z d'au plus ε, i.e.*

$$V(x,z,\varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ |g(x)-z| < \varepsilon\} \subset \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$$

et on note $\mathcal{T}$ la topologie sur $\mathcal{F}(X,\mathbf{K})$ engendrée par :

$$\{V(x,z,\varepsilon) \ : \ (x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\}.$$

Proposition 36. — *Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$. Alors :*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} f \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{T}} f$$

où $\mathcal{T}$ est la topologie sur $\mathcal{F}(X,\mathbf{K})$ définie en 35.

Démonstration.

- *Implication directe.* Supposons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} f$. Nous démontrons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{T}} f$. Comme la topologie $\mathcal{T}$ est engendrée par

  $$\{V(x,z,\varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ |g(x)-z| < \varepsilon\} \ : \ (x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\}$$

  la proposition 28 nous livre qu'il suffit de prouver que :

  $$\forall\, (x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}, \quad (f \in V(x,z,\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad f_n \in V(x,z,\varepsilon)).$$

  Soit $(x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que $f \in V(x,z,\varepsilon)$, i.e. :

  $$|f(x)-z| < \varepsilon.$$

  Comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} f$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} f(x)$. Puisque $\varepsilon - |f(x)-z| > 0$:

  $$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon - |f(x)-z|.$$

  Soit $n \geqslant N$. Nous observons que :

  $$|f_n(x)-z| = |f_n(x)-f(x)+f(x)-z| \leqslant |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-z| \leqslant \varepsilon - |f(x)-z| + |f(x)-z| = \varepsilon$$

  ce qui implique que $f_n \in V(x,z,\varepsilon)$.

- *Implication réciproque.* Supposons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{T}} f$. Nous démontrons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} f$.
  Soit $x \in X$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme :

  $$V(x,f(x),\varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ |g(x)-f(x)| < \varepsilon\}$$

  est un ouvert de la topologie $\mathcal{O}$ qui contient f :

  $$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad f_n \in V(x,f(x),\varepsilon).$$

  Par définition de $V(x,f(x),\varepsilon)$, nous en déduisons que :

  $$\forall\, n \geqslant N, \quad |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon.$$

□

7.11. La topologie de la convergence simple ne provient pas d'une norme

Définition 37. — *Le support d'une fonction $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$ est défini par :*

$$\mathrm{supp}(f) := \{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\} \subset X.$$

Proposition 38. — *Supposons que X est un ensemble infini non-dénombrable, e.g. X est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$. Alors l'ensemble :*

$$D := \{f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ \mathrm{supp}(f) \text{ est fini}\} \subset \mathcal{F}(X,\mathbf{K})$$

est dense pour la topologie $\mathcal{T}$, mais non séquentiellement dense pour la topologie $\mathcal{T}$.

Démonstration.

- *L'ensemble D est dense pour la topologie $\mathcal{T}$.* Soit U un ouvert non vide de la topologie $\mathcal{T}$. D'après la proposition 23, $U = \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ ou U est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments

$$\{V(x,z,\varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ |g(x) - z| < \varepsilon\} \ : \ (x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\}$$

Nous démontrons que $U \cap D \neq \varnothing$
Si $U = \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ alors $U \cap D = D \neq \varnothing$.
Sinon, U s'écrit :

$$U = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{p_i} V\left(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}\right) \right)$$

où, pour tout $i \in I$, $p_i \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $j \in [\![1, p_i]\!]$, $(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$.
Fixons $i_0 \in I$. Alors la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p_{i_0}} z_{i_0,j} \cdot \mathbb{1}_{x_{i_0,j}}(x) \end{array} \right.$$

appartient à $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} V\left(x_{i_0,j}, z_{i_0,j}, \varepsilon_{i_0,j}\right)$ et a un support fini puisque :

$$\operatorname{supp}(f) \subset \{x_{i_0,j} \ : \ j \in [\![1, p_{i_0}]\!]\}\,.$$

Ainsi :

$$f \in \left(\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{p_i} V\left(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}\right) \right) \right) \cap D.$$

- *L'ensemble D n'est pas séquentiellement dense pour la topologie $\mathcal{T}$.* Nous raisonnons par l'absurde et supposons que D est séquentiellement dense pour la topologie $\mathcal{T}$. Si f est la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

il existe donc une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{T}} f$, i.e., d'après la proposition 36, telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CS}} f$.
L'ensemble :

$$E := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{supp}(f_n)$$

est fini ou dénombrable comme réunion dénombrable d'ensemble finis. Comme X est infini non-dénombrable, E est une partie stricte de X. Il existe donc $x_0 \in X \setminus E$. Ce point x_0 de X vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad f_n(x_0) = 0$$

et donc :

$$f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{|\cdot|} 0 \neq 1 = f(x_0) \qquad [\text{contradiction}]\,.$$

□

8. Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 39. — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array} \right.$$

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur X, i.e si

pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

Dans ce cas, nous définissons la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ *par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right. \qquad \big[\textit{limite simple de la suite de fonctions } (S_n)_{n\in\mathbf{N}}\big]$$

Exercice 40. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{e^{in\theta}}{n^2} \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

Exercice 41. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & n\,x^n \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et reconnaître la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Exercice 42. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n+1}\,x^n}{n} \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1]$ et reconnaître la fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

9. Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 43. — *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$*. Posons pour tout* $n \in \mathbf{N}$

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array} \right.$$

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément sur* X*, si la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément sur* X*.*

Proposition 44. — *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$*. Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* X *alors elle converge simplement sur* X*.*

10. CU d'une série de fonctions versus CU de la suite des restes vers la fonction nulle

Proposition 45. — *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ *telle que la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement sur* X*. La série converge uniformément sur* X *si et seulement si*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right. \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0_{\mathcal{F}(X,\mathbf{K})} \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 46. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{e^{in\theta}}{n^2} \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

Exercice 47. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & n\, x^n \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

Exercice 48. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n+1}\, x^n}{n} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1]$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1]$.

Exercice 49. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

et la relation de récurrence :

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{f_0}{f_n}\right)$$

valable pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x > 0$, $f_n(x) \geqslant \sqrt{x}$.
2. Soit $x > 0$. Posons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad g_n(x) = \frac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}.$$

   Exprimer $g_{n+1}(x)$ en fonction de $g_n(x)$.
3. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

11. Convergence normale d'une série de fonctions bornées

Définition 50. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{B}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. La série de fonctions $\sum f_n$ est dite normalement convergente sur X, si la série numérique $\sum ||\, f_n \,||_{\infty,X}$ est convergente.*

Exercice 51. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{e^{in\theta}}{n^2} \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement.

Exercice 52. — Soient $\alpha > 1$ et $A := \{z \in \mathbf{C} \ : \ \mathrm{Re}\,(z) \geqslant \alpha\}$. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ s & \longmapsto & \dfrac{1}{n^s} \end{array} \right.$$

Exercice 53. — Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^2 + \sin(nx)} \end{array} \right.$$

Exercice 54. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n\, x}{(1+x^2)^n} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Proposition 55. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{B}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Alors*

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } X \quad \Longrightarrow \quad \sum |f_n| \text{ converge simplement sur } X$$

et donc

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } X \quad \Longrightarrow \quad \sum f_n \text{ converge simplement sur } X$$

Une série de fonctions peut converger simplement, sans converger normalement. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

D'après les résultats sur les séries géométriques, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}. \end{array} \right.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction f_n étant croissante sur $[0, 1[$, nous en déduisons $||\, f_n \,||_{\infty, [0,1[} = 1$. La série numérique $\sum ||\, f_n \,||_{\infty, [0,1[}$ est donc grossièrement divergente. La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $[0, 1[$.

Théorème 56. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{B}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Alors*

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } X \quad \Longrightarrow \quad \sum f_n \text{ converge uniformément sur } X$$

Une série de fonctions peut converger uniformément sans converger normalement. Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n+1}\, x^n}{n} \end{array} \right.$$

D'après le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\left|\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n \right|\right|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Cependant, elle ne converge par normalement sur $[0,1]$ puisque, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $||\, f_n\, ||_{\infty,[0,1]} = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 57. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$, où $\alpha > 0$.
2. En déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.

Exemple 58. — La série de fonctions de terme général

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(n+x) - \arctan(n) \end{array} \right.$$

converge normalement sur tout segment de $\mathbf{R}$.

- Il suffit de démontrer que, pour tout $a > 0$, la série numérique $\sum ||\, f_n\, ||_{\infty,[-a,a]}$ converge. Fixons un réel $a > 0$.
- Par croissance de la fonction arctan, pour tout $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times [-a,a]$

  $$\underbrace{\arctan(n-a) - \arctan(n+a)}_{-(\arctan(n+a)-\arctan(n-a))} \leqslant \underbrace{\arctan(n+x) - \arctan(n)}_{f_n(x)} \leqslant \arctan(n+a) - \arctan(n-a)$$

  d'où

  $$|f_n(x)| \leqslant \underbrace{\arctan(n+a) - \arctan(n-a)}_{\text{indépendant de } x}$$

  Par passage à la borne supérieure sur les réels $x \in [-a,a]$, nous obtenons

  $$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad 0 \leqslant ||\, f_n\, ||_{\infty,[-a,a]} \leqslant \arctan(n+a) - \arctan(n-a)$$

  D'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs, il suffit de prouver que la série numérique $\sum \arctan(n+a) - \arctan(n-a)$ converge.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $n > a$. La fonction $g_n \colon x \longmapsto \arctan(n+x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-a,a]$. D'après l'inégalité des accroissements finis

  $$\arctan(n+a) - \arctan(n-a) = |g_n(a) - g_n(-a)| \leqslant ||\, g_n'\, ||_{\infty,[-a,a]}\; 2\,a$$

  Pour tout $x \in [-a,a]$, $n+x > n-a > 0$. D'autre part, la fonction carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$. Nous en déduisons que la fonction positive $g_n' \colon x \longmapsto \dfrac{1}{1+(n+x)^2}$ est décroissante sur $[-a,a]$, donc

  $$||\, g_n'\, ||_{\infty,[-a,a]} = g_n'(-a) = \frac{1}{1+(n-a)^2}$$

  Ainsi

  $$\forall\, n > a \quad 0 \leqslant \arctan(n+a) - \arctan(n-a) \leqslant \frac{2\,a}{1+(n-a)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{2\,a}{n^2}}_{\geqslant 0}$$

  Nous concluons alors en appliquant le critère de Riemann et le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Exercice 59. — Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} \end{array} \right.$$

sur tout segment de $]0,+\infty[$.

Exercice 60. — Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \end{array} \right.$$

sur tout segment de $]-1,1[$.

12. Synthèse sur la convergence d'une séries de fonctions bornées sur une partie de R

Soient A une partie de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{B}(A,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$.

Définition 61. — *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* A*, ce que l'on note* $\sum f_n$ CUK *si, pour tout segment* $[a,b]$ *inclus dans* A*, la série de fonctions* $\sum f_{n|[a,b]}$ *converge uniformement sur* $[a,b]$.

Définition 62. — *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur tout segment de* A*, ce que l'on note* $\sum f_n$ CNK *si, pour tout segment* $[a,b]$ *inclus dans* A*, la série de fonctions* $\sum f_{n|[a,b]}$ *converge normalement sur* $[a,b]$.

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\sum f_n \text{ CN} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \sum f_n \text{ CU} \arrow[d, Rightarrow] \\
\sum f_n \text{ CNK} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \sum f_n \text{ CUK} \arrow[d, Rightarrow] \\
\sum |f_n| \text{ CS} \arrow[r, Rightarrow] & \sum f_n \text{ CS}
\end{tikzcd}$$

Aucune des implications réciproques du diagramme ci-dessus n'est vraie.

13. Approximation uniforme

13.1. Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Notation. — Soient a,b des réels tels que $a<b$. On pose

- $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathbf{K}^{[a,b]} \ :\ f \text{ est en escalier sur } [a,b] \right\}$
- $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathbf{K}^{[a,b]} \ :\ f \text{ est continue par morceaux sur } [a,b] \right\}$

Rappel. — L'application

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup\{|f(x)| \ :\ x \in [a,b]\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$.

Théorème 63. — *Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$, i.e. l'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$ pour la norme $||\cdot||_\infty$.*

Exercice 64. — Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$. On pose, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$I_\lambda(f) := \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda t}\ \mathrm{d}t$$

Démontrer que

$$I_\lambda(f) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0 \qquad \text{[lemme de Riemann-Lebesgue]}$$

13.2. Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Notation. — Soient a, b des réels tels que $a < b$. On pose

- $\mathcal{P}([a,b],\mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathbf{K}^{[a,b]}\ :\ f \text{ est polynomiale} \right\}$
- $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathbf{K}^{[a,b]}\ :\ f \text{ est continue sur } [a,b] \right\}$

Rappel. — L'application

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup\{|f(x)|\ :\ x \in [a,b]\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})$.

Théorème 65. — *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$, i.e. l'ensemble $\mathcal{P}([a,b],\mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})$ pour la norme $||\cdot||_\infty$ (théorème de Weierstraß).*

Exercice 66. — Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \int_a^b x^n\, f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

On se propose de démontrer qu'alors $f = 0_{\mathbf{R}^{[a,b]}}$ (théorème des moments).

1. Démontrer que l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty\right) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ g & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

   est continue.
2. Que vaut l'application φ sur le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ formé par les fonctions polynomiales ?
3. Conclure.

Exercice 67. — Soient $p \in \mathbf{N}$ et une fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, qui est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p. Démontrer que la fonction f est polynomiale.

Exercice 68. — Soit une fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, qui est limite uniforme d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}$.

1. Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, la fonction $P_n - P_N$ est bornée sur $\mathbf{R}$.
2. En déduire que
$$\forall\, n \geqslant N \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \quad P_n(x) = P_N(x) + P_n(0) - P_N(0)$$
3. En déduire que la fonction f est polynomiale.