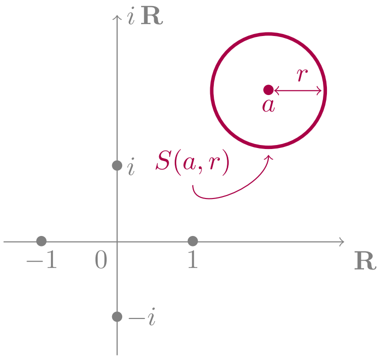
Séries Entières

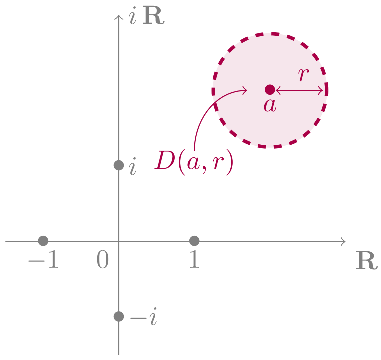
Notation. — Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r \in]0, +\infty[$. On note :

- $S(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r ;
- $D(a, r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r ;
- $\overline{D(a, r)} = D(a, r) \sqcup S(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r.

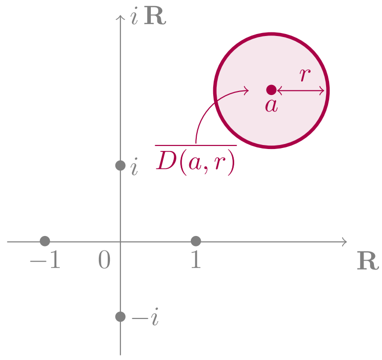
$S(a, r) := \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z - a| = r\}$



$D(a, r) := \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z - a| < r\}$



$\overline{D(a, r)} := \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z - a| \leqslant r\}$



1. Notion de série entière et problématique

Définition 1. — *Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $z \in \mathbf{C}$. La série $\sum a_n \, z^n$ est appelée série entière de coefficients a_n, $n \in \mathbf{N}$.*

Problématique. — Étant donnée une série entière $\sum a_n \, z^n$, on s'intéresse aux questions suivantes.

(A) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbf{C}$ la série numérique $\sum a_n \, z^n$ converge-t-elle ? L'ensemble

$$\mathcal{D} := \left\{ z \in \mathbf{C} \ : \ \text{la série numérique } \sum a_n \, z^n \text{ converge} \right\}$$

est appelé ensemble de définition de la série entière $\sum a_n \, z^n$ (il peut être réduit au singleton $\{0\}$).

(B) Quel est la nature de la convergence de la séries de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & a_n \, z^n \end{array} \right.$$

sur $\mathcal{D}$, ou sur des parties de $\mathcal{D}$: simple, uniforme, uniforme sur tout compact, normale, normal sur tout compact ?

(C) Si tous les a_n sont réels, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \cap \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n \end{array} \right.$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une partie de $\mathcal{D} \cap \mathbf{R}$? Si oui, a-t-on pour tout $p \in \mathbf{N}$ et certains réels x :

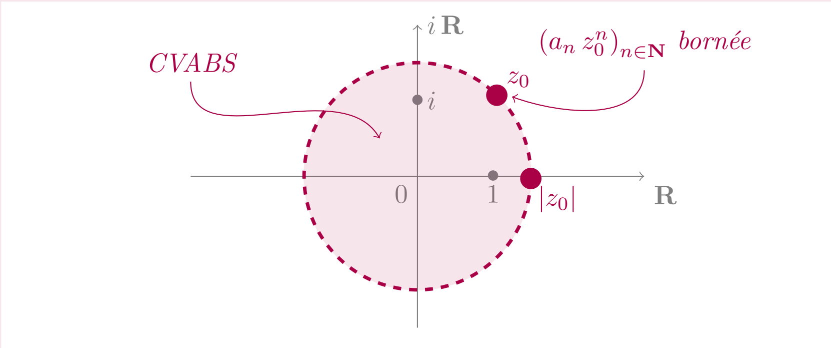
$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} \, a_n \, x^{n-p} \qquad ?$$

2. Rayon de convergence d'une série entière

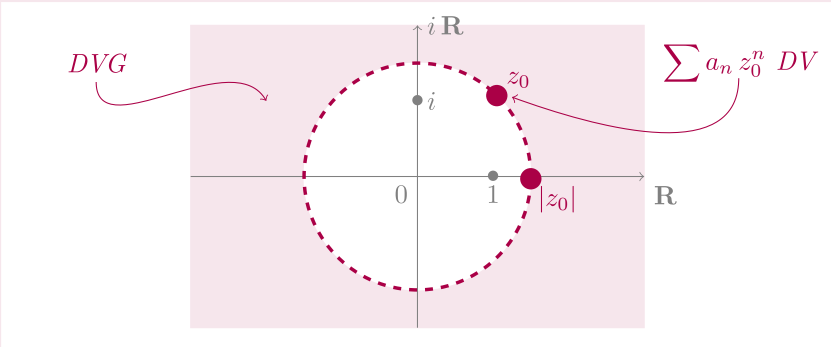
2.1. Lemme d'Abel

Lemme 2. — *Soient (a_n) une suite de nombres complexes et $z_0 \in \mathbf{C}^*$.*

1. *Supposons que la suite $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors, pour tout $z \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument.*



2. *Supposons que la série $\sum a_n\, z_0^n$ diverge. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > |z_0|$, la série numérique $\sum a_n\, z^n$ diverge grossièrement.*



2.2. Définition du rayon de convergence d'une série entière

Définition 3. — *Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et :*

$$I := \left\{ r \in \mathbf{R}_+ \ : \ \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\} \qquad [\text{intervalle non vide de } \mathbf{R}].$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, noté $R\left(\sum a_n z^n\right)$, est défini par :

$$R\left(\sum a_n z^n\right) := \begin{cases} \sup(I) & \text{si } I \text{ est majoré ;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la définition, si $\sum a_n z^n$ est une série entière, alors

$$R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum |a_n|\, z^n\right) \qquad [\text{le rayon de convergence « ne voit pas » les arguments des coefficients}]$$

Exercice 4. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$.

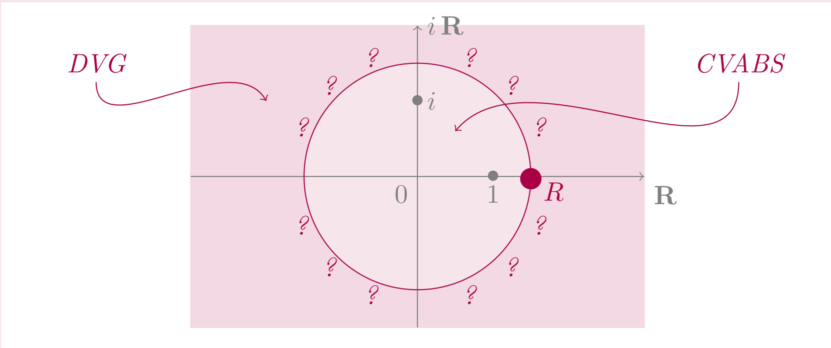
Exercice 5. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$.

Exercice 6. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$.

2.3. Caractérisation du rayon de convergence

Proposition 7. — *Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière.*

1. *Son rayon de convergence est $+\infty$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbf{C}$, la série numérique $\sum a_n\, z^n$ converge absolument.*
2. *Si son rayon de convergence n'est pas $+\infty$, alors son rayon de convergence est l'unique $R \in \mathbf{R}_+$ tel que :*
   - **(a)** *pour tout $z \in D(0,R)$, la série $\sum a_n\, z^n$ converge ; absolument*
   - **(b)** *pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n\, z^n$ diverge grossièrement.*



Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n\, z^n$, on peut étudier la nature de la série numérique $\sum a_n\, z^n$, pour tout $z \in \mathbf{C}$.

- Si la série numérique $\sum a_n\, z^n$ converge, pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors $R\left(\sum a_n z^n\right) = +\infty$.
- Si la série numérique $\sum a_n\, z^n$ converge uniquement pour $z = 0$, alors $R\left(\sum a_n z^n\right) = 0$.
- Si l'étude fait apparaître un réel $R > 0$ tel que

$$\forall\, z \in \mathbf{C} \setminus S(0,R) \qquad \begin{cases} \text{la série numérique } \sum a_n\, z^n \text{ converge absolument} & \text{si } |z| < R \\ \text{la série numérique } \sum a_n\, z^n \text{ diverge grossièrement} & \text{si } |z| > R \end{cases}$$

  alors $R\left(\sum a_n z^n\right) = R$.

On pourra parfois appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques pour réaliser l'étude.

Exercice 8. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{2^n}$.

Exercice 9. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n)\, z^n$.

Exercice 10. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n!\, z^n$.

Exercice 11. — Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha\, z^n$.

Exercice 12. — Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\, z^{2n+1}$.

2.4. Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence

Définition 13. — *Soit* $\sum a_n\, z^n$ *de rayon de convergence* $R \in]0, +\infty]$.

1. *L'ensemble* $D(0,R) := \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| < R\}$ *est appelé disque ouvert de convergence de la série entière* $\sum a_n\, z^n$.

2. *L'ensemble* $]-R, R[:= \{x \in \mathbf{R} \,:\, -R < x < R\}$ *est appelé intervalle ouvert de convergence de la série entière* $\sum a_n\, z^n$.

Considérons une série entière $\sum a_n\, z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. *A priori* on ne peut rien dire quant à la convergence de la série numérique $\sum a_n\, z^n$ lorsque z est un complexe vérifiant $|z| = R$. Considérons deux exemples, pour observer que différents comportement peuvent apparaître.

(a) La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1. Elle converge pour $z = -1$ (série harmonique alternée) et diverge pour $z = 1$ (série harmonique). On connaît même le comportement de la série numérique $\sum \frac{z^n}{n}$ pour tout complexe z de module 1. En effet, grâce à une transformation d'Abel, on peut établir que, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \in]0, 2\pi[$$

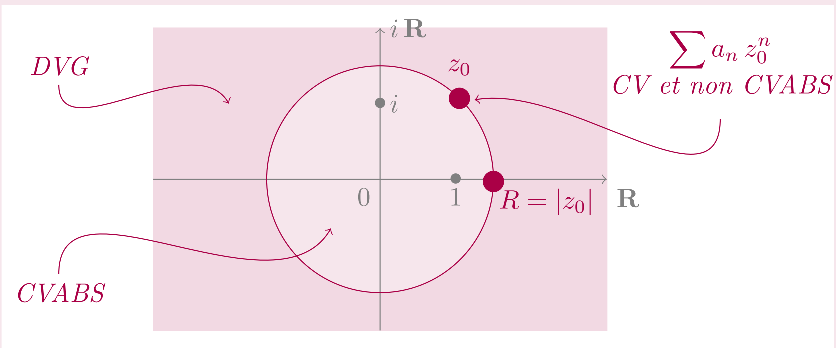
(b) La série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$ a également pour rayon de convergence 1. Elle converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = 1$.

3. Calcul pratique du rayon de convergence

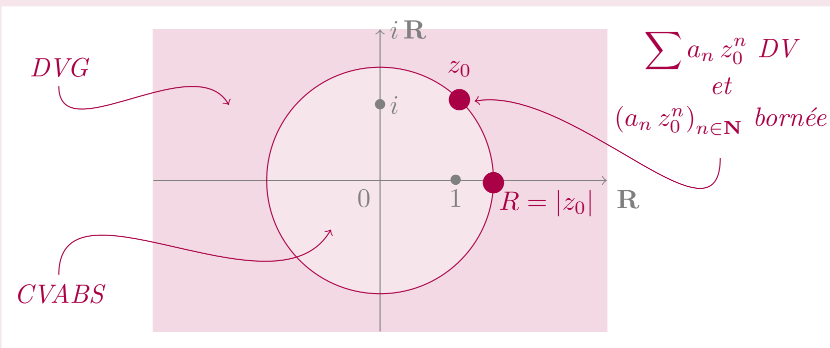
3.1. Détermination du rayon de convergence à partir d'un point atypique

Proposition 14. — *Considérons une série entière* $\sum a_n\, z^n$ *de rayon de convergence noté* R *et* $z_0 \in \mathbf{C}$.

1. *Si la série numérique* $\sum a_n\, z_0^n$ *est convergente, mais non absolument convergente, alors* $R = |z_0|$.



2. *Si la série numérique* $\sum a_n\, z_0^n$ *est divergente et la suite* $(a_n\, z_0^n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est bornée, alors* $R = |z_0|$.



3.2. Règle de d'Alembert pour les séries entières

Convention. — Nous posons $\dfrac{1}{+\infty} := 0$ et $\dfrac{1}{0} := +\infty$.

Théorème 15. — *Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière dont les coefficients a_n sont supposés tous non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que :*

$$\exists\, \ell \in [0,+\infty] \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Alors la série entière $\sum a_n\, z^n$ a pour rayon de convergence $R = \dfrac{1}{\ell} \in [0,+\infty]$.

Le théorème 15 n'admet pas de réciproque. Par exemple, la série entière $\sum n^{(-1)^n}\, z^n$ a pour rayon de convergence 1 (cf. exercice 27) pourtant la suite de terme général

$$\left|\frac{(n+1)^{(-1)^{n+1}}}{n^{(-1)^n}}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2+n} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2mm] n^2+n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ne converge pas vers 1, puisqu'elle n'admet pas de limite.

Attention aux séries entières lacunaires, qui sont parfois écrites de manière pouvant nous tromper. Par exemple les coefficients a_n de la série entière $\sum z^{n^2}$ sont définis par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La règle de d'Alembert pour les séries entières ne peut pas être appliquée, car les coefficients ne sont pas non nuls à partir d'un certain rang. Toutefois, on peut démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$ est 1, à l'aide de la règle de d'Alembert pour les séries numériques, par exemple.

Exercice 16. — Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière, dont les coefficients d'indices pairs a_{2n} sont non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que :

$$\exists\, \ell \in [0,+\infty] \qquad \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n}\, z^{2n}$.

Exercice 17. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^n\, z^{2n}$.

N.B. Le critère de d'Alembert pour les séries entières ou pour les séries numériques est, certes utile en pratique, mais ce n'est pas le seul outil à disposition pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. Nous disposons également :

- de la définition du rayon de convergence (définition 3) ;
- du critère via un point atypique (proposition 14) ;
- du critère de comparaison (proposition 18) suivant.

3.3. Relations de comparaison et rayons de convergence

Proposition 18. — *Soient deux séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.*

1. $|a_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(|b_n|\right) \implies R_a \geqslant R_b$

2. $|a_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(|b_n|\right) \implies R_a \geqslant R_b$

3. $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \implies R_a = R_b$

3.4. Invariance du rayon de convergence par multiplication par n^α

Proposition 19. — *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $\alpha \in \mathbf{R}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon ne convergence.*

3.5. Exemples de calculs de rayons de convergence

Exercice 20. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$.

Exercice 21. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^2 z^n$.

Exercice 22. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{n+2}\, z^n$.

Exercice 23. — Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum P(n)\, z^n$.

Exercice 24. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n!}$.

Exercice 25. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \text{ premier}} \frac{z^n}{3^n}$.

Exercice 26. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$.

Exercice 27. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

Exercice 28. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{ia_n} z^n$.

Exercice 29. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 30. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

4. Somme et produit de Cauchy de séries entières

4.1. Somme de deux séries entières

Proposition 31. — *Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de convergence respectifs R_a et R_b. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.*

1. $R \geqslant \min(R_a, R_b)$
2. *Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.*

Exercice 32. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Supposons que $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ aient même rayon de convergence R. Démontrer que $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.

Exercice 33. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et démontrer que

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x).$$

Exercice 34. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et démontrer que :

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x).$$

4.2. Produit de Cauchy de deux séries entières

Définition 35. — *Le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ est la série entière $\sum c_n\, z^n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.*

Proposition 36. — *Soient deux séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.*

1. *Le rayon de convergence R de leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.*
2. *Pour tout $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Exercice 37. — Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n\, z^n$ est non nul.

Exercice 38. — Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{A} := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \ : \ R\left(\sum a_n z^n \right) > 0 \right\}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Démontrer que $\lambda \cdot a := (\lambda a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$.
2. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Justifier que $a + b := (a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$.
3. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Justifier que $a \star b := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$.
4. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Justifier que $a \star b := b \star a$.
5. Soit $1_{\mathcal{A}} := (\delta_{0,n})_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Justifier que $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ puis que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a \star 1_{\mathcal{A}} = a$.

   D'après 1,2,3, les applications

   $$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda \cdot a \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (a, b) & \longmapsto & a \star b \end{array} \right.$$

   sont bien définies. D'après 4 et 5, la loi interne $\star$ sur $\mathcal{A}$ est commutative et $1_{\mathcal{A}}$ est son élément neutre. On admet que $(\mathcal{A}, \cdot, +, \star)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre.

6. Démontrer que la $\mathbf{C}$-algèbre $(\mathcal{A}, \cdot, +, \star)$ est intègre.
7. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ un élément inversible. Démontrer que $a_0 \neq 0$.

   Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ tel que $a_0 \neq 0$.

8. Justifier qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|a_n| \leqslant A^n$.
9. Justifier qu'il existe une constante $B > A$ telle que, $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{A^k}{B^k} \leqslant |a_0|$.
10. Supposons qu'il existe $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ tel que $a \star b = 1_{\mathcal{A}}$. Déterminer b_0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer b_{n+1} en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.
11. Soit $b = (b_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ la suite définie par la valeur de b_0 et la relation de récurrence obtenues à la question précédente. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|b_n| \leqslant \dfrac{B^n}{|a_0|}$ et en déduire que $b \in \mathcal{A}$.
12. Conclure quant aux éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

5. De la continuité de la somme d'une série entière

5.1. Continuité d'une fonction de la variable complexe

Définition 39. — *Soient A une partie de $\mathbf{C}$ et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbf{C})$.*

1. *Soit $z_0 \in A$. On dit que f est continue en z_0 si*

$$f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} f(z_0) \qquad [\textit{convergence dans } \mathbf{C}]$$

i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall z \in A \quad |z - z_0| \leqslant \alpha \implies |f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon.$$

2. *On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.*

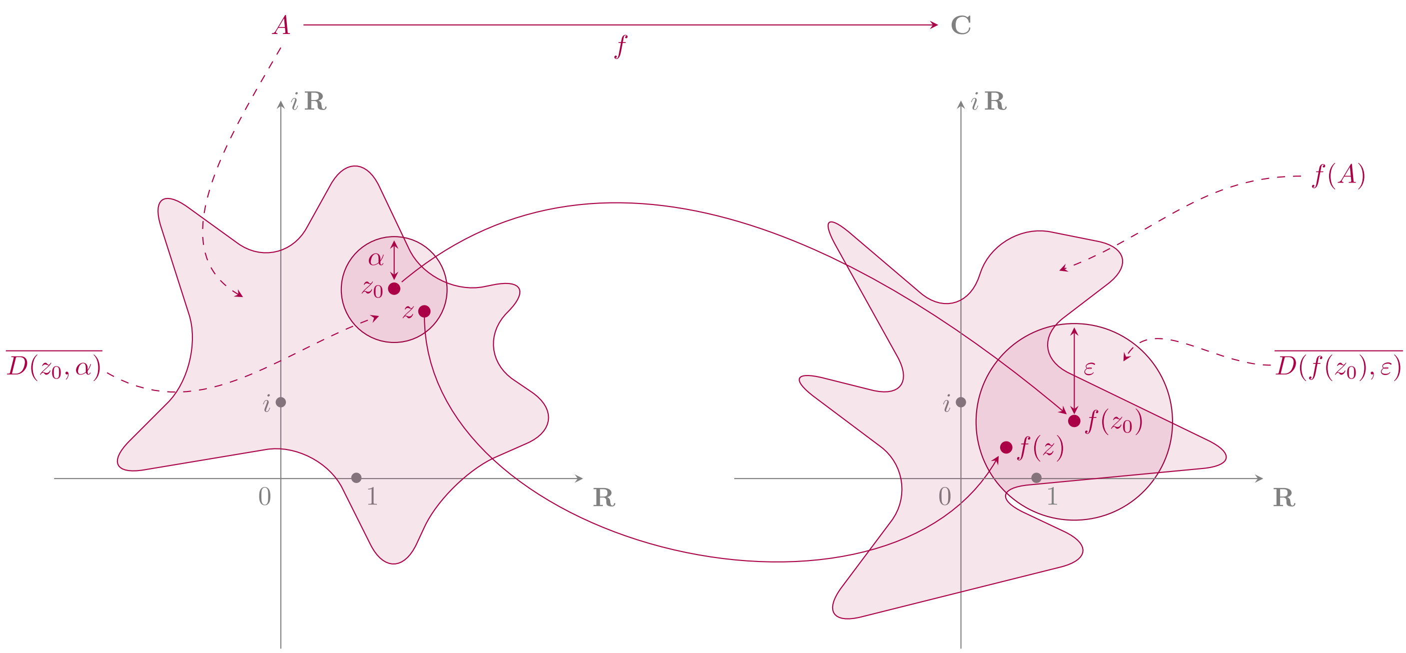
Remarque 40. — Nous pouvons reformuler 39(a) en termes de disques

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > \quad \forall z \in A \cap \overline{D(z_0, \alpha)} \quad f(z) \in \overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad f\left(A \cap \overline{D(z_0, \alpha)}\right) \subset \overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$$

ce qu'on illustre ci-dessous.



Quel que soit le choix du rayon $\varepsilon > 0$ du disque $\overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$, il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que $\overline{D(z_0, \alpha)} \cap A$ est tout entier envoyé dans $\overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$ par f.

Exemple 41. — Si $P \in \mathbf{C}[X]$, alors la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbf{C}$.

5.2. Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence

Théorème 42. — *Soit une série entière* $\sum a_n\, z^n$ *de rayon de convergence noté* $R > 0$. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *on définit la fonction* f_n *par*

$$f_n \colon z \longmapsto a_n\, z^n$$

Pour tout $r \in]0, R[$ *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur le disque fermé* $\overline{D(0,r)}$.

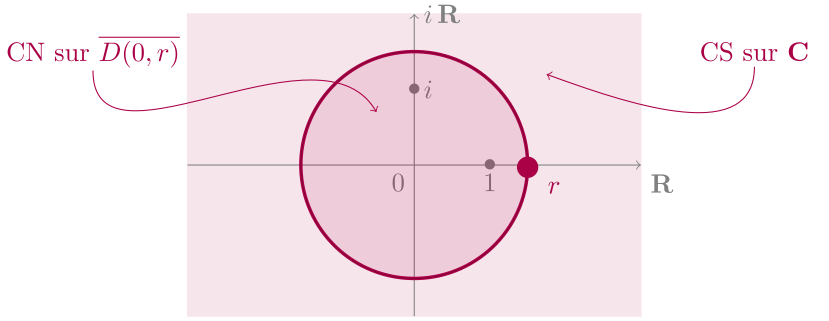
Remarque 43. — Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

La série de fonctions $\sum (z \longmapsto a_n z^n)$

(a) converge simplement sur $\mathbf{C}$;

(b) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$, où $r \in]0, +\infty[$;

(c) ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur $\mathbf{C}$.



Donnons un contre-exemple pour justifier (c). La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum \left(z \longmapsto \frac{z^n}{n!} \right)$ converge uniformément sur $\mathbf{C}$. Alors :

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad \forall\, z \in \mathbf{C} \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant 1$$

En particulier :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}_+ \quad 0 \leqslant \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant 1$$

Ainsi la fonction $x \longmapsto \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$. Contradiction.

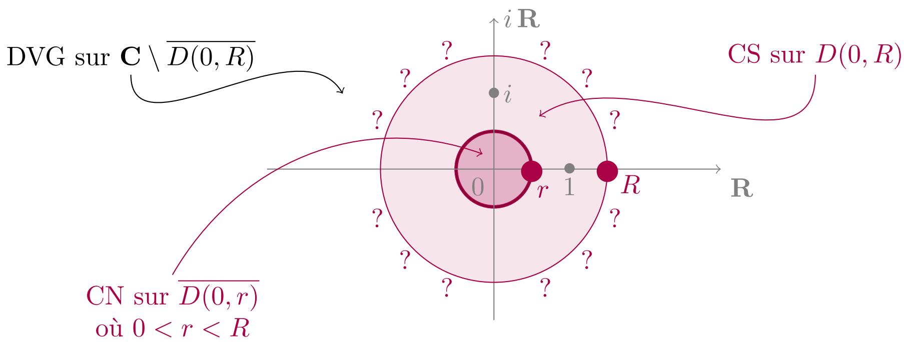
Remarque 44. — Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$.

La série de fonctions $\sum (z \longmapsto a_n z^n)$

(a) converge simplement sur $D(0,R)$;

(b) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$, où $0 < r < R$;

(c) ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur $D(0,R)$.



Pour donner un contre-exemple justifiant (c), considérons la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ de rayon de convergence $R = 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \left(z \longmapsto \frac{z^n}{n} \right)$ converge uniformément sur $D(0,1)$. Alors :

$$\exists\, N \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N \quad \forall\, z \in D(0,1) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{3}.$$

En particulier :

$$\forall\, x \in [0,1[\qquad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^k}{k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{3}$$

d'où

$$\forall\, x \in [0,1[\qquad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^k}{k} \leqslant \frac{1}{3}\ .$$

En faisant tendre x par valeurs inférieures vers 1, il vient :

$$(\star) \qquad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Comme, pour tout $k \in [\![N+1, 2N]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2N}$ nous avons également :

$$(\star\star) \qquad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}\ .$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{3}$. Contradiction.

5.3. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence

Corollaire 45. — *Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.*

1. *Si $R = +\infty$, la fonction :*

$$S \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{C}$.

2. *Si $R \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction :*

$$S \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $D(0,R)$.

Exemple 46. — Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. D'après le corollaire 45, la fonction

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbf{C}$.

6. Théorème d'Abel radial

Exercice 47. — Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n\, R^n$ est absolument convergente.

1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (z \longmapsto a_n\, z^n)$ est normalement convergente sur $\overline{D(0,R)}$.
2. Justifier que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, R^n.$$

Théorème 48. — *Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n\, R^n$ est convergente (non nécessairement absolument convergente). Alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, R^n$$

Éléments de démonstration. Nous établissons le résultat dans le cas où $R = 1$.

i) On pose

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$S_{-1} = 0$ et $S := \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

ii) Soient $x \in [0, 1[$ et $N \in \mathbf{N}$. Par transformation d'Abel

$$(\star) \qquad \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = S_N x^N + (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n$$

iii) De $(\star)$, on déduit que la série numérique $\sum S_n x^n$ converge et que

$$(\star\star) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

iv) De $(\star\star)$, on déduit que

$$(\star\star\star) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - S = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) x^n$$

v) Grâce à $(\star\star\star)$, on établit que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \alpha \in]0, 1[\quad \forall\, x \in]1-\alpha, 1[\quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - S \right| \leqslant \varepsilon$$

$\square$

Exercice 49. —

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\, z^{2n+1}$.
2. Expliciter la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}. \end{array} \right.$$

3. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 50. —

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n$.
2. Expliciter la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n. \end{array} \right.$$

3. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 51. — Soit $\theta \in]0,\pi[$ fixé.

1. Démontrer que la série numérique $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge à l'aide d'une transformation d'Abel.
2. Qu'en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n} z^n$?
3. On rappelle que dans le chapitre « Suites et séries de fonctions 2 », nous avons démontré que

$$\forall x \in [0,1[\quad \arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$$

Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$.

7. Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

7.1. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence

Théorème 52. — *Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S la fonction définie par :*

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

1. *La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.*
2. *Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$ a pour rayon de convergence R et*

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

Exercice 53. — Déterminer le rayon R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\, x^{n-1}$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Exercice 54. — Déterminer le rayon R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 x^n$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = -\frac{x^2+x}{(x-1)^3}.$$

7.2. Primitivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence

Corollaire 55. — *Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S la fonction définie par :*

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *a pour rayon de convergence* R *et*

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad \int_0^x S(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exercice 56. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et démontrer que :

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Exercice 57. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et démontrer que :

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x).$$

7.3. Coefficients d'une série entière versus nombres dérivées successifs

Corollaire 58. — *Soient* $\sum a_n\, x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et* S *la fonction définie par :*

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n. \end{array} \right.$$

Alors :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

d'où le « développement de Taylor infini » suivant :

$$\forall\, x \in]-R, R[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Exercice 59. — Soient $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$. On suppose que :

$$\exists\, \alpha \in\ ]0, \min\{R_a, R_b\}[\quad \forall\, x \in]0, \alpha[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = b_n$.

8. Fonctions développables en séries entières, développements usuels

8.1. Définition d'une fonction développable en série entière

Définition 60. — *Soit un réel* $R \in]0, +\infty]$.

1. *Soient* A *une partie de* $\mathbf{C}$ *contenant* $D(0,R)$ *et une fonction* $f\colon A \longrightarrow \mathbf{C}$. *On dit que* f *est développable en série entière sur* $D(0,R)$ *s'il existe une série entière* $\sum a_n\, x^n$ *de rayon de convergence plus grand que* R *telle que*

$$\forall\, z \in D(0,R) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$$

2. *Soient* A *une partie de* $\mathbf{R}$ *contenant* $]-R, R[$ *et une fonction* $f\colon A \longrightarrow \mathbf{C}$. *On dit que* f *est développable*

en série entière sur $]-R,R[$ s'il existe une série entière $\sum a_n\, x^n$ de rayon de convergence plus grand que R telle que

$$\forall\, x \in]-R,R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

Exercice 61. — Soient I un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Que dire de la fonction f si toutes les dérivées itérées s'annulent en 0 ?

8.2. Développements en série entière des fonctions exp et $z \longmapsto 1/(1-z)$

Exemple 62. — La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) \end{array} \right.$$

est développable en série entière sur $\mathbf{C}$ et

$$\forall\, z \in D(0,1) \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Exemple 63. — La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} D(0,1) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{1-z} \end{array} \right.$$

est développable en série entière sur $D(0,1)$ et

$$\forall\, z \in D(0,1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

8.3. Condition nécessaire, suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière (HP)

Théorème 64. — *Soient I un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction.*

1. *Condition nécessaire. Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.*
2. *Condition suffisante. S'il existe un réel $a > 0$ tel que :*
   (H1) f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$;
   (H2) $\exists\, M \in \mathbf{R} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in]-a,a[\quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M\, \dfrac{n!}{a^n}$ (condition de croissance de Cauchy)
   alors f est développable en série entière au voisinage de 0.

Démonstration. Une somme de série entière étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, d'où la condition nécessaire. Démontrons la condition suffisante et, pour ce faire, supposons qu'il existe un réel $a > 0$ vérifiant (H1) et (H2).

i) Fixons $x \in]-a,a[\setminus\{0\}$. D'après (H1), la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$. Nous pouvons lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\; \mathrm{d}t}_{=:R_n(x)}.$$

ii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Le changement de variable $t = ux$ nous permet d'écrire :

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(ux)\; \mathrm{d}u.$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(ux) \right| \, \mathrm{d}u \\
&\leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} \, M \, \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \, \mathrm{d}u \qquad \text{[d'après (H2)]} \\
&\leqslant M \left| \frac{x}{a} \right|^{n+1} \underbrace{\int_0^1 (n+1)(1-u)^n \, \mathrm{d}u}_{=1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement :

$$R_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

iii) D'après (i) et (ii) :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \, x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x).$$

Donc la série numérique $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n = f(x).$$

Ce résultat vaut également pour $x = 0$.

iv) Remarquons que, comme la série de fonctions $\sum \left(x \longmapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n \right)$ converge simplement sur $]-a, a[$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n$ est supérieur ou égal à a.

□

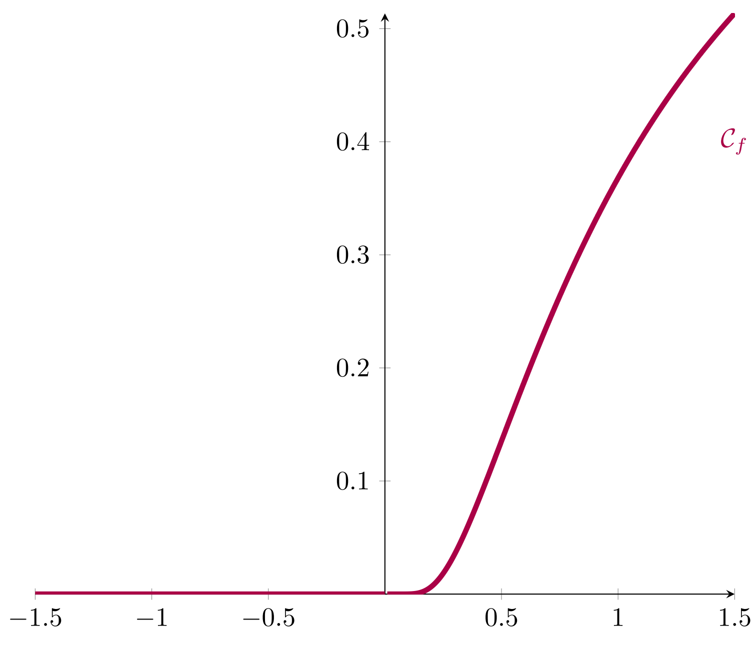
Remarque 65. — La condition nécessaire « f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 » n'est pas suffisante. La fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0. En effet

$$\forall \, n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{[fonction plate en 0]}$$

mais la fonction f n'est pas nulle au voisinage de 0.



8.4. Calcul d'un développement en série entière par dérivation ou primitivation terme à terme

Exercice 66. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

Exercice 67. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1-x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

Exercice 68. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

Exercice 69. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

8.5. Calcul d'un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle

Exercice 70. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (1+x)^\alpha \end{array} \right.$$

en utilisant une équation différentielle.

8.6. Calcul d'un développement en série entière à l'aide d'un produit de Cauchy

Exercice 71. — Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{1-x} \end{array} \right. .$$

8.7. Table des développements en série entière usuels

Fonction	DSE	Rayon	Une démarche pour obtenir le DSE
$x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	Cf. résultats sur les séries géométriques.
$x \longmapsto e^x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	Solution du problème de Cauchy : $I = \mathbf{R}$, $y' = y$, $y(0) = 1$.
$x \longmapsto \sin(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie imaginaire de la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = (-1)^n\, i$.
$x \longmapsto \cos(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie réelle de la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = (-1)^n\, i$.
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie impaire de la fonction $x \longmapsto e^x$.
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie paire de la fonction $x \longmapsto e^x$.
$x \longmapsto (1+x)^\alpha$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!}\, x^n$	1	Solution du problème de Cauchy : $I =]-1, 1[$, $(1+x)\, y' = \alpha\, y$, $y(0) = 1$.
$x \longmapsto \ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (-x)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.
$x \longmapsto \arctan(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow \left(-x^2\right)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

8.8. Quelques applications de la table des DSE usuels

Exercice 72. — Développer la fonction arcsin est développable en série entière au voisinage de 0 et que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Exercice 73. — Développer la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 74. — Développer la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 75. — Développer la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)^2}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 76. — Développer la fonction $f\colon x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 77. — Exprimer la somme de série entière suivante

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.

Exercice 78. — Exprimer la somme de série entière suivante

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.

Exercice 79. — Exprimer la somme de série entière suivante

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.

Exercice 80. — Exprimer la somme de série entière suivante

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.