Réduction des endomorphismes et des matrices 2

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Notation. — Dans cette partie, E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul.

1.1. Définition d'un polynôme d'endomorphisme, d'un polynôme de matrice

Définition 1. — *Soient $P \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

L'endomorphisme de E

$$P(u) := \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \, u^k$$

est appelé polynôme de l'endomorphisme u.

La matrice

$$P(M) := \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \, M^k$$

est appelée polynôme de matrices en M.

Exemple 2. — Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si $P = X^3 - 2\,X^2 + 7\,X + 4$, alors

$$P(u) = u^3 - 2\,u^2 + 7\,u + 4\,\mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad P(M) = M^3 - 2\,M^2 + 7\,M + 4\,I_n$$

Remarque 3. — Supposons E de dimension finie $n \geqslant 1$ et considérons une base $\mathcal{B}$ de E. Comme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{L}(E),+,\circ,\,\cdot\,) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}),+,\circ,\,\cdot\,) \\ v & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres, pour tout $(P,u) \in \mathbf{K}[X] \times \mathcal{L}(E)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \, u^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^k = P\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$

- Si $P \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ alors

  $P(u)(x)$ est l'image du vecteur x par l'endomorphisme $P(u)$ de E

  et est donc bien défini. En revanche

  $P(u(x))$ n'a aucun sens, puisqu'on ne peut considérer les puissances du vecteur $u(x)$ de E.

- Si $P \in \mathbf{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ alors

  $P(M)\,X$ est le produit du vecteur X par la matrice $P(M)$

  et est donc bien défini. En revanche

  $P(M\,X)$ n'a aucun sens, puisqu'on ne peut considérer les puissances du vecteur colonne $M\,X$.

1.2. Les morphismes de K-algèbres $P \longmapsto P(u)$ de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(M)$ de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Théorème 4. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}[X],+,\times,\,\cdot\,) & \longrightarrow & (\mathcal{L}(E),+,\circ,\,\cdot\,) \\ P & \longmapsto & P(u) := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \, u^k \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres.

L'application

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}[X],+,\times,\,\cdot\,) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}),+,\times,\,\cdot\,) \\ P & \longmapsto & P(M) := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \, M^k \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres.

Démonstration. On démontre le résultat pour l'application φ.

1. *L'application φ est $\mathbf{K}$-linéaire*

   Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$ et $(P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2$. Posons $P=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q=\sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$, où $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont des familles de scalaires presque nulles.

$$\varphi(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)(u)=\sum_{i=0}^{+\infty}(\lambda a_i+\mu b_i)u^i=\sum_{i=0}^{+\infty}\lambda a_i u^i+\mu b_i u^i=\lambda\left(\sum_{i=0}^{+\infty}a_i u^i\right)+\mu\left(\sum_{i=0}^{+\infty}b_i u^i\right)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$$

2. *L'application φ respecte les multiplications internes.*

   Soit $(P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2$. Posons $P=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q=\sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$, où $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont des familles de scalaires presque nulles. En considérant plusieurs manières de sommer sur l'ensemble $\left\{(i,j)\in\mathbf{N}^2\ :\ j\leqslant i\right\}$, il vient

$$(P\times Q)(u)=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i}a_j\,b_{i-j}\,u^i=\sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant+\infty}a_j\,b_{i-j}\,u^i=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=j}^{+\infty}a_j\,b_{i-j}\,u^j\circ u^{i-j}.$$

   Puis, grâce à la linéarité de u, nous obtenons

$$(P\times Q)(u)=\sum_{j=0}^{+\infty}a_j u^j\circ\left(\sum_{i=j}^{+\infty}b_{i-j}\,u^{i-j}\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}a_j u^j\circ\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\,u^k\right)=\left(\sum_{j=0}^{+\infty}a_j u^j\right)\circ\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\,u^k\right)=P(u)\circ Q(u)$$

3. *L'application φ respecte les élément neutres des multiplications internes.*
   $\varphi(1)=1\ \mathrm{id}_E=\mathrm{id}_E$

□

1.3. Deux polynômes d'un même endomorphisme, d'une même matrice, commutent

Corollaire 5. — *Soient $P,Q\in\mathbf{K}[X]$, $u\in\mathcal{L}(E)$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

$$P(u)\circ Q(u)=Q(u)\circ P(u)$$

$$P(M)\times Q(M)=Q(M)\times P(M)$$

Exemple 6. — Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ des scalaires, $m_1,\dots,m_r$ des entiers naturels non nuls et $P=\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}\in\mathbf{K}[X]$.

1. Si $u\in\mathcal{L}(E)$ alors $P(u)=(u-\lambda_1\ \mathrm{id}_E)^{m_1}\circ\ldots\circ(u-\lambda_r\ \mathrm{id}_E)^{m_r}$ et les r facteurs commutent.
2. Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors $P(M)=(M-\lambda_1\, I_n)^{m_1}\times\ldots\times(M-\lambda_r\, I_n)^{m_r}$ et les r facteurs commutent.

1.4. K-algèbre engendrée par un endomorphisme, par une matrice

Corollaire 7. — *Soient $u\in\mathcal{L}(E)$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *L'ensemble*
$$\mathbf{K}[u]:=\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}\left(\left(u^k\right)_{k\in\mathbf{N}}\right)$$
   est une sous-algèbre commutative de $(\mathcal{L}(E),+,\circ,\cdot)$.
2. *$\mathbf{K}[u]$ est la plus petite sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E),+,\circ,\cdot)$ qui contient u.*
3. *$\mathbf{K}[u]$ est appelée sous-algèbre engendrée par u.*

1. *L'ensemble*
$$\mathbf{K}[M]:=\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}\left(\left(M^k\right)_{k\in\mathbf{N}}\right)$$
   est une sous-algèbre commutative de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}),+,\times,\cdot)$.
2. *$\mathbf{K}[M]$ est la plus petite sous-algèbre de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}),+,\times,\cdot)$ qui contient M.*
3. *$\mathbf{K}[M]$ est appelée sous-algèbre engendrée par M.*

Exemple 8. — Si u un projecteur ($u^2=u$) ou une symétrie ($u^2=\mathrm{id}_E$) de E, alors $\mathbf{K}[u]=\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(\mathrm{id}_E,u)$.

Exemple 9. — Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On calcule

$$\chi_M(M)=M^2-\mathrm{tr}\,(M)\ M+\det(M)\ I_2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&bc+d^2\end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

De l'identité

$$\chi_M(M) = M^2 - \operatorname{tr}(M)\ M + \det(M)\ I_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})} \qquad \text{[théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice } (2,2)\text{]}$$

nous déduisons $\mathbf{K}[M] = \operatorname{Vect}_{\mathbf{K}}(I_2, M)$.

Exercice 10. — Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. Démontrer que $\left(I_3, M, M^2\right)$ est une base de $\mathbf{K}[M]$.

Exercice 11. — Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$. Démontrer que $\left(I_3, D, D^2\right)$ est une base de $\mathbf{C}[D]$.

1.5. Idéal annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice

Corollaire 12. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

L'ensemble

$$\operatorname{Ann}(u) := \left\{P \in \mathbf{K}[X]\ :\ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\right\}$$

est un idéal de $\mathbf{K}[X]$, appelé idéal annulateur de u.

L'ensemble

$$\operatorname{Ann}(M) := \left\{P \in \mathbf{K}[X]\ :\ P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\right\}$$

est un idéal de $\mathbf{K}[X]$, appelé idéal annulateur de M.

Remarque 13. — Supposons E de dimension finie $n \geqslant 1$. Considérons une base $\mathcal{B}$ de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Comme, pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$

$$\begin{array}{rcll} P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} & \Longleftrightarrow & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} & [\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,) \text{ est linéaire et injective}] \\ & \Longleftrightarrow & P\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} & [\text{remarque } 3] \end{array}$$

il vient $\operatorname{Ann}(u) = \operatorname{Ann}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)$.

Exercice 14. — Soit M_1 et M_2 deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, semblables sur $\mathbf{K}$. Démontrer que $\operatorname{Ann}(M_1) = \operatorname{Ann}(M_2)$.

Exercice 15. — Déterminer l'idéal annulateur $\operatorname{Ann}(V)$ de l'endomorphisme

$$V \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} & \longmapsto & V(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}} \end{array} \right.$$

de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Exercice 16. — Déterminer l'idéal annulateur $\operatorname{Ann}(\Delta_n)$ de l'endomorphisme

$$\Delta_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & \Delta_n(P) = P' \end{array} \right.$$

de $\mathbf{C}_n[X]$.

Exercice 17. — Déterminer l'idéal annulateur $\operatorname{Ann}(\Delta_)$ de l'endomorphisme

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ P & \longmapsto & \Delta(P) = P' \end{array} \right.$$

de $\mathbf{C}[X]$.

Exercice 18. — Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$. Démontrer que

$$\operatorname{Ann}(M) = \left(X^3 - 1\right)\ \mathbf{C}[X]$$

puis que $\left(1, X, X^2\right)$ est une base de $\mathbf{C}[M]$.

1.6. Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice

Corollaire 19. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *Si E est de dimension finie, alors*
$$\mathrm{Ann}(u) := \left\{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\right\}$$
est un idéal de $\mathbf{K}[X]$ distinct de $\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$.
2. *Le générateur unitaire de $\mathrm{Ann}(u)$ est noté μ_u (ou π_u) et est appelé polynôme minimal de u.*
3. $\mathrm{Ann}(u) = \mu_u \, \mathbf{K}[X]$
4. *Si $d := \deg \mu_u \geqslant 1$, alors*
$$\left(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{d-1}\right)$$
est une base de $\mathbf{K}[u]$.

1. *L'ensemble*
$$\mathrm{Ann}(M) := \left\{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\right\}$$
est un idéal de $\mathbf{K}[X]$ distinct de $\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$.
2. *Le générateur unitaire de $\mathrm{Ann}(M)$ est noté μ_M (ou π_M) et est appelé polynôme minimal de M.*
3. $\mathrm{Ann}(M) = \mu_M \, \mathbf{K}[X]$
4. *Si $d := \deg \mu_M \geqslant 1$, alors*
$$\left(I_n, M, \ldots, M^{d-1}\right)$$
est une base de $\mathbf{K}[M]$.

Exercice 20. — Soient $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbf{K}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

1. Démontrer que $\pi_D = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$.
2. Donner une base de $\mathbf{K}[D]$.

Exercice 21. — Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente de nilindice $\nu \geqslant 1$. Ainsi $N^\nu = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ et $N^{\nu-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.

1. Démontrer que $\pi_N = X^\nu$.
2. Donner une base de $\mathbf{K}[N]$.

Exercice 22. — Supposons E de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit u un endomorphisme cyclique de E, i.e. tel que
$$\exists x \in E \quad \left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right) \text{ est une base de } E$$

1. Démontrer que $\pi_u = \chi_u$.
2. Démontrer que $\{v \in \mathcal{L}(E) \ : \ v \circ u = u \circ v\} =: \mathrm{Com}(u) = \mathbf{K}[u]$.

1.7. Valeurs propres et polynômes annulateurs d'un endomorphisme, d'une matrice

Proposition 23. — *Soient $P \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$*
$$u(x) = \lambda\, x \quad \Longrightarrow \quad P(u)(x) = P(\lambda)\, x$$
2. *Si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.*

1. *Pour tout $(\lambda, X) \in \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$*
$$M\, X = \lambda\, X \quad \Longrightarrow \quad P(M)\, X = P(\lambda)\, X$$
2. *Si P annule M, alors toute valeur propre de M est racine de P.*

- Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, P un polynôme annulateur de u et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors
$$\lambda \in \mathrm{Spec}(u) \quad \Longrightarrow \quad P(\lambda) = 0_{\mathbf{K}}$$
mais la réciproque est fausse. En effet le polynôme $(X-1)(X-2024)$ annule $u = \mathrm{id}_E$ mais 2024 n'est pas valeur propre de id_E.
- Soient $M \in MM_n(\mathbf{K})$, P un polynôme annulateur de M et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors
$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) \quad \Longrightarrow \quad P(\lambda) = 0_{\mathbf{K}}$$
mais la réciproque est fausse. En effet le polynôme $(X-1)(X-2024)$ annule $M = I_n$ mais 2024 n'est pas valeur propre de I_n.

Remarque 24. — Comme la conjugaison complexe est un automorphisme du corps $\mathbf{C}$, l'application
$$\sigma \ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ P & \longmapsto & \overline{P} := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k}\, X^k \end{array} \right.$$

est un automorphisme de l'anneau $\mathbf{C}[X]$. Nous en déduisons que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, pour toute racine complexe λ de P

1. $\overline{\lambda}$ est une racine de P ;
2. $\text{mult}\,(\lambda, P) = \text{mult}\,(\overline{\lambda}, P)$.

Exercice 25. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 - 3\,A + 4\,I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$. Démontrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 26. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$. Démontrer que n est pair.

Exemple 27. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$. Nous allons démontrer que le rang de A est pair et que la trace de A est un entier négatif.

- Soit φ l'endomophisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associé à A, i.e.

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

- Comme $X(X-j)(X-\overline{j})$ annule φ et les polynômes $X, X-j, X-\overline{j}$ sont deux à deux premiers entre eux (puisque irréductibles, unitaires, distincts), le lemme des noyaux livre

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) = \text{Ker}\,(\varphi) \oplus \text{Ker}\,(\varphi - j\ \text{id}) \oplus \text{Ker}\,\left(\varphi - \overline{j}\ \text{id}\right)$$

  Soient $\mathcal{B}_0$ une base (éventuellement vide) de $\text{Ker}\,(\varphi)$, $\mathcal{B}_j$ une base (éventuellement vide) de $\text{Ker}\,(\varphi - j\ \text{id})$ et $\mathcal{B}_{\overline{j}}$ une base (éventuellement vide) de $\text{Ker}\,\left(\varphi - \overline{j}\ \text{id}\right)$. Dans la base $\mathcal{B} := \mathcal{B}_0 \,\#\, \mathcal{B}_j \,\#\, \mathcal{B}_{\overline{j}}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ la matrice de φ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{a \text{ fois}}, \underbrace{j, \ldots, j}_{b \text{ fois}}, \underbrace{\overline{j}, \ldots, \overline{j}}_{c \text{ fois}}\right)$$

  où $a := \dim\left(\text{Ker}\,(\varphi)\right) \geqslant 0$, $b := \dim\left(\text{Ker}\,(\varphi - j\ \text{id})\right) \geqslant 0$, $c := \dim\left(\text{Ker}\,\left(\varphi - \overline{j}\ \text{id}\right)\right) \geqslant 0$.
- Nous en déduisons que

$$\chi_A = \chi_\varphi = \chi_{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)} = X^a\,(X-j)^b\,(X-\overline{j})^c$$

  Comme A est à coefficients réels, $\chi_A \in \mathbf{R}[X]$. Ainsi

$$X^a\,(X-j)^b\,(X-\overline{j})^c = \chi_A = \overline{\chi_A} = X^a\,(X-\overline{j})^b\,(X-j)^c$$

  D'après l'unicité de la décomposition de χ_A en produit d'irréductibles de $\mathbf{C}[X]$, $b = c$. Ainsi

$$\text{rg}\,(A) = b + c = 2b \in 2\mathbf{Z} \qquad \text{et} \qquad \text{tr}\,(A) = b\,j + c\,\overline{j} = 2b\ \text{Re}\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2b \in \mathbf{Z}_{\leqslant 0}$$

1.8. Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres pour un endomorphisme, pour une matrice

Théorème 28. — *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$.*

Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\lambda \in \text{Spec}(u)$

2. $\chi_u(\lambda) = 0_{\mathbf{K}}$

3. $\pi_u(\lambda) = 0_{\mathbf{K}}$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$

2. $\chi_M(\lambda) = 0_{\mathbf{K}}$

3. $\pi_M(\lambda) = 0_{\mathbf{K}}$

Exemple 29. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. On admet que $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbf{R})}$ (théorème de Cayley-Hamilton). Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

2. Lemme des noyaux

Remarque 30. — Soient $P \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les sous-espaces

$$\mathrm{Ker}\,(P(u)) = \{x \in E \ :\ P(u)(x) = 0_E\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(P(u)) = \{P(u)(x) \ :\ x \in E\}$$

sont stables par u.

Lemme 31. — *Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ deux-à-deux premiers entre eux. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, posons*

$$Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} P_j$$

1. *Le PGCD des polynômes $Q_1, \dots, Q_r$ est 1.*
2. *Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $P_i \wedge Q_i = 1$.*

Lemme 32. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ deux-à-deux premiers entre eux.*

1. *Le sous-espace $\mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right)$ stable par u se décompose en*

$$\mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(P_k(u)) \qquad [\textit{lemme des noyaux}]$$

2. *Soit $\ell \in [\![1, r]\!]$. La projection π_ℓ de $\mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right)$ sur $\mathrm{Ker}\,(P_\ell(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{r} \mathrm{Ker}\,(P_k(u))$ i.e.*

$$\pi_\ell \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) \\ x = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{x_k}_{\in \mathrm{Ker}(P_k(u))} & \longmapsto & x_\ell \end{array} \right.$$

est un polynôme en u, i.e. $\pi_\ell \in \mathbf{K}[u]$.

Exemple 33. — Soit p un projecteur de E. Comme $X^2 - X = X(X-1)$ annule p et $X \wedge (X-1) = 1$, le lemme des noyaux nous livre $E = \mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}_E)$ (décomposition d'un espace sous un projecteur). On rappelle que

$$\forall\, x \in E \qquad x \ = \ \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)} \ + \ \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)}$$

et que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}_E)$.

Exemple 34. — Soit s une symétrie de E. Comme $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ annule s et $(X+1) \wedge (X-1) = 1$, le lemme des noyaux nous livre $E = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ (décomposition d'un espace sous une symétrie). On rappelle que

$$\forall\, x \in E \qquad x \ = \ \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)}$$

Exercice 35. — Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\mathrm{Im}\,(f + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

Exercice 36. — On suppose que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et on considère $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u) = E$.
2. En déduire, grâce au lemme des noyaux, que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}\,\left(u^2 + u + \mathrm{Id}\right)$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 37. — Trouver tous les endomorphismes u de $\mathbf{R}^n$ tels que $u^3 - 4u^2 + 4u = 0$ et $\mathrm{tr}\,(u) = 0$.

3. Endomorphismes cycliques et matrices compagnons (HP)

3.1. Matrices compagnons

Proposition 38. — *Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{K}$, $P = a_0 + a_1\,X + \ldots + a_{n-1}\,X^{n-1} + X^n$ et*

$$C(P) := \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \qquad [\textit{matrice compagnon du polynôme } P]$$

Le polynôme caractéristique $\chi_{C(P)} := \det\left(X\,I_n - C(P)\right)$ de la matrice $C(P)$ est égale à P.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. En appliquant l'opération élémentaire $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} + \lambda\,L_n$, nous obtenons

$$\chi_{C(P)}(\lambda) := \begin{vmatrix} \lambda & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & \lambda^2 + a_{n-1}\,\lambda + a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En appliquant ensuite l'opération élémentaire $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} + \lambda\,L_{n-1}$, nous obtenons

$$\chi_{C(P)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & 0 & a_{n-4} \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & 0 & \lambda^3 + a_{n-1}\,\lambda^2 + a_{n-2}\,\lambda + a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 0 & \lambda^2 + a_{n-1}\,\lambda + a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En appliquant <u>successivement</u> les opérations élémentaires

$$L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} + \lambda\,L_{n-2} \quad , \quad \ldots \quad , \quad L_1 \leftarrow L_1 + \lambda\,L_2$$

nous obtenons

$$\chi_{C(P)}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + a_{n-2}\,\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\,\lambda + a_0 \\ -1 & \ddots & & & & \vdots & \lambda^{n-1} + a_{n-1}\,\lambda^{n-2} + a_{n-2}\,\lambda^{n-3} + \ldots + a_2\,\lambda + a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 + a_{n-1}\,\lambda^3 + a_{n-2}\,\lambda^2 + a_{n-3}\,\lambda + a_{n-4} \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & 0 & \lambda^3 + a_{n-1}\,\lambda^2 + a_{n-2}\,\lambda + a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 0 & \lambda^2 + a_{n-1}\,\lambda + a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, il vient finalement

$$\chi_{C(P)}(\lambda) = (-1)^{n+1}\left(\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + a_{n-2}\,\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\,\lambda + a_0\right)|-I_{n-1}| = P(\lambda)$$

□

3.2. Endomorphismes cycliques

Définition 39. — *Supposons E de dimension finie $n \geqslant 1$. Un endomorphisme u de E est dit cyclique si*

$$\exists\, x \in E \quad \left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$$

est une base de E.

Théorème 40. — *Supposons E de dimension finie $n \geqslant 1$ et considérons un endomorphisme u de E qui est cyclique. Alors*

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad \text{[\textit{théorème de Cayley-Hamilton pour un endomorphisme cyclique}]}$$

Démonstration.

i) Soit $x \in E$ tel que
$$\mathcal{B}_x := \left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$$
est une base de E. Comme le vecteur $u^n(x) \in E$
$$\exists\,!\,(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n \quad u^n(x) = a_0\,x + a_1\,u(x) + \ldots\; a_{n-1}\,u^{n-1}(x)$$

ii) Nous calculons
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u) := \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = C(P)$$
où $P = -a_0 - a_1\,X + \ldots - a_{n-1}\,X^{n-1} + X^n$. D'après la proposition 38
$$(\star) \qquad \chi_u = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u)} = -a_0 - a_1\,X + \ldots - a_{n-1}\,X^{n-1} + X^n$$

iii) De $(\star)$, nous déduisons qu'il nous faut démontrer
$$-a_0\,\mathrm{id}_E - a_1\,u + \ldots - a_{n-1}\,u^{n-1} + u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$
ou, de manière équivalente ($\mathcal{B}_x$ est une base de E), que
$$\forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad -a_0\,u^i(x) - a_1\,u^{i+1}(x) + \ldots - a_{n-1}\,u^{n-1+i}(x) + u^{n+i}(x) = 0_E$$

iv) Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Le vecteur $-a_0\,u^i(x) - a_1\,u^{i+1}(x) - \ldots + a_{n-1}\,u^{n-1+i}(x) + u^{n+i}(x)$ égale le vecteur
$$u^i\left(\underbrace{-a_0\,x - a_1\,u^1(x) + \ldots - a_{n-1}\,u^{n-1}(x) + u^n(x)}_{=0_E}\right)$$
qui est nul.

□

4. Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 41. — *Supposons que E est de dimension finie.*

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

ou de manière équivalente

$$\pi_u \text{ divise } \chi_u \text{ dans } \mathbf{K}[X]$$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

$$\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$$

ou de manière équivalente

$$\pi_M \text{ divise } \chi_M \text{ dans } \mathbf{K}[X]$$

Démonstration.

i) Il nous faut démontrer que

$$\forall\, x \in E \quad \chi_u(u)(x) = 0_E$$

L'assertion est claire pour $x = 0_E$. Considérons un vecteur non nul x de E.

ii) L'ensemble

$$\left\{k \in \mathbf{N} \ : \ \text{ la famille } \left(x, u(x), \ldots, u^k(x)\right) \text{ est libre}\right\}$$

contient 0 ($x \neq 0_E$) et est majoré par $\dim(E)$. Ainsi

$$d_x := \max\left\{k \in \mathbf{N} \ : \ \text{ la famille } \left(x, u(x), \ldots, u^k(x)\right) \text{ est libre}\right\}$$

est bien définie.

iii) Comme la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{d_x}(x)\right)$ est libre et la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{d_x}(x), u^{d_x+1}(x)\right)$ est liée

$$u^{d_x+1}(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{d_x}(x)\right)$$

On en déduit que le sous-espace vectoriel

$$F_x := \operatorname{Vect}\left(\left(x, u(x), \ldots, u^{d_x}(x)\right)\right)$$

est stable par u.

iv) Notons u_{F_x} l'endomorphisme de F_x induit par u, i.e.

$$u_{F_x} \left| \begin{array}{ccc} F_x & \longrightarrow & F_x \\ y & \longmapsto & u(y) \end{array} \right.$$

Comme

$$\left(x, u_{F_x}(x), \ldots, {u_{F_x}}^{d_x}(x)\right) = \left(x, u(x), \ldots, u^{d_x}(x)\right)$$

est une base de F_x, l'endomorphisme u_{F_x} de F_x est cyclique (par construction).

v) Nous savons que $\chi_{u_{F_x}}$ divise χ_u dans $\mathbf{K}[X]$. Il existe donc $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\chi_u = Q\, \chi_{u_{F_x}}$. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\chi_u(u)(x) &= Q(u)\left(\chi_{u_{F_x}}(u)(x)\right) \\
&= Q(u)\left(\sum_{i=0}^{d_x} \left[\chi_{u_{F_x}}\right]_i\, u^i(x)\right) \\
&= Q(u)\left(\sum_{i=0}^{d_x} \left[\chi_{u_{F_x}}\right]_i\, {u_{F_x}}^i(x)\right) && [\text{si } i \in [\![0, d_x]\!], \text{ alors } u^i(x) = {u_{F_x}}^i(x)] \\
&= Q(u)\left(\chi_{u_{F_x}}(u_{F_x})(x)\right) \\
&= 0_E && [\text{d'après le théorème 40}]
\end{aligned}$$

□

Exercice 42. — Déterminer les polynômes minimaux des matrices suivantes.

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 43. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

1. Calculer le polynôme minimal de A.
2. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 44. — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.

1. Calculer le polynôme minimal de A.
2. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

5. Polynômes annulateurs et réduction

5.1. Caractérisations algébriques de la diagonalisabilité

Théorème 45. — *Supposons que E est de dimension finie.*

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *L'endomorphisme u est diagonalisable.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
3. *Le polynôme minimal π_u de u est scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$.*

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La matrice M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$ tel que $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.*
3. *Le polynôme minimal π_M de M est scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$.*

Démonstration. Nous ne considérons que le cas des endomorphismes.

- $1 \Rightarrow 2$. Supposons l'endomorphisme u diagonalisable. Alors

$$(\star) \qquad E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Nous vérifions que le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i) \qquad [\text{scindé à racines simples sur } \mathbf{K}]$$

annule u, i.e. que

$$P(u) = (u - \lambda_1 \, \mathrm{id}_E) \circ \ldots \circ (u - \lambda_r \, \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme des polynômes d'endomorphismes en u commutent

$$P(u) = (u - \lambda_1 \, \mathrm{id}_E) \circ \ldots \circ (u - \lambda_{i-1} \, \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_{i+1} \, \mathrm{id}_E) \circ \ldots \circ (u - \lambda_r \, \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_i \, \mathrm{id}_E)$$

donc $P(u)$ est nul sur $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \, \mathrm{id}_E) = E_{\lambda_i}(u)$. Grâce à $(\star)$, nous en déduisons que $P(u)$ est nul sur E tout entier.

- $2 \Rightarrow 3$. Supposons qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts tel que le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)$$

annule u. Ainsi

$$P \in \mathrm{Ann}(u) = \pi_u \, \mathbf{K}[X]$$

et π_u divise P dans $\mathbf{K}[X]$. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$

$$\exists \, (m_1, \ldots, m_r) \in \{0, 1\}^r \quad \pi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

et π_u est scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$.

- $3 \Rightarrow 1$. Supposons qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts tel que

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)$$

Comme les polynômes $X - \alpha_1, \ldots, X - \alpha_r$ sont irréductibles, unitaires et deux à deux distincts, ils sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux

$$(\star\star) \qquad \mathrm{Ker}\,(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(u - \alpha_i \ \mathrm{id}_E)$$

Comme $\pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et les racines de π_u sont les valeurs propres de u, l'identité $(\star\star)$ s'écrit encore

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)}^{r} E_\lambda(u)$$

L'endomorphisme u est donc diagonalisable.

□

Exercice 46. — Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ tel que $u^p = \mathrm{id}_E$, où $p \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

Exercice 47. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Si la matrice A^2 est diagonalisable sur $\mathbf{C}$, la matrice A est-elle nécessairement diagonalisable sur $\mathbf{C}$?
2. On suppose la matrice A^2 inversible et diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Démontrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

5.2. Polynôme minimal et diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Corollaire 48. — *Supposons que E est de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme de F l'induit par u.*

1. *Le polynôme π_{u_F} divise le polynôme π_u dans $\mathbf{K}[X]$.*
2. *Si u est diagonalisable alors u_F l'est également.*

5.3. Codiagonalisation (HP)

Exercice 49. — Supposons que E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soient u et v deux endomorphismes de E, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ soient diagonales.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, diagonalisables sur $\mathbf{K}$ et telles que $AB = BA$. Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

5.4. Caractérisations algébriques de la trigonalisabilité

Théorème 50. — *Supposons que E est de dimension finie.*

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *L'endomorphisme u est trigonalisable.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé sur $\mathbf{K}$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
3. *Le polynôme minimal π_u de u est scindé sur $\mathbf{K}$.*

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La matrice M est trigonalisable sur $\mathbf{K}$.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé sur $\mathbf{K}$ tel que $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.*
3. *Le polynôme minimal π_M de M est scindé sur $\mathbf{K}$.*

Démonstration. Nous ne considérons que le cas des endomorphismes.

- $1 \Rightarrow 2$. Supposons l'endomorphisme u trigonalisable. Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$ et il annule u d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

- $2 \Rightarrow 3$. Supposons qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts et $m_1, \ldots, m_r \in \mathbf{N}^*$ tel que le polynôme
$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$
annule u. Ainsi
$$P \in \mathrm{Ann}(u) = \pi_u \, \mathbf{K}[X]$$
et π_u divise P dans $\mathbf{K}[X]$. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$
$$\exists \, (m'_1, \ldots, m'_r) \in \prod_{i=1}^{r} [\![0, m_i]\!] \quad \pi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m'_i}$$
et π_u est scindé sur $\mathbf{K}$.
- $3 \Rightarrow 1$. Supposons qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts et $m_1, \ldots, m_r \in \mathbf{N}^*$ tel que
$$\pi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$
Comme les polynômes $X - \alpha_1, \ldots, X - \alpha_r$ sont irréductibles, unitaires et deux à deux distincts, les polynômes $(X - \alpha_1)^{m_1}, \ldots, (X - \alpha_r)^{m_r}$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux
$$(\star) \qquad \mathrm{Ker}\,(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,((u - \alpha_i \, \mathrm{id}_E)^{m_i})$$
Comme $\pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, l'identité $(\star)$ s'écrit encore
$$(\star\star) \qquad E = \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{\mathrm{Ker}\,((u - \alpha_i \, \mathrm{id}_E)^{m_i})}_{=: F_i}$$
Fixons $i \in [\![1, r]\!]$. Le sous-espace F_i est stable par u. Nous pouvons donc considérer l'endomorphisme u_{F_i} de F_i induit par u, i.e.
$$u_{F_i} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\,((u - \alpha_i \, \mathrm{id}_E)^{m_i}) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,((u - \alpha_i \, \mathrm{id}_E)^{m_i}) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$
Comme, pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,((u - \alpha_i \, \mathrm{id}_E)^{m_i})$
$$(u_{F_i} - \alpha_i \, \mathrm{id}_{F_i})^{m_i} (x) = (u - \alpha_i \, \mathrm{id}_E)^{m_i} (x) = 0_E$$
L'endomorphisme $u_{F_i} - \alpha_i \, \mathrm{id}_{F_i}$ de F_i est nilpotent. Il existe donc une base $\mathcal{B}_i$ de F_i telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{F_i} - \alpha_i \, \mathrm{id}_{F_i})$ est triangulaire supérieure stricte. Nous en déduisons que la matrice
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{F_i}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{F_i} - \alpha_i \, \mathrm{id}_{F_i}) + \alpha_i \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(\mathrm{id}_{F_i}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{F_i} - \alpha_i \, \mathrm{id}_{F_i}) + \alpha_i \, I_{\dim(F_i)}$$
est triangulaire supérieure (avec des coefficients diagonaux tous égaux à α_i).
D'après $(\star\star)$ la famille
$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \# \ldots \# \mathcal{B}_r$$
est une base de E. Comme les sous-espaces $F_1, \ldots, F_r$ sont stables par u
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{F_1}), \ldots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_r}(u_{F_r}))$$
Comme chacune des matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{F_1}), \ldots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_r}(u_{F_r})$ est triangulaire supérieure, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est, elle aussi, triangulaire supérieure.

□

5.5. Cotrigonalisation (HP)

Exercice 51. — Supposons que E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soient u et v deux endomorphismes de E, trigonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ soient triangulaires supérieures.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, trigonalisables sur $\mathbf{K}$ et telles que $AB = BA$. Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures

6. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé

6.1. Décomposition de l'espace en somme directe de sous-espaces caractéristiques, si χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$

Théorème 52. — *Supposons E de dimension finie $n \geqslant 1$ et considérons un endomorphisme u de E tel que χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres deux à deux distinctes et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives, de sorte que*

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

1. *Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le sous-espace*
$$N_i := \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i}\right)$$
est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.
2. *L'endomorphisme u décompose l'espace E en*
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$$
3. *Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\dim(N_i) = m_i$.*

Remarque 53. — On conserve les notations du théorème 52. Soit $i \in [\![1, r]\!]$. On a l'inclusion

$$E_{\lambda_i}(u) := \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i}\right) =: N_i$$

Mais cette inclusion peut-être stricte. Par exemple si u est l'endomorphisme de $\mathbf{K}^2$ défini par

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0) \end{array} \right.$$

alors 0 est la seule valeur propre de u, $\chi_u = X^2$ et

$$\operatorname{Ker}(u - 0 \operatorname{id}_{\mathbf{R}^2}) = \operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}((1,0)) \subsetneq \operatorname{Ker}\left((u - 0 \operatorname{id}_{\mathbf{R}^2})^2\right) = \mathbf{R}^2$$

6.2. De la classe de similitude d'une matrice à polynôme caractéristique scindé sur $\mathbf{K}$

Corollaire 54. — *Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que χ_M scindé sur $\mathbf{K}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres deux à deux distinctes et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives, de sorte que*

$$\chi_M = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Alors il existe des matrices

$$T_1 \in \mathcal{T}^{++}_{m_1}(\mathbf{K}), \ldots, T_r \in \mathcal{T}^{++}_{m_r}(\mathbf{K}) \qquad [\textit{matrices triangulaires supérieures strictes}]$$

telles que M est semblable à la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + T_1 & & & \\ & \lambda_2 I_{m_2} + T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_{m_r} + T_r \end{pmatrix}$$