Réduction des endomorphismes et des matrices 1

Notation. — Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps.

1. Compléments d'algèbre linéaire

Notation. — La lettre E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1.1. Projecteurs associés à une décomposition en somme directe

Proposition 1. — *Soient un entier $p \geqslant 2$ et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, π_i désigne la projection de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} E_j$:*

$$\pi_i \left| \begin{array}{ccc} E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j & \longrightarrow & E_i \\ x = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{x_j}_{\in E_j} & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$$

Alors $\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{id}_E$ et, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\pi_i \circ \pi_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

♥ Une démonstration de la proposition 1 doit être connue.

Exercice 2. — Soient un entier $p \geqslant 2$ et $\pi_1, \ldots, \pi_p$ des projecteurs de E tels que $\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{id}_E$ et, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\pi_i \circ \pi_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Démontrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}\,(\pi_i)$.

1.2. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Rappel. — Soient un entier $p \geqslant 2$ et $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Si l'on définit sur :

$$\prod_{i=1}^{p} E_i = \{(x_1, \ldots, x_p) \ : \ x_1 \in E_1\,,\ \ldots\,,\ x_p \in E_p\}$$

une addition $+$ et une multiplication par un scalaire $\cdot$ composante par composante, alors $\left(\prod_{i=1}^{p} E_i, +, \cdot\right)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. De plus, si les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimension finie, alors le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est également de dimension finie et :

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim\,(E_i)$$

Proposition 3. — *Soient un entier $p \geqslant 2$ et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E, que nous supposons ici de dimension finie.*

1. $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$

2. La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe si et seulement si* $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

Éléments de démonstration. L'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} E_i \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \ldots + x_p \end{array} \right.$$

est linéaire et surjective. □

1.3. Construction d'applications linéaires et décomposition en somme directe

Proposition 4. — *Soient un entier* $p \geqslant 2$, $E_1, \ldots, E_p$ *des sous-espaces vectoriels de* E *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ *et* F *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel. Alors :*

$$\forall (u_1, \ldots, u_p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E_i, F), \quad \exists ! \, u \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \quad u_{|E_i} = u_i$$

1.4. Sommes et produits de matrices définies par blocs

Remarque 5. — Soient un entier $n \geqslant 2$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Il est parfois utile de considérer une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ comme une matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$.

Proposition 6. — *Les matrices par blocs s'additionnent et se multiplient comme des matrices* 2×2. *Plus précisément, soient :*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

où $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})^2$, $(B_1, B_2) \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})^2$, $(C_1, C_2) \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})^2$ *et* $(D_1, D_2)^2 \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})^2$. *Alors :*

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_1 M_2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{pmatrix}$$

Remarque 7. — On peut généraliser les formules de la proposition 6 à une décomposition en un nombre arbitraire de blocs.

Exercice 8. — Soient $n_1, \ldots, n_p$ des nombres entiers naturels non nuls et $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbf{K})$, …,$A_p \in \mathcal{M}_{n_p}(\mathbf{K})$. Quel lien existe-t-il entre les puissances de la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix} \qquad \text{[matrice diagonale par blocs]}$$

et les puissances des matrices $A_1, \ldots, A_p$?

Remarque 9. — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Considérons la décomposition par blocs de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$. Nous allons donner une interprétation géométriques des différents blocs A, B, C, D.

(a) Nous décomposons l'espace vectoriel E pour refléter la décomposition de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ en blocs. Soient F le sous-espace vectoriel engendré par la famille libre $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ et G le sous-espace vectoriel engendré par la famille libre $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de sorte que $E = F \oplus G$.

(b) Nous introduisons les applications linéaires canoniquement associées à la décomposition de E introduite en (a). Soient i_F l'injection canonique de F dans E, p_F la projection de E sur F parallèlement à G correstreinte à F, i_G l'injection canonique de F dans E, p_G la projection de E sur G parallèlement à F correstreinte à G :

$$i_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad p_F \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\in \mathbf{K}} e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i \end{array} \right.$$

$$i_G \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad p_G \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\in \mathbf{K}} e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i \end{array} \right.$$

(c) Nous pouvons alors proposer une interprétation géométrique des matrices A, B, C, D.

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(p_F \circ u \circ i_F) \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(p_F \circ u \circ i_G) \qquad C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(p_G \circ u \circ i_F) \qquad D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(p_G \circ u \circ i_G)$$

Exercice 10. — Soient $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et exprimer P^{-1} en fonction de M^{-1} et L.

Exercice 11. — Soient $A \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $D \in \mathbf{GL}_{n-p}(\mathbf{K})$. Démontrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A^{-1}, D^{-1} et C.

1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème 12. — *Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, *où* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$. *Alors :*

$$\det(()\, M) = \det(()\, A)\, \det(()\, D)$$

Plus généralement, si $n_1, \ldots, n_p$ *sont des nombres entiers naturels non nuls, si :*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & A_p \end{pmatrix} \qquad [\textit{matrice triangulaire supérieure par blocs}]$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbf{K})$, …,$A_p \in \mathcal{M}_{n_p}(\mathbf{K})$, *alors :*

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$$

♥ Une démonstration du théorème 12 doit être connue.

Remarque 13. — Les formules du théorème 12 valent également pour des matrices triangulaires inférieures par blocs.

Exercice 14. — Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$.

1. Démontrer :
$$\det \begin{pmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A).$$
2. En écrivant judicieusement la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices définies par blocs, démontrer la première assertion du théorème 12.

Exercice 15. — Soient $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^4$ telles que C et D commutent et D soit inversible. Démontrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

On pourra écrire la matrice $\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices définies par blocs.

Exercice 16. — Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$.

1. Démontrer que
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B)\, \det(A - B)$$
2. Démontrer que :
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + iB)\, \det(A - iB)$$
On pourra multiplier certaines lignes et colonnes de $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ par i et effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes.
3. Démontrer que :
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$$
4. Supposons que $AB = BA$. Démontrer que :
$$\det\left(A^2 + B^2\right) \geqslant 0$$
5. Démontrer que l'inégalité de la question 4 ne vaut pas nécessairement lorsque A et B ne commutent pas.

2. Éléments propres d'un endomorphisme

2.1. Sous-espaces stables et endomorphisme induit

Notation. — Dans cette partie, on note E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 17. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u, ou que u stabilise F, si $u(F) \subset F$, i.e. si :*

$$\forall x \in F \quad u(x) \in F.$$

Remarque 18. — Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E.

Exercice 19. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

Exercice 20. — Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stable par la dérivation :

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

Définition 21. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E, stable par F. L'application u_F définie par :*

$$u_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. \qquad \left[u_F \text{ est la restriction-corestriction } u\big|_{F}^{F}\right]$$

est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme de F induit par u.

Exercice 22. — Soient F le plan de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la plan F est stable par u.
2. Déterminer la matrice de $u_{|F}$ dans la base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ de F.

3. Reconnaître l'endomorphisme u_F de F ?

Exercice 23. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilisant toute droite de E.

1. Démontrer que :
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \exists!\, \lambda_x \in \mathbf{K}, \quad u(x) = \lambda \cdot x$$
2. Soient x, y deux vecteurs liés de $E \setminus \{0_E\}$. Démontrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Soient x, y deux vecteurs libres de $E \setminus \{0_E\}$. En considérant le vecteur $x + y$, démontrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
4. En déduire que u est une homothétie.

Exercice 24. — Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ est :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer toutes les droites de $\mathbf{R}^2$ stables par f.
2. Soit D une droite stable par f. Justifier que D ne possède aucun supplémentaire stable par f.

Exercice 25. — Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ne possédant aucun sous-espace stable non trivial.

2.2. Sous-espaces stables d'un espace vectoriel de dimension finie

Notation. — Dans cette partie, on note E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition 26. — *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geqslant 1$. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite adaptée à F si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.*

Il est possible de construire des bases adaptées à un sous-espace vectoriel grâce au théorème de la base incomplète. En effet, soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geqslant 1$, $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(n-p)$ entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-p} \leqslant n$ tels que la famille $\mathcal{B} := \left(f_1, \ldots, f_p, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}\right)$ soit une base de E. Le base $\mathcal{B}$ de E ainsi construite est adaptée à F.

Proposition 27. — *Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par u si et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E adaptée à F :*
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$.

♥ Une démonstration de la proposition 27 doit être connue.

Définition 28. — *Soient un entier $p \geqslant 2$ et des sous-espaces vectoriels de E notés $E_1, E_2, \ldots, E_p$, de dimensions respectives $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, \ldots, n_p \geqslant 1$, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ si :*
$$\left\{\begin{array}{l} (e_1, \ldots, e_{n_1}) \text{ est une base de } E_1\,; \\ (e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}) \text{ est une base de } E_2\,; \\ \qquad\vdots \\ \left(e_{n_1+n_2+\ldots+n_k+1}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_k+n_{k+1}}\right) \text{ est une base de } E_{k+1}\,; \\ \qquad\vdots \\ \left(e_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+n_p} = e_n\right) \text{ est une base de } E_p. \end{array}\right.$$

On conserve les notations de la définition 28. Il est possible de construire des bases adaptées à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. En effet, soit, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, une base $\mathcal{B}_k = (e_{k,1}, \dots, e_{k,n_k})$ de F_k. Alors la famille :

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \# \dots \# \mathcal{B}_p := \left(e_{1,1}, \dots, e_{1,n_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,n_2}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,n_p}\right)$$

obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ est une base de E, qui est adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition 29. — *Soient un entier $p \geqslant 2$, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, \dots, n_p \geqslant 1$, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors chacun des espaces $E_1, \dots, E_p$ est stable par u si et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E$:*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \qquad [\textit{matrice diagonale par blocs}]$$

où, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbf{K})$.

2.3. Endomorphisme diagonalisable et droites stables

Notation. — Dans cette partie, on note E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition 30. — *Un endomorphisme u de E est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonale.*

Exercice 31. — Soit u un endomorphisme de E. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

1. IL'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est somme directe de n droites stables par u.

2.4. Endomorphisme trigonalisable et drapeau stable

Notation. — Dans cette partie, on note E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition 32. — *Un endomorphisme u de E est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est triangulaire.*

Exercice 33. — Un drapeau de E est une famille $(F_1, \dots, F_n)$ de sous-espaces vectoriels de E tel que :

- $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\dim(F_i) = i$.

Soit u un endomorphisme de E. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

1. L'endomorphisme u est trigonalisable.
2. Il existe un drapeau $(F_1, \dots, F_n)$ de E formé de sous-espaces vectoriels de E stables par u.

2.5. Définition des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 34. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est une valeur propre de u si :*

$$\exists\, x \in E \quad x \neq 0_E \ \textit{ et } u(x) = \lambda x$$

2. *L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u et est noté* $\mathrm{Spec}(u)$.

$$\mathrm{Spec}(u) := \{\lambda \in \mathbf{K} \ : \ \exists\, x \in E \quad x \neq 0_E \ \textit{ et } u(x) = \lambda x\}$$

3. *Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, alors tout vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ vérifiant $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

La condition « $x \neq 0_E$ » dans la définition d'une valeur propre est essentielle. Si on l'omet, tout scalaire est valeur propre, ce qui ôte tout intérêt à l'introduction du concept.

Remarque 35. — Un vecteur propre est par essence non nul.

Exercice 36. — Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de u et x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{K}^*$, le vecteur kx est propre pour u associé à la valeur propre λ.

Dans le cas où $\mathbf{K} \neq \mathbf{F}_2$, un endomorphisme u de E admettant une valeur propre λ, possède plusieurs vecteurs propres associés à la valeur propre λ (cf. exercice 36). On parlera « d'un » vecteur propre et non pas « du » vecteur propre pour u associé à la valeur propre λ.

Proposition 37. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u possède une valeur propre si et seulement s'il existe une droite de E stable par u.*

♥ Une démonstration de la proposition 37 doit être connue.

Exercice 38. — Donner un endomorphisme « géométrique » de $\mathbf{R}^2$ qui ne possède aucune valeur propre.

Proposition 39. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.*

1. *Le scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ de E n'est pas injectif.*
2. *Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, alors l'ensemble des valeurs propres de u associé à la valeur propre λ est $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \setminus \{0_E\}$.*

Exercice 40. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

2.6. Définition des sous-espaces propres d'un endomorphisme

Définition 41. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, noté $E_\lambda(u)$, est défini par :*

$$E_\lambda(u) := \{x \in E \ : \ u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \qquad [\textit{sous-espace vectoriel de } E]$$

Remarque 42. — Par essence, un sous-espace propre n'est jamais réduit à $\{0_E\}$.

Remarque 43. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Le scalaire 0 est valeur propre de u si et seulement si u n'est pas injectif.
2. Si $0 \in \mathrm{Spec}(u)$, alors $E_0(u) = \mathrm{Ker}\,(u)$.

2.7. Des sous-espaces propres distincts sont en somme directe

Théorème 44. — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, r un nombre entier supérieur ou égal à 2, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_r}(u)$ sont en somme directe.*

♥ Une démonstration du théorème 44 doit être connue.

2.8. Majoration du nombre de valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie

Corollaire 45. — *Supposons que l'espace vectoriel E est de dimension finie $n \geqslant 1$ et considérons un endomorphisme u de E. Le spectre $\mathrm{Spec}(u)$ de u est un ensemble fini et $|\mathrm{Spec}(u)| \leqslant \dim(E)$.*

♥ Une démonstration du corollaire 45 doit être connue.

2.9. Une méthode pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ un scalaire fixé. Considérons l'équation :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad u(x) = \lambda x \qquad [\text{équation aux éléments propres}]$$

d'inconnue $x \in E$, dont 0_E est solution (u est linéaire).

1. Le scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ possède une solution non nulle.
2. Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$ alors le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$.

Ainsi, en résolvant toutes les équations aux éléments propres $(\mathcal{E}_\lambda)$, où $\lambda \in \mathbf{R}$ est un paramètre, on détermine tous les éléments propres de u.

2.10. Détermination des éléments propres d'endomorphismes usuels

Exercice 46. — Soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. On pose $u := \lambda \, \mathrm{id}_E$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Exercice 47. — Soit p un projecteur de E tel que $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \mathrm{id}_E$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de p.

Exercice 48. — Soit s une symétrie de E tel que $s \neq \mathrm{id}_E$ et $s \neq -\mathrm{id}_E$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de s.

Exercice 49. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, i.e. qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Exercice 50. — Déterminer les éléments propres de l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$:

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

Exercice 51. — Déterminer les éléments propres de l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$:

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

2.11. Endomorphismes qui commutent et sous-espaces stables

Proposition 52. — *Soient u et v des endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.*

1. *L'endomorphisme v stabilise* $\mathrm{Ker}\,(u)$ *et* $\mathrm{Im}\,(u)$.
2. *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, v stabilise le sous-espace propre $E_\lambda(u)$.*

❤ Une démonstration de la proposition 52 doit être connue.

Remarque 53. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. Comme u commute avec lui-même, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(u)$, $\mathrm{Im}\,(u)$ et $E_\lambda(u)$ sont stables par u.

Exercice 54. — Supposons E de dimension finie et considérons un endomorphisme u de E.

1. On suppose que :
$$E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u) \tag{1}$$
Que dire de la matrice de u dans une base adaptée à (1) ?
2. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \, \mathrm{id}_E) \tag{2}$$
Que dire de la matrice de u dans une base adaptée à (2) ?

3. Éléments propres d'une matrice carrée

Notation. — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

3.1. Définition des éléments propres d'une matrice carrée

Définition 55. — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est appelé valeur propre de M si :*
$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \quad X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})} \text{ et } MX = \lambda X$$
2. *L'ensemble des valeurs propres dans $\mathbf{K}$ de M est notée $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$.*
$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) = \left\{\lambda \in \mathbf{K} \ : \ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \quad X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})} \text{ et } MX = \lambda X\right\}$$
3. *Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de M, le sous-espace vectoriel :*
$$E_\lambda(M) := \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \ : \ MX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n) \qquad [\textit{sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})]$$
est appelé sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.
4. *Si $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$ alors tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}$ vérifiant $MX = \lambda X$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Remarque 56. — Quand on parle du spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il convient de préciser le corps dans lequel on travaille. En effet, si $\mathbf{L}$ est un sur-corps de $\mathbf{K}$, alors on peut également considérer M comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{L})$. On peut donc considérer les deux ensembles suivants :
$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) &:= \left\{\lambda \in \mathbf{K} \ : \ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}, \quad MX = \lambda X\right\} \\ \mathrm{Spec}_{\mathbf{L}}(M) &:= \left\{\lambda \in \mathbf{L} \ : \ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{L}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{L})}\right\}, \quad MX = \lambda X\right\}.\end{aligned}$$
Clairement $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) \subset \mathrm{Spec}_{\mathbf{L}}(M)$, mais il n'y a pas nécessairement égalité (cf. exercice suivant). C'est pourquoi, comme ci-dessus, on précisera le corps des scalaires considéré, en l'indiquant en indice du symbole Spec.

Exercice 57. — Calculer $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(M)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(M)$, où $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 58. — Déterminer les éléments propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Éléments propres d'un endomorphisme versus éléments propres d'une matrice

Proposition 59. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. $\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$
2. *Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$. Pour tout vecteur $x \in E$:*
$$x \in E_\lambda(u) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in E_\lambda(M)$$

♥ Une démonstration de la proposition 59 doit être connue.

Remarque 60. — D'après la précédente proposition, les éléments propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ont un lien ténu avec les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$:
$$\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}\right.$$
qui lui est canoniquement associé. En effet, si $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_A) = A$.

3.3. Majoration du nombre de valeurs propres d'une matrice

Proposition 61. — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ possède un nombre fini de valeurs propres et :*
$$|\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)| \leqslant n$$

♥ Une démonstration de la proposition 61 doit être connue.

4. Polynôme caractéristique

Notation. — Dans cette partie, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2 et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Ici le corps $\mathbf{K}$ est supposé infini, ce qui nous autorise à identifier fonctions polynomiales sur $\mathbf{K}$ et polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$.

4.1. Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Proposition 62. — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'application χ_M définie par :*

$$\chi_M \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda I_n - M) \end{array} \right.$$

est une application polynomiale. Le polynôme qui lui est associé, également noté χ_M, est appelé polynôme caractéristique de la matrice M.

Démonstration. La fonction polynomiale associée au polynôme :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left([I_n]_{k,\sigma(k)}\, X - [M]_{k,\sigma(k)}\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left(\delta_{k,\sigma(k)}\, X - [M]_{k,\sigma(k)}\right)$$

coïncide avec la fonction χ_M. □

Exercice 63. — Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2. Polynôme caractéristique de deux matrices semblables

Proposition 64. — *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$.*

La réciproque de la proposition 64 est fausse. En effet, les matrices I_n et $I_n + E_{1,n}$ ont même polynôme caractéristique (X^n) mais elles ne sont pas semblables (la seule matrice semblable à I_n est la matrice I_n elle-même).

4.3. Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Rappel. — Soit φ un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors d'après le théorème de changement de bases :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)\, \left(P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1}$$

où $P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_E)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi)) & = & \det\left(P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)\, \left(P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1}\right) & \\ & = & \det\left(P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)\, \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi))\, \det\left(\left(P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1}\right) & [\text{ multiplicativité du déterminant }] \\ & = & \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)) \quad \left[\text{si } A \text{ est inversible, } \det(A) \neq 0 \text{ et } \det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}\right]. & \end{array}$$

En d'autre termes, le déterminant de la matrice d'un endormorphisme dans une base de E ne dépend pas du choix de la base de E. Cette observation donne consistance à la définition suivante. Le déterminant de φ est le scalaire $\det(\varphi)$ défini par :

$$\det(\varphi) := \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Définition 65. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application χ_u définie par :*

$$\chi_u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda\, \mathrm{id}_E - u) \end{array} \right.$$

est une application polynomiale. Le polynôme qui lui est associé, également noté χ_u, est appelé polynôme caractéristique de l'endomorphisme u.

Remarque 66. — Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Alors, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda\, \mathrm{id}_E - u) := \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda\, \mathrm{id}_E - u)) = \det(\lambda I_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}(\lambda)$$

Le corps $\mathbf{K}$ étant infini, nous en déduisons :

$$\chi_u = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}$$

Remarque 67. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il est possible que χ_u possède des racines dans un sur-corps strict $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$. Dans ce cas, ces racines ne sont pas des valeurs propres de u à proprement parler, mais ce sont des valeurs propres de la matrice M de u dans une base de E, où M est vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{L})$.

4.4. Degré et coefficients remarquables du polynôme caractéristique

Théorème 68. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *χ_M est un polynôme de degré n.*
2. *Le coefficient de degré n est 1, i.e. χ_M est unitaire.*
3. *Le coefficient de degré $n-1$ de χ_M est $-\operatorname{tr}(M)$.*
4. *Le coefficient de degré 0 de χ_M est $(-1)^n \det(M)$.*

1. *χ_u est un polynôme de degré n.*
2. *Le coefficient de degré n est 1, i.e. χ_u est unitaire.*
3. *Le coefficient de degré $n-1$ de χ_u est $-\operatorname{tr}(u)$.*
4. *Le coefficient de degré 0 de χ_u est $(-1)^n \det(u)$.*

Éléments de démonstration. Nous savons que :

$$\chi_M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left(\delta_{k,\sigma(k)}\, X - [M]_{k,\sigma(k)}\right) = \prod_{k=1}^{n} (X - [M]_{k,k}) + \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left(\delta_{k,\sigma(k)}\, X - [M]_{k,\sigma(k)}\right)}_{=:P} \tag{3}$$

Comme une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ distincte de l'identité possède au plus $(n-2)$ points fixes :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\} \quad \deg\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\delta_{k,\sigma(k)}\, X - [M]_{k,\sigma(k)}\right)\right) \leqslant n-2$$

donc :

$$\deg(P) \leqslant n-2 \tag{4}$$

De (3) et (4), nous déduisons que $\deg(\chi_M) = n$ et, grâce aux formules de Viète, que :

$$[\chi_M]_n = \left[\prod_{k=1}^{n} (X - [M]_{k,k})\right]_n = 1 \qquad , \qquad [\chi_M]_{n-1} = \left[\prod_{k=1}^{n} (X - [M]_{k,k})\right]_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} [M]_{k,k} = -\operatorname{tr}(M)$$

Enfin :

$$[\chi_M]_0 = \chi_M(0) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$$

□

Remarque 69. — Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors $\chi_M = X^2 - \operatorname{tr}(M)\, X + \det(M)$.

4.5. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

Théorème 70. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Les valeurs propres de M dans $\mathbf{K}$ sont les racines de χ_M dans $\mathbf{K}$, i.e. :

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) = \{\lambda \in \mathbf{K} \;:\; \chi_M(\lambda) = 0\}$$

Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u dans $\mathbf{K}$, i.e. :

$$\mathrm{Spec}(u) = \{\lambda \in \mathbf{K} \;:\; \chi_u(\lambda) = 0\}$$

♥ Une démonstration du théorème 70 doit être connue.

Remarque 71. — Les théorèmes 68 et 70 livrent une nouvelle démonstration des deux résultats suivants.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ possède un nombre fini de valeurs propres et :

$$|\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)| \leqslant n$$

Un endomorphisme u de E possède un nombre fini de valeurs propres et :

$$|\mathrm{Spec}(u)| \leqslant \dim(E)$$

4.6. Valeurs propres de deux matrices semblables

Proposition 72. — *Si A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors* $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B)$.

Démonstration. D'après la proposition 64, $\chi_A = \chi_B$, d'où :

$$\{\lambda \in \mathbf{K} \;:\; \chi_A(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in \mathbf{K} \;:\; \chi_B(\lambda) = 0\} \tag{5}$$

D'autre part, le théorème 70 livre :

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbf{K} \;:\; \chi_A(\lambda) = 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B) = \{\lambda \in \mathbf{K} \;:\; \chi_B(\lambda) = 0\} \tag{6}$$

De (5) et (6), nous déduisons que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B)$. □

La réciproque de la proposition 72 est fausse. En effet les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ont même spectre ($\{1\}$), mais elles ne sont pas semblables. En effet, la seule matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité elle-même.

4.7. Une méthode pour déterminer les valeurs propres d'une matrice

Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie ou d'une matrice carrée revient à déterminer les racines de son polynôme caractéristique.

4.8. Quelques calculs de valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique

Exercice 73. — Déterminer les éléments propres des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 74. — Soit l'application linéaire

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (-y, x) \end{array} \right. .$$

1. Donner une interprétation géométrique de u et la matrice M de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Déterminer $\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(M)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(M)$.

4.9. Polynôme caractéristique et valeurs propres d'une matrice triangulaire

Proposition 75. — *Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $t_{1,1}, \ldots, t_{n,n}$. Alors :*

$$\chi_T = \prod_{k=1}^{n} (X - t_{i,i}).$$

En particulier les valeurs propres de T sont ses coefficients diagonaux.

Exercice 76. — Soit l'application linéaire :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.
2. En déduire les éléments propres de φ.

4.10. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Proposition 77. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Notons u_F l'endomorphisme de F induit par u.*

$$\chi_{u_F} \text{ divise } \chi_u \text{ dans } \mathbf{K}[X]$$

2. *Supposons qu'il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_r$ tous stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. Notons, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, u_{E_i} l'endomorphisme de E_i induit par u.*

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_{u_{E_i}}$$

♥ Une démonstration de la proposition 77 doit être connue.

4.11. Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Rappel. — Soient un polynôme non nul $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ une racine de P. La multiplicité de la racine λ de P est définie par :

$$\operatorname{mult}(P, \lambda) := \max\left\{k \in \mathbf{N}^* \ : \ (X - \lambda)^k \text{ divise } P \text{ dans } \mathbf{K}[X]\right\}$$

Ainsi la multiplicité $\operatorname{mult}(P, \lambda)$ est-elle l'unique entier $k \geqslant 1$ tel que :

$$(X - \lambda)^k \mid P \quad \text{et} \quad (X - \lambda)^{k+1} \nmid P$$

On dispose d'une caractérisation de la multiplicité $\operatorname{mult}(P, \lambda)$ *via* les polynômes dérivés itérés du polynôme P. La multiplicité $\operatorname{mult}(P, \lambda)$ est l'unique entier k tel que :

$$P(\lambda) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\lambda) \neq 0$$

Définition 78. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(M)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ et on note m_λ, son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de χ_M, i.e. :

$$m_\lambda = \operatorname{mult}(\chi_M, \lambda)$$

Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ et on note m_λ, son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de χ_u, i.e. :

$$m_\lambda = \operatorname{mult}(\chi_u, \lambda)$$

4.12. Dimension d'un sous-espace propre et ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante

Proposition 79. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Pour tout $\lambda \in \operatorname{Spec}(M)$:

$$1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(M)\right) \leqslant m_\lambda$$

Pour tout $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$:

$$1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(u)\right) \leqslant m_\lambda$$

♥ Une démonstration de la proposition 79 doit être connue.

La dimension d'un sous-espace propre n'égale pas nécessairement la multiplicité de la valeur propre correspondante, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exercice 80. — Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, $r \in [\![1, n-1]\!]$ et u l'unique endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ tel que :

$$u(e_1) = e_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u(e_r) = e_{r+1} \quad , \quad u(e_{r+1}) = 0_{\mathbf{K}^n} \quad , \quad \ldots \quad , \quad u(e_n) = 0_{\mathbf{K}^n}$$

Démontrer que 0 est la seule valeur propre de u, puis calculer la dimension $\dim\left(E_0(u)\right)$ et la multiplicité m_0.

4.13. Matrices compagnon

Exercice 81. — Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbf{K}[X]$. Définissons la matrice compagnon de P par :

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon de P.

Remarque 82. — Posons :

$$\Pi_n := \{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ P \text{ est unitaire, de degré } n\}.$$

D'après l'exercice précédent, l'application :

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \Pi_n \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$$

qui est bien définie, admet pour inverse à droite l'application :

$$C \left| \begin{array}{ccc} \Pi_n & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \longmapsto & C(P) \end{array} \right.$$

i.e. pour tout $P \in \Pi_n$:

$$\chi \circ C(P) = \chi_{C(P)} = P = \mathrm{id}_{\Pi_n}(P).$$

L'application χ est donc surjective.

4.14. Polynôme caractéristique de l'inverse d'une matrice inversible

Exercice 83. — Soit $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$.

1. Quel lien existe-t-il entre χ_M et $\chi_{M^{-1}}$?
2. En déduire un lien entre les valeurs propres de M et celle de M^{-1}.
3. Que dire des sous-espaces propres de M et de ceux de M^{-1} ?

4.15. Polynôme caractéristique du produit de deux matrices carrées

Exercice 84. — Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$.

1. On suppose que la matrice A est inversible. Démontrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. On pourra appliquer le résultat de la question 1 aux matrices $A - \lambda I_n$ et B, où $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A)$.

5. Diagonalisabilité

Notation. — Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un corps infini, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2 et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

5.1. Définition d'une matrice carrée diagonalisable

Définition 85. — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si elle est semblable à une matrice diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, i.e. s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ telles que :*

$$M = P\,D\,P^{-1}.$$

Exercice 86. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que M possède une unique valeur propre dans $\mathbf{K}$. Démontrer l'équivalence :

$$M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = \lambda\, I_n$$

5.2. Une condition nécessaire (non suffisante) de diagonalisabilité

Remarque 87. — Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$, alors elle a le même polynôme caractéristique qu'une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Son polynôme caractéristique χ_M est donc scindé sur $\mathbf{K}$. Cette observation livre la condition nécessaire (non suffisante, cf. exercice suivant) de diagonalisabilité suivante.

$$M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, telle que χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$, n'est pas nécessairement diagonalisable. En effet, la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $\chi_M = (X-1)^2$ mais elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{K}$. Si elle l'était, comme 1 est sa seule valeur propre, M serait semblable à la matrice I_2, donc égale à la matrice I_2.

5.3. Influence du corps de base sur la diagonalisabilité d'une matrice

Remarque 88. — Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut être non diagonalisable sur $\mathbf{K}$, mais diagonalisable sur un sur-corps $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$. Par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (son polynôme caractéristique est X^2+1 non scindé sur $\mathbf{R}$) mais M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ puisque :

$$M = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

5.4. Définition d'un endomorphisme diagonalisable

Définition 89. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous soit vérifiée.*

1. *La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale.*
2. *Les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont propres pour u.*

Remarque 90. — Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. Du théorème de changement de base, il découle :

$$u \text{ est diagonalisable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K}$$

Nous en tirons deux conséquences.

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.
2. On dispose de la condition nécessaire (non suffisante) de diagonalisabilité pour un endomorphisme :

$$u \text{ diagonalisable} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

5.5. Projecteurs et symétries sont diagonalisables

Proposition 91. — *Soit p un projecteur de E, i.e. soit p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. On suppose que p est non trivial, i.e. $p \neq \mathrm{id}_E$ et $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

1. *Pour tout $x \in E$:*
$$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}$$
2. $E = \mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p)$
3. $\mathrm{Spec}(p) = \{0, 1\}$
4. $E_0(p) = \mathrm{Ker}\,(p)$ *et* $E_1(p) = \mathrm{Im}\,(p)$
5. *p est diagonalisable.*

♥ Une démonstration de la proposition 91 doit être connue.

Proposition 92. — *Soit s une symétrie de E, i.e. soit s un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On suppose que s est non triviale, i.e. $s \neq \mathrm{id}_E$ et $s \neq -\mathrm{id}_E$.*

1. *Pour tout $x \in E$:*

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + p(x))}_{\in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - p(x))}_{\in \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)}$$

2. $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$
3. $\operatorname{Spec}(s) = \{-1, 1\}$
4. *s est diagonalisable.*

♥ Une démonstration de la proposition 92 doit être connue.

5.6. Caractérisation de la diagonalisabilité via la somme directe de sous-espaces propres

Théorème 93. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M.

$$M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \iff \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(M) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u.

$$u \text{ est diagonalisable } \iff \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(u) = E$$

♥ Une démonstration du théorème 93 doit être connue.

Remarque 94. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, soit p_k le projecteur de E sur $E_{\lambda_k}(u)$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant r \\ \ell \neq k}} E_{\lambda_\ell}(u)$, i.e. :

$$p_k \left| \begin{array}{ccc} E = \displaystyle\bigoplus_{\ell=1}^{r} E_{\lambda_\ell}(u) & \longrightarrow & E \\ x = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r} \underbrace{x_\ell}_{\in E_{\lambda_\ell}(u)} & \longmapsto & x_k \end{array} \right.$$

Alors $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, p_k$.

5.7. Caractérisation de la diagonalisabilité via la somme des dimensions des sous-espaces propres

Corollaire 95. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M. Alors :

$$M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \iff \sum_{k=1}^{r} \dim(E_{\lambda_k}(M)) = n$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u.

$$u \text{ est diagonalisable } \iff \sum_{k=1}^{r} \dim(E_{\lambda_k}(u)) = \dim(E).$$

Exercice 96. — Démontrer que l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \end{array} \right.$$

est diagonalisable.

Exercice 97. — L'endormorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

est-il diagonalisable ?

5.8. Une condition suffisante (non nécessaire) de la diagonalisabilité

Corollaire 98. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M.

$$|\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)| = n \implies M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K}$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u.

$$|\mathrm{Spec}(u)| = \dim(E) \implies u \text{ est diagonalisable}$$

Si E est de dimension $n \geqslant 2$, alors id_E est diagonalisable (sa matrice dans toute base de E est I_n, qui est diagonale) mais $\mathrm{Spec}(\mathrm{id}_E) = \{1\}$. Ceci fournit un contre-exemple à la réciproque du précédent corollaire 98.

Exercice 99. — Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{tr}(M)^2 > 4 \det(M)$. Démontrer que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

5.9. Caractérisation de la diagonalisabilité via le scindage de χ et les ordres de multiplicité des racines

Corollaire 100. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives. La matrice M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} & \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbf{K} \\ \text{et} & \\ & \text{pour tout } k \in [\![1, r]\!],\ \dim(E_{\lambda_k}(M)) = m_{\lambda_k}. \end{cases}$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives. L'endomorphisme u est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} & \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbf{K} \\ \text{et} & \\ & \text{pour tout } k \in [\![1, r]\!],\ \dim(E_{\lambda_k}(u)) = m_{\lambda_k}. \end{cases}$$

♥ Une démonstration du corollaire 100 doit être connue.

Exercice 101. — La matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

5.10. Trace, déterminant et valeurs propres d'un endomorphisme/une matrice diagonalisable

Proposition 102. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbf{K}$ et u un endomorphisme diagonalisable de E.*

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives.

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{r} m_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det(M) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives.

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=1}^{r} m_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}$$

Exercice 103. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Démontrer :

$$\det(M) > 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{\det(M)} \leqslant \frac{1}{n}\ \mathrm{tr}(M).$$

5.11. Un exemple de calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Exercice 104. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que u est diagonalisable.
2. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.
3. En déduire la forme explicite de A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

5.12. Matrices à coefficients réels diagonalisables sur C

Exercice 105. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose M diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux ont un format $(1,1)$ ou $(2,2)$.

6. Trigonalisabilité

Notation. — Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un corps infini, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2 et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

6.1. Définition d'une matrice carrée trigonalisable

Définition 106. — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe une matrice triangulaire supérieure $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que :*

$$M = P\,U\,P^{-1}.$$

Remarque 107. — Dans la définition 106, on peut remplacer « triangulaire supérieure » par « triangulaire inférieure », comme on l'explique ci-dessous. Considérons une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure :

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endormorphisme de $\mathbf{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{K}^n$ est U. Ainsi :

$$\begin{array}{rcccccccccc} f(e_n) & = & u_{n,n}\,e_n & + & u_{n-1,n}\,e_{n-1} & + & \cdots & + & u_{2,n}\,e_2 & + & u_{1,n}\,e_1 \\ f(e_{n-1}) & = & & & u_{n-1,n-1}\,e_{n-1} & + & \cdots & + & u_{2,n-1}\,e_2 & + & u_{2,n-1}\,e_1 \\ & \vdots & & & & & & & & & \\ f(e_2) & = & & & & & & & u_{2,2}\,e_2 & + & u_{1,2}\,e_1 \\ f(e_1) & = & & & & & & & & & u_{1,1}\,e_1. \end{array}$$

La famille :

$$\mathcal{B}_1 := (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_2, e_1)$$

obtenue en « écrivant les vecteurs de la base $\mathcal{B}_0$ dans l'ordre inverse » est une base de $\mathbf{K}^n$

$$L := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) \begin{pmatrix} u_{n,n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_{n-1,n} & u_{n-1,n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u_{2,2} & 0 \\ u_{1,n} & u_{1,n-1} & \cdots & u_{1,2} & u_{1,1} \end{pmatrix}.$$

La matrice L est triangulaire inférieure. Comme elle représente, elle aussi, l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$, les matrices U et L sont semblables. Plus concrètement, par théorème de changement de base :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)}_{U} = \underbrace{P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1}}_{\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)}_{L} \left(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1}$$

6.2. Influence du corps de base sur la trigonalisabilité d'une matrice

Remarque 108. — Si $\mathbf{L}$ est un sur-corps de $\mathbf{K}$, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut-être trigonalisable sur $\mathbf{L}$, sans être trigonalisable sur $\mathbf{K}$. Considérons par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $\chi_M = X^2 + 1$.

- La matrice M n'est pas trigonalisable sur $\mathbf{R}$. Si elle l'était, elle serait semblable à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et il viendrait :
$$X^2 + 1 = \chi_M = (X-a)(X-c)$$
ce qui n'est pas (le polynôme X^2+1 n'a aucune racine réelle).
- La matrice M est trigonalisable sur $\mathbf{C}$. En effet, elle est de format $(2,2)$ et possède 2 valeurs propres distinctes sur $\mathbf{C}$. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et *a fortiori* trigonalisable sur $\mathbf{C}$.

6.3. Définition d'un endomorphisme trigonalisable

Définition 109. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous soit vérifiée.*

1. *La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.*
2. *Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ est stable par u.*

Remarque 110. — Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. Du théorème de changement de base, il découle :
$$u \text{ est trigonalisable} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{K}$$
En particulier une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé est trigonalisable.

6.4. Caractérisation de la trigonalisabilité via le polynôme caractéristique

Théorème 111. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

La matrice M est trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si le polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$.	*L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$.*

Démonstration. On considère uniquement le cas des endomorphismes. L'implication directe est claire. Nous démontrons l'implication réciproque en raisonnant par récurrence sur la dimension de E.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ le prédicat défini par :

$\mathcal{P}(n)$ | « pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$, u est trigonalisable ».

(a) *Initialisation à $n=1$.* L'assertion $\mathcal{P}(1)$ est vraie car une matrice de format (1,1) est triangulaire.

(b) *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Considérons un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension $(n+1)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$.

   i. Comme χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$, il possède une racine $\lambda \in \mathbf{K}$. Soit e_1 un vecteur propre pour u associé à la valeur propre λ.

   ii. Si l'on complète la famille libre (e_1) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E, alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix}$$
où $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

   iii. En développant par rapport à la première colonne, il vient :
$$\chi_u(X) = \det \begin{pmatrix} X-\lambda & L \\ 0 & X\,I_n - A \end{pmatrix} = (X-\lambda)\det(X\,I_n - A) = (X-\lambda)\,\chi_A(X)$$
Le polynôme $\chi_A(X)$ donc scindé sur $\mathbf{K}$ comme facteur d'un polynôme scindé sur $\mathbf{K}$.

   iv. Si nous définissons les applications i et p définies par :
$$i \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_{n+1}) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad p \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_{n+1}) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k\, e_k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} x_k\, e_k \end{array} \right.$$
alors :
$$\mathrm{Mat}_{(e_2, \ldots, e_{n+1})}(p \circ u \circ i) = A$$

v. D'après iii et iv, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme $p \circ u \circ i$ du du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de dimension n. Il existe une base $(e'_2, \ldots, e'_{n+1})$ de $\mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_{n+1})$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{(e'_2, \ldots, e'_{n+1})}(p \circ u \circ i)$$

est triangulaire supérieure.

vi. La famille $\mathcal{C} := (e_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1})$ est une base de :

$$E = \mathrm{Vect}\,(e_1) \oplus \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_{n+1})$$

puisque génératrice de E et formée de $(n+1) = \dim(E)$ éléments.

vii. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. D'après v, nous savons que :

$$p(u(e'_k)) = p \circ u \circ i(e'_k) \in \mathrm{Vect}\,(e'_2, \ldots, e'_k)$$

et nous en déduisons que :

$$u(e'_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e'_2, \ldots, e'_k)$$

Comme d'autre part :

$$u(e_1) \in \mathrm{Vect}\,(e_1)$$

la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est triangulaire supérieure.

□

6.5. Trigonalisabilité dans le cas où le corps de base est $\mathbf{C}$

Corollaire 112. — *Dans le cas où le corps de base est $\mathbf{C}$, nous disposons des deux résultats suivants.*

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable sur $\mathbf{C}$.

Tout endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

Démonstration. Ce résultat découle du théorème 111 et du théorème d'Alembert Gauß, qui stipule que tout polynôme à coefficients complexes, non constant, est scindé sur $\mathbf{C}$.

□

6.6. Trace, déterminant et valeurs propres d'un endomorphisme/d'une matrice trigonalisable

Proposition 113. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice trigonalisable sur $\mathbf{K}$ et u un endomorphisme trigonalisable de E.*

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives.

$$\mathrm{tr}\,(M) = \sum_{k=1}^{r} m_k\, \lambda_k \quad \textit{et} \quad \det(M) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives.

$$\mathrm{tr}\,(u) = \sum_{k=1}^{r} m_k\, \lambda_k \quad \textit{et} \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}$$

6.7. Trigonalisation d'une matrice trigonalisable de format $(2, 2)$

Méthode. — Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ trigonalisable et non diagonalisable sur $\mathbf{K}$. Notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à M :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right.$$

Si $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K})$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = M$$

Nécessairement :

$$\chi_f = (X - \lambda)^2 \qquad \text{et} \qquad \dim(E_\lambda(f)) = 1$$

où λ est un scalaire dans $\mathbf{K}$.
Soit X_1 un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.
On complète la famille libre (X_1) en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K})$ (cf. théorème de la base incomplète).
Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbf{K}$ et d'après le théorème de changement de base :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $P := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = (X_1 \,|\, X_2) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 114. — Soit la matrice $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est trigonalisable sur $\mathbf{R}$, puis la trigonaliser.
2. Déterminer les couples de fonctions $(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})^2$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & 3x & - & y \\ y' & = & x & + & y. \end{array} \right.$$

6.8. Trigonalisation d'une matrice trigonalisable de format $(3, 3)$

Méthode. — Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ trigonalisable et non diagonalisable sur $\mathbf{K}$. Notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à M :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right.$$

Si $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = M$$

Une analyse des éléments propres de M permet de scinder l'étude de la trigonalisation de la matrice M en trois cas.

1. $\chi_f = (X - \lambda)^2 (X - \mu)$ où λ, μ sont deux scalaires dans $\mathbf{K}$ distincts, $\dim(E_\lambda(f)) = 1$ et $\dim(E_\mu(f)) = 1$.
2. $\chi_f = (X - \lambda)^3$ où λ est un scalaire dans $\mathbf{K}$ et $\dim(E_\lambda(f)) = 2$.
3. $\chi_f = (X - \lambda)^3$ où λ est un scalaire dans $\mathbf{K}$ et $\dim(E_\lambda(f)) = 1$.

- *Cas n°1 :* $\chi_f = (X - \lambda)^2 (X - \mu)$ *où* λ, μ *sont deux scalaires dans* $\mathbf{K}$ *distincts,* $\dim(E_\lambda(f)) = 1$ *et* $\dim(E_\mu(f)) = 1$.
  On peut démontrer que :
  $$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K}) = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda\ \mathrm{id})^2\right) \oplus E_\mu(f)$$
  En outre le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda\ \mathrm{id})^2\right)$ est de dimension 2 et stable par u.
  Soit X_1 (resp. X_3) un vecteur propre pour la valeur propre λ (resp. μ).
  On complète la famille libre (X_1) de $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda\ \mathrm{id})^2\right)$ en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda\ \mathrm{id})^2\right)$ (cf. théorème de la base incomplète), de sorte que la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$.
  Alors :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$
  où $a \in \mathbf{K}$ et d'après le théorème de changement de base :
  $$M = P \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$$
  où $P := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = (X_1 \,|\, X_2 \,|\, X_3) \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$.

- *Cas n°2 :* $\chi_f = (X - \lambda)^3$ *où* λ *est un scalaire dans* $\mathbf{K}$ *et* $\dim(E_\lambda(f)) = 2$.
  Soit (X_1, X_2) une base de $E_\lambda(f)$. On complète la famille libre (X_1, X_2) en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$ (cf. théorème de la base incomplète).
  Alors :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $a, b \in \mathbf{K}$ et d'après le théorème de changement de base :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $P := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = (X_1 \mid X_2 \mid X_3) \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$.

- *Cas n°3 : $\chi_f = (X-\lambda)^3$ où λ est un scalaire dans $\mathbf{K}$ et $\dim(E_\lambda(f)) = 1$.*
On peut démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^2\right)$ est de dimension 2 et stable par u.
Soit X_1 un vecteur propre pour la valeur propre λ.
On complète la famille libre (X_1) de $\mathrm{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^2\right)$ en une base (X_1, X_2) de $\mathrm{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^2\right)$ (cf. théorème de la base incomplète). On complète ensuite la famille libre (X_1, X_2) en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$.
Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbf{K}$ et d'après le théorème de changement de base :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $P := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = (X_1 \mid X_2 \mid X_3) \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$.

Exercice 115. — Démontrer que $A := \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbf{R}$, puis la trigonaliser.

7. Nilpotence

Notation. — Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un corps infini, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2 et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

7.1. Définition d'une matrice carrée nilpotente

Définition 116. — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^p = 0$. Dans ce cas, le nilindice de la matrice M est :*

$$\nu(M) := \min\{p \in \mathbf{N}^* \;:\; M^p = 0\} \in \mathbf{N}^*$$

Exemple 117. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure stricte (avec des coefficients diagonaux tous nuls). Alors :

$$M^n = 0$$

donc la matrice M est nilpotente. Pour l'établir, nous démontrons en raisonnant par récurrence finie que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{P}(k) \;:\; « \;\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \geqslant j + 1 - k \Longrightarrow \left[M^k\right]_{i,j} = 0 \;»$$

- *Initialisation à $k = 1$.* L'assertion $\mathcal{P}(1)$ signifie que la matrice M est triangulaire stricte. Elle est donc vraie.
- *Hérédité.* Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que l'assertion $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$i \geqslant j - k$$

Nous calculons :

$$\left[M^{k+1}\right]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \left[M^k\right]_{i,\ell} [M]_{\ell,j} \tag{7}$$

Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$.

— Si $i \geqslant \ell + 1 - k$ alors $\left[M^k\right]_{i,\ell} = 0$ (hypothèse de récurrence).
— Sinon $i \leqslant \ell - k$ et, comme $i \geqslant j - k$, il vient $\ell \geqslant j$, ce qui implique que $[M]_{\ell,j} = 0$ (A est triangulaire supérieure stricte).

Tous les termes de la somme (7) étant nuls, nous en déduisons que $\left[M^{k+1}\right]_{i,j} = 0$.

L'assertion $\mathcal{P}(n)$ étant vraie, nous savons que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \geqslant j + 1 - n \Longrightarrow [M^n]_{i,j} = 0 \tag{8}$$

Comme, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \geqslant j + 1 - n$, nous déduisons de (8) que la matrice M^n est nulle.

7.2. Définition d'un endomorphisme nilpotent

Définition 118. — *Un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (la puissance est prise relativement au produit de composition). Dans ce cas, le nilindice de l'endomorphisme u est :*

$$\nu(u) := \min\{p \in \mathbf{N}^* \ : \ u^p = 0\} \in \mathbf{N}^*$$

Remarque 119. — Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. L'application :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{L}(E), \,\cdot\,, +, \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \,\cdot\,, +, \times) \\ v & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \end{array} \right.$$

étant un isomorphisme de **K**-algèbres (un isomorphisme d'anneaux qui est **K**-linéaire) :

$$u \text{ est nilpotent} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est nilpotente}$$

et, dans le cas où u est nilpotent :

$$\nu(u) = \nu(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$$

En particulier une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé est nilpotente.

7.3. Majoration du nilindice

Proposition 120. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Si M est nilpotente, alors son nilindice vérifie : $$\nu(M) \leqslant n$$	*Si u est nilpotent, alors son nilindice vérifie :* $$\nu(u) \leqslant \dim(E)$$

Démonstration. Nous ne considérons que le cas des endomorphismes. Soit u un endomorphisme nilpotent de nilindice noté ν. Alors :

$$u^{\nu-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad u^{\nu} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Comme $u^{\nu-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, il existe $x \in E$ tel que $u^{\nu-1}(x) \neq 0_E$. Nous démontrons que la famille :

$$\left(x, u(x), \ldots, u^{\nu-1}(x)\right)$$

de ν vecteurs de E est libre, en raisonnant par l'absurde. Nous en déduirons que $\nu \leqslant \dim(E)$.
Supposons donc qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda_j \, u^j(x) = 0_E \tag{9}$$

Considérons :

$$i := \min\{j \in [\![0, \nu-1]\!] \ : \ \lambda_j \neq 0_{\mathbf{K}}\}$$

Nous pouvons écrire l'identité (9) sous la forme :

$$\sum_{j=i}^{\nu-1} \lambda_j \, u^j(x) = 0_E$$

En appliquant $u^{\nu-1-i}$ (licite car $\nu - 1 - i \geqslant 0$), il vient :

$$\sum_{j=i}^{\nu-1} \lambda_j \, u^{\nu-1+j-i}(x) = 0_E \tag{10}$$

Soit $j \geqslant i+1$. Comme $\nu - 1 + j - i \geqslant \nu$, il vient $u^{\nu-1+j-i}(x) = 0_E$. L'identité (10) se simplifie donc pour donner :

$$\underbrace{\lambda_i}_{\neq 0_{\mathbf{K}}} \underbrace{u^{\nu-1}(x)}_{\neq 0_E} = 0_E$$

□

7.4. Caractérisation de la nilpotence via le polynôme caractéristique

Théorème 121. — *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La matrice M est nilpotente.*
2. *La matrice M est trigonalisable sur $\mathbf{K}$, avec pour seule valeur propre 0.*
3. $\chi_M = X^n$

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *L'endomorphisme u est nilpotent.*
2. *L'endomorphisme u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.*
3. $\chi_u = X^{\dim(E)}$

Démonstration. Nous ne considérons que le cas des endomorphismes.

- *1 $\Longrightarrow$ 3.* Nous démontrons cette implication en raisonnant par récurrence sur la dimension de E.
  Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ le prédicat défini par :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{« pour tout } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel } E \text{ de dimension } n, \text{ pour tout } u \in \mathcal{L}(E) \text{ nilpotent, } \chi_u = X^n \text{ »}$$

  - *Initialisation à $n = 1$.* Un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1 est nul. Son polynôme caractéristique égale donc X.
  - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Considérons un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $(n+1)$ et u un endomorphisme nilpotent de E, de nilindice noté ν.
    i. Comme :
    $$\det(u)^\nu = \det(u^\nu) = 0$$
    le déterminant de u est nul. Le noyau de u est donc distinct de $\{0_E\}$. Soit e_1 un vecteur non nul du noyau de u.
    ii. Si l'on complète la famille libre (e_1) en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E, alors :
    $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix}$$
    où $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
    iii. En développant par rapport à la première colonne, il vient :
    $$\chi_u(X) = \det \begin{pmatrix} X & L \\ 0 & X\,I_n - A \end{pmatrix} = X \,\det(X\,I_n - A) = X\,\chi_A(X)$$
    Il nous reste à établir que $\chi_A(X) = X^n$.
    iv. Nous calculons par blocs :
    $$0_{\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^\nu) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^\nu = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ 0 & A^\nu \end{pmatrix}$$
    où $L' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. La matrice A est donc nilpotente.
    v. Notons φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Il est nilpotent donc, d'après l'hypothèse de récurrence :
    $$\chi_A = \chi_{\varphi(A)} = X^n$$
- *3 $\Longrightarrow$ 2.* Supposons que $\chi_u = X^{\dim(E)}$. Alors :
  $$\mathrm{Spec}(u) = \{\lambda \in \mathbf{K} \ : \ \chi_u(\lambda) = 0\} = \{0\}$$
  et, comme le polynôme χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$, le théorème 111 livre la trigonalisabilité de u.
- *2 $\Longrightarrow$ 1.* Nous notons n la dimension de E et nous supposons que u est trigonalisable avec comme seule valeur propre 0. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire stricte. Nous savons alors que :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = 0$$
  Ainsi $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

□

Exercice 122. — Que dire d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui est à la fois diagonalisable et nilpotente ?

Exercice 123. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. La matrice A est nilpotente.
2. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{tr}\left(A^k\right) = 0$.