Procédés sommatoires discrets

Notation. — Dans ce chapitre, n est un entier naturel non nul $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

1.1. Sommes partielles, convergence et divergence

Définition 1. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$.*

1. *Soit $n \in \mathbf{N}$. La n-ième somme partielle de la série $\sum u_n$ est définie par $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$.*
2. *La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ converge dans $(E, ||\cdot||)$. Elle est dite divergente dans le cas contraire.*

Exemple 2. — La série numérique $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge. En effet, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{[somme télescopique]}$$

Exemple 3. — La série numérique $\sum \frac{1}{n}$, appelée série harmonique, est divergente et il existe une constante γ (constante d'Euler) telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{[la constante } \gamma \text{ est comprise entre } 0,57 \text{ et } 0,58]$$

Exemple 4. — La série $\sum \frac{X^n}{n}$ est divergente dans $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$. En effet, supposons qu'elle converge, notons $S \in \mathbf{R}[X]$ sa somme et considérons un entier naturel fixé $d > \deg(S)$. Alors

$$\left|\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} - S \right|\right|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}} \tag{1}$$

Nous calculons

$$\forall\, n \geqslant d \qquad \left|\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} - S \right|\right|_\infty \geqslant \left| \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} - S \right]_d \right| = \left| \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} \right]_d \right| = \frac{1}{d} \tag{2}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous déduisons de (1) et (2) que $0 \geqslant \frac{1}{d}$. Contradiction.

1.2. Somme et restes d'une série convergente

Définition 5. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge.*

1. *La somme de la série convergente $\sum u_n$ est définie par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{=:S_n} \qquad \textit{[la somme est la limite de la suite des sommes partielles]}$$

2. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$ est défini par*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{=:S_n}$$

En conservant le contexte de la définition 5

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} 0_E \qquad \text{[la suite des restes converge vers le vecteur nul]}$$

et on pourra s'intéresser à estimer la vitesse de cette convergence.

Exemple 6. — Nous avons vu que la série numérique $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge (cf. exemple 2). De notre étude, nous déduisons que sa somme vaut 1 et que

$$\forall\, n \geqslant 2 \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$$

Exemple 7. — La série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, appelée série harmonique alternée, est convergente et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ vaut $-\ln(2)$.

1.3. Série géométrique

Proposition 8. — *Pour tout $q \in \mathbf{C}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & si\ q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \end{cases}$$

Proposition 9. — *Soit $q \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$.*

1. *La suite de nombres complexes $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, sa limite est nulle.*
2. *La série de nombres complexes $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.*
3. *Si $|q| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.*
4. *Si $|q| < 1$ alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(q^{n+1}\right)$.*

1.4. Série exponentielle

Proposition 10. — *Soit $z \in \mathbf{C}$. La série de nombres complexes $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.*

1.5. Linéarité de la somme d'une série convergente

Proposition 11. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. Si les séries vectorielles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série vectorielle $\sum \lambda\, u_n + \mu\, v_n$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\, u_n + \mu\, v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exercice 12. — En remarquant que, pour tout $n \geqslant 2$, $n^2 = n(n-1) + n$, démontrer que la série $\sum \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa somme.

1.6. Le terme général d'une série convergente tend vers le vecteur nul

Proposition 13. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$.*

1. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} 0_E$.*
2. *Si $u_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} 0_E$ alors la série $\sum u_n$ diverge. Dans ce cas, on parle de divergence grossière.*

Exemple 14. — La série $\sum X^n$ est grossièrement divergente dans $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$.

1.7. Lien suite-série et série télescopique

Proposition 15. — *Soient $(E, || \cdot ||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$.*

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $(E, || \cdot ||)$ si et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge dans $(E, || \cdot ||)$.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$.*

Exemple 16. — Étudier la nature de la série numérique $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2. Séries à termes réels positifs ou nuls

2.1. Critère de convergence pour les séries à termes réels positifs ou nuls

Proposition 17. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls.*

1. *La série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $\displaystyle\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.*
2. *Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\{S_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$.*
3. *Si la série numérique $\sum u_n$ diverge alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Éléments de démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc croissante. Les assertions découlent alors du théorème de la limite monotone pour les suites. $\square$

Exercice 18. — À l'aide de l'exemple 2, démontrer que la série numérique $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2.2. Théorème de domination pour les séries à termes réels positifs ou nuls

Théorème 19. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que*

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.*

L'hypothèse de signe dans le théorème 20 est importante et doit être soulignée lorsqu'on l'applique. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge et

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad -\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Cependant la série $\displaystyle\sum -\frac{1}{n}$ diverge.

2.3. Théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs ou nuls

Théorème 20. — *Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Supposons que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

L'hypothèse de signe dans le théorème 19 est importante et doit être soulignée lorsqu'on l'applique. En effet la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère des séries alternées) et

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

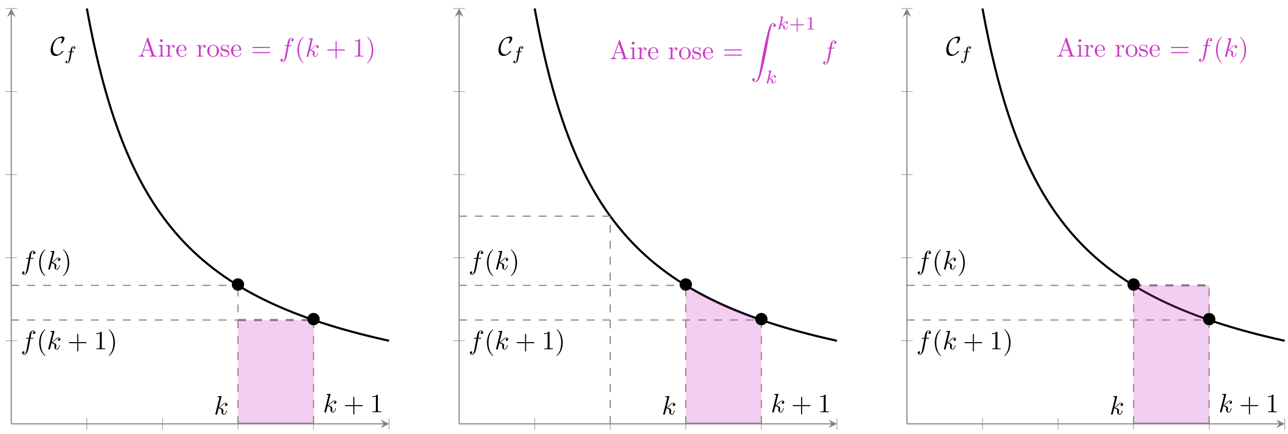
Cependant la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ diverge, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 21. — Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

3. Technique de comparaison série-intégrale et intégrales de Riemann

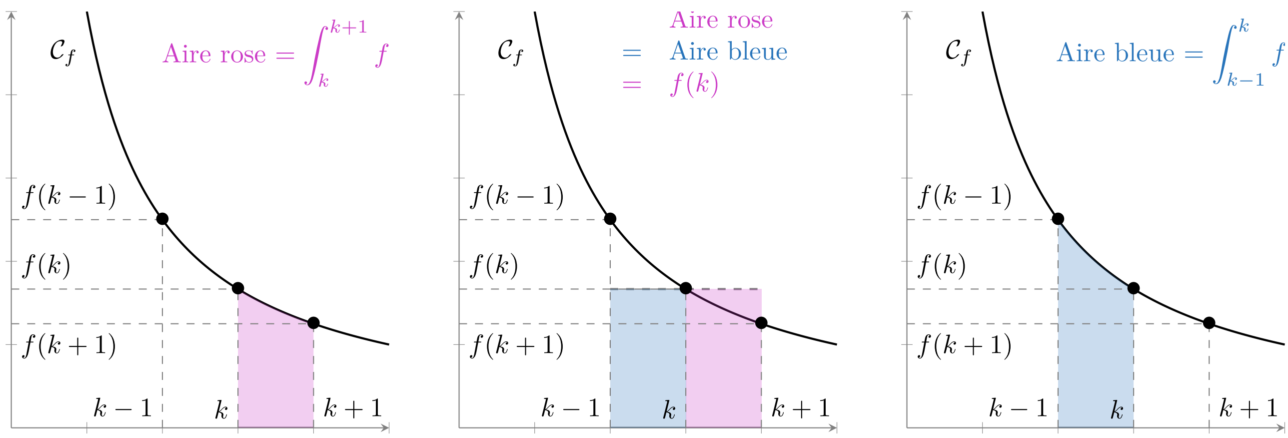
Considérons $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f\colon [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. La technique de comparaison entre la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ repose sur les inégalités géométriques suivantes.

$$\forall\, k \geqslant n_0 \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(k) \tag{3}$$



et

$$\forall\, k \geqslant n_0 + 1 \quad \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ \mathrm{d}t \tag{4}$$



Théorème 22. — *Soient $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. Alors la série numérique $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

Éléments de démonstration. Comme la fonction f est positive

- la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite numérique $\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right)_{n \geqslant n_0}$ est majorée ;
- l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $A \longmapsto \int_{n_0}^{A} f(t)\ \mathrm{d}t$ est majorée, si et seulement si la suite numérique $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n \geqslant n_0}$ est majorée.

Soit $n \geqslant n_0 + 1$. En sommant les inégalités géométriques (3) entre n_0 et $n-1$, il vient

$$-f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

puis

$$0 \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(n_0)$$

□

Corollaire 23. — *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que la série numérique (de Riemann) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Exercice 24. — Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Étudier la nature de la série numérique (de Bertrand) $\sum \frac{1}{n^\alpha\ \ln^\beta(n)}$.

> Condidérons $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. En additionnant membre à membre les inégalités géométriques (3) et (4) on peut
>
> - obtenir un équivalent des restes $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$, si la série $\sum f(n)$ converge ;
> - obtenir un équivalent des sommes partielles $\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$, si la série $\sum f(n)$ diverge ;
>
> si l'on connaît une primitive explicite de la fonction f. De plus, cette démarche s'adapte aux fonctions continues par morceaux, positives et croissantes sur $[n_0, +\infty[$.

Exercice 25. — Déterminer un équivalent de $u_n = 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26. — Soit α un réel strictement positif.

1. Supposons $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Supposons $\alpha = 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Supposons $\alpha < 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27. — Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers 1^+, de la fonction ζ définie par

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

4. Séries absolument convergentes

4.1. Définition d'une série vectorielle absolument convergente

Définition 28. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. La série vectorielle $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série numérique $\sum ||u_n||$ converge.*

Exemple 29. — La série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

Une série vectorielle absolument convergente n'est pas nécessairement convergente, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 30. — La série $\sum \frac{X^n}{2^n}$ de l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$ est absolument convergente (la série numérique $\sum 2^{-n}$ converge), mais elle diverge dans $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$ (adapter les arguments donnés dans l'exemple 4).

4.2. Série absolument convergente de vecteurs d'un K-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 31. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. Si la série vectorielle $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge dans E.*

Exercice 32. — Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Exercice 33. — Soient un entier $p \geqslant 1$ et $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

1. Soit $H \in \mathcal{B}\left(0_{\mathcal{M}_p(\mathbf{K})}, 1\right)$. Démontrer que la série matricielle $\sum (-1)^n H^n$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, puis calculer le produit
$$(I_p + H)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n\right)$$
2. Soit $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$. Justifier que l'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & P^{-1} A \end{array} \right.$$
est continue.
3. En déduire que $\mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

4.3. Théorème de comparaison pour les séries numériques

Théorème 34. — *Soient $(u_n)_{n\in N} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Supposons que*
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$$
Si la série numérique $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

L'hypothèse de signe dans le théorème est importante et doit être soulignée lorsqu'on l'applique. En effet la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et
$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$
Cependant la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 35. — Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$.

5. Exponentielle d'un endomorphisme d'un K-e.v. de dimension finie, d'une matrice

5.1. Définitions

Définition 36. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathbf{N}^*$.*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'exponentielle de u, notée e^u ou $\exp(u)$, est la somme de la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ qui converge dans $\mathcal{L}(E)$, i.e.

$$e^u = \exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \in \mathcal{L}(E)$$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. L'exponentielle de A, notée e^A ou $\exp(A)$, est la somme de la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ qui converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, i.e.

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$$

Remarque 37. — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(u)) = \exp\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$

Exercice 38. — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $\lambda \in \mathbf{N}$ et $h \in \mathcal{L}(E)$ l'homothétie de rapport λ. Calculer $\exp(h)$.
2. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Calculer $\exp(p)$.
3. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Calculer $\exp(s)$.

5.2. Exponentielle d'une matrice diagonale

Proposition 39. — *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ et $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Alors*

$$\exp(D) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p}\right)$$

5.3. Exponentielle de deux matrices semblables

Proposition 40. — *Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ deux matrices semblables sur $\mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ telle que $A = P\,B\,P^{-1}$. Alors*

$$\exp(A) = P\ \exp(B)\ P^{-1}$$

Exercice 41. — Calculer l'exponentielle de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 42. — Calculer l'exponentielle de la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

5.4. Spectre d'une exponentielle de matrice

Proposition 43. — *Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A)$. Alors*

$$e^\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(\exp(A))$$

5.5. Exponentielle d'une somme d'endomorphismes, deux matrices, qui commutent

Proposition 44. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathbf{N}^*$.*

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors

$$\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telles que $A\,B = B\,A$. Alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\ \exp(B)$$

Démonstration. Considérons une norme sous-multiplicative $||\cdot||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et fixons $n \in \mathbf{N}$. Comme A et B commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de $A+B$.

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^{s} \frac{s!}{i!\,(s-i)!} A^i B^{s-i} = \sum_{s=0}^{2n} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!\,(s-i)!} A^i B^{s-i} \tag{5}$$

Si nous posons, pour tout $s \in [\![0, 2n]\!]$

$$D_s := \{(i,j) \in [\![0,n]\!] \ : \ i+j = s\}$$

alors nous déduisons de (5) que

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{2n} \sum_{(i,j)\in D_s} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j$$

En posant

$$T_{2n} := \bigsqcup_{s=0}^{2n} D_s = \{(i,j) \in [\![0,2n]\!] \ : \ i+j \leqslant 2n\}$$

il vient

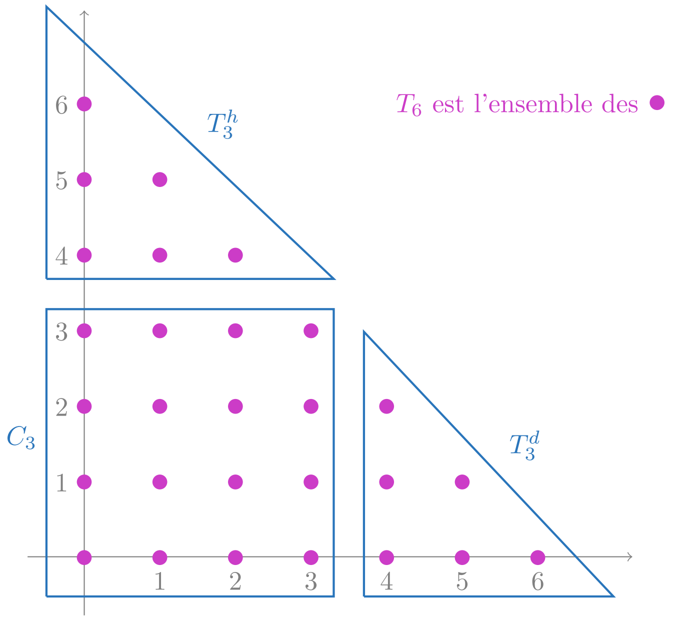
$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{(i,j)\in T_{2n}} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j.$$

Le triangle T_{2n} peut être partitionné comme suit

$$T_{2n} = \underbrace{[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]}_{=:C_n \text{ (carré)}} \ \bigsqcup \ \underbrace{\{(i,j)\in T_{2n} \ : \ j \geqslant p+1\}}_{=:T_n^h \text{ (triangle haut)}} \ \bigsqcup \ \underbrace{\{(i,j)\in T_{2n} \ : \ i \geqslant p+1\}}_{=:T_n^d \text{ (triangle à droite)}}$$

Illustration du découpage

$$T_6 \quad = \quad C_3 \ \bigsqcup \ T_3^h \ \bigsqcup \ T_3^d$$



Ainsi

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{(i,j)\in C_n} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j + \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j + \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j \tag{6}$$

Comme

- $\displaystyle \sum_{(i,j)\in C_n} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!} \right)$
- $\displaystyle \left|\left| \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j \right|\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} \,||\, A \,||^i \,||\, B \,||^j \leqslant \sum_{(i,j)\in \mathbf{N}\times [\![n+1,+\infty[\![} \frac{1}{i!\,j!} \,||\, A \,||^i \,||\, B \,||^j = \exp\left(||\, A \,||\right) \left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{||\, B \,||^i}{i!} \right)$
- $\displaystyle \left|\left| \sum_{(i,j)\in T_n^d} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j \right|\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_n^d} \frac{1}{i!\,j!} \,||\, A \,||^i \,||\, B \,||^j \leqslant \sum_{(i,j)\in [\![n+1,+\infty[\![\times \mathbf{N}} \frac{1}{i!\,j!} \,||\, A \,||^i \,||\, B \,||^j = \left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{||\, A \,||^i}{i!} \right) \exp\left(||\, B \,||\right)$

et comme le produit matriciel est continu, nous pouvons faire tendre n vers $+\infty$ dans l'identité (6) pour en déduire

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$$

$\square$

Exercice 45. — Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Justifier que $\exp(A) \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ et exprimer $\exp(A)^{-1}$ comme une exponentielle de matrice.

Remarque 46. — Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telle que χ_A est scindé sur $\mathbf{K}$, i.e. telle que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Nous démontrerons que

$$\exists\,!\,(D,N) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \quad \begin{cases} D \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \\ N \text{ est nilpotente} \\ D\,N = N\,D \\ A = D + N \end{cases} \qquad \text{[décomposition de Dunford]}$$

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ tels que $A = P\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\ P^{-1}$. Si l'on note $\nu \in [\![1, n]\!]$ le nilindice de la matrice nilpotente N, il vient

$$\exp(A) = \exp(D)\ \exp(N) = P\ \exp(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p))\, P^{-1}\ \exp(N) = P\ \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p}\right)\ P^{-1}\ \left(\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{N^k}{k!}\right)$$

Exercice 47. — Calculer l'exponentielle de la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

6. Règle de d'Alembert pour les séries à termes réels strictement positifs

Théorème 48. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

1. *Si $\ell < 1$, alors la série numérique $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $\ell = 1^+$, alors la série numérique $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Démonstration.

1. Supposons $\ell < 1$ et fixons un réel $q \in]\ell, 1[$. Comme $]-\infty, q[$ est un ouvert contenant la limite ℓ de la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ nous obtenons
$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < q$$
Tous les termes de la série $\sum u_n$ étant strictement positifs, nous en déduisons que
$$\forall\, N > n_0 \quad \underbrace{\prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n}}_{=u_N/u_{n_0}} < \underbrace{\prod_{k=n_0}^{N-1} q}_{=q^{N-n_0}}$$
d'où
$$\forall N > n_0 \quad 0 < u_N < \underbrace{\frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}}_{\text{constante}}\ q^N$$
Puisque $-1 < q < 1$, la série numérique $\sum q^n$ converge. Le théorème de domination pour les séries à termes réels positifs permet alors de conclure.
2. Supposons $\ell > 1$ et fixons un réel $q \in]1, \ell[$. Comme $]q, +\infty[$ est un ouvert contenant la limite ℓ de la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ nous obtenons
$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > q$$
Tous les termes de la série $\sum u_n$ étant strictement positifs, nous en déduisons que
$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} > q\, u_n > u_n \qquad \text{[car } q > 1\text{]}$$
La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est (strictement) croissante, donc minorée par $u_{n_0} > 0$. Elle ne converge pas vers 0, i.e. la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente.

3. Si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 par valeurs supérieures alors

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

Comme en 2, on en déduit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

□

Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

alors on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$. En effet, si $\alpha \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n := \frac{1}{n^\alpha} > 0$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et nous savons qu'une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ peut être convergente ou divergente. Précisément, elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 49. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

La règle de d'Alembert ne s'applique donc pas. Ajoutons une hypothèse et supposons que « le quotient de d'Alembert » possède un développement asymptotique de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)}$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$ en fonction du couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Les résultats des questions 1 et 2 portent le nom de « règle de Raabe-Duhamel ».

Exercice 50. — Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

à partir d'un certain rang.

1. Démontrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Quel résultat antérieur peut-on retrouver grâce à la question 1 ?

Le résultat de la question 1 porte le nom de « théorème de comparaison logarithmique ».

Exercice 51. — Déterminer la nature de la série $\sum \frac{x^n}{n^2}$ en fonction du réel x.

Exercice 52. — Déterminer la nature de la série $\sum n!\, x^{n^2}$ en fonction du réel x.

7. Critère des séries alternées

Théorème 53. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que*
(H1) $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n\, u_{n+1} \leqslant 0$
(H2) la suite $(\,|\,u_n\,|\,)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante*
(H3) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Alors
(C1) la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge*
(C2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *a le signe de* u_{n+1} *et* $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.

L'hypothèse (H2) dans le théorème 53 est essentielle. En effet, la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

vérifie (H1), (H3), mais pas (H2) et la série $\sum u_n$ diverge. En effet

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underbrace{- \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\ \frac{1}{2n}}$$

Exercice 54. — Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge.

Exercice 55. — Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 56. — Soit un réel α. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 57. — Démontrer que $\cos(1) = \dfrac{e^i + e^{-i}}{2} \notin \mathbf{Q}$.

8. Transformation d'Abel (HP)

Exercice 58. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{[analogue discret d'une primitive de la suite } (a_n)_{n\in\mathbf{N}}\text{]}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \qquad \text{[transformation d'Abel, analogue discret de l'intégration par parties]}$$

2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

   (H1) la suite de terme général $A_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée ;

   (H2) la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

   Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que pour tout $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge.
4. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Démontrer que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.
5. Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

9. Sommation des relations de comparaison

Théorème 59. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\exists\, N \in \mathbf{N} \quad v_n \geqslant 0}_{\text{hypothèse de signe}}$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.*
2. *Si la série $\sum v_n$ diverge alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.*

Démonstration.

1. Supposons que la série $\sum v_n$ converge.
   - *Convergence de la série de terme général u_n.*
     Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\,(v_n)$. Comme la série $\sum v_n$, dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang, converge, le théorème de comparaison pour les séries numériques nous livre la convergence de la série $\sum u_n$.
   - *Les restes de la série $\sum u_n$ sont négligeables devant les restes de la série $\sum v_n$.*
     L'assertion
     $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$
     à démontrer, peut se formuler comme suit
     $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \varepsilon \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right|$$
     Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$
     $$\exists\, N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad |u_n| \leqslant \varepsilon\ |v_n|$$
     Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$
     $$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k| = \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{v_k}_{\geqslant 0} = \varepsilon \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right|$$
2. Supposons que la série $\sum v_n$ diverge et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \geqslant 0$, pour simplifier la présentation.
   - *Comportement asymptotique des sommes partielles de la série de terme général v_n.*
     Comme la série $\sum v_n$ est une série à termes réels positifs qui diverge
     $$\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \tag{7}$$

- *Les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont négligeables devant les sommes partielles de la série $\sum v_n$.*

  L'assertion $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ à démontrer, peut se formuler comme suit

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,N_\varepsilon\quad \forall\,n\geqslant N_\varepsilon\qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \varepsilon\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| = \varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k$$

Soit $\varepsilon>0$.

(i) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$

$$\exists\,N_{1,\varepsilon}\in\mathbf{N}\quad \forall\,n\geqslant N_{1,\varepsilon}\qquad |u_n|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,|v_n| = v_n$$

Ainsi

$$\forall\,n\geqslant N_{1,\varepsilon}+1\qquad \left|\sum_{k=N_{1,\varepsilon}+1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N_{1,\varepsilon}+1}^{n} |u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N_{1,\varepsilon}+1}^{n} v_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k \tag{8}$$

(ii) D'après (7), la quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ est strictement positive à partir d'un certain rang N_0 et, comme $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k\right|$ est une constante

$$\frac{\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k\right|}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi :

$$\exists\,N_{2,\varepsilon}\geqslant N_0\quad \forall\,n\geqslant N_{2,\varepsilon}\qquad \left|\sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k \tag{9}$$

Posons $N_\varepsilon := \max\left\{N_{1,\varepsilon}+1, N_{2,\varepsilon}\right\}$. Pour tout $n\geqslant N_\varepsilon$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k + \sum_{N_{1,\varepsilon}}^{n} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k\right| + \left|\sum_{N_{1,\varepsilon}}^{n} u_k\right| \underbrace{\leqslant}_{(8)\text{ et }(9)} \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k = \varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k$$

□

Théorème 60. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right) \qquad \textit{et} \qquad \underbrace{\exists\,N\in\mathbf{N}\quad v_n\geqslant 0}_{\textit{hypothèse de signe}}$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.*
2. *Si la série $\sum v_n$ diverge alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.*

Éléments de démonstration. On adapte la démonstration rédigée du théorème 59. □

Corollaire 61. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \qquad \textit{et} \qquad \underbrace{\exists\,N\in\mathbf{N}\quad v_n\geqslant 0}_{\textit{hypothèse de signe}}$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.*

2. *Si la série* $\sum v_n$ *diverge alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Démonstration.

1. Supposons que la série $\sum v_n$ converge.

   - *Convergence de la série de terme général* u_n.
     Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. Comme la série $\sum v_n$, dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang, converge, le théorème de comparaison pour les séries numériques nous livre la convergence de la série $\sum u_n$.
   - *Les restes de la série de terme général* u_n *sont équivalents aux restes de la série de terme général* v_n.
     D'après le théorème 59

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - v_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

     d'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

2. Supposons que la série $\sum v_n$ converge. diverge. D'après le théorème 59

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - v_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

   d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

□

10. Développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique (HP)

Exercice 62. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n := H_n - \ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$ est convergente.
2. Expliciter $u_{n+1} - u_n$, puis démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
   où $\gamma := 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.
3. En écrivant $H_n - \ln(n) - \gamma$ comme le reste d'une série convergente, démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
4. En écrivant $\dfrac{1}{2n}$ comme le reste d'une série convergente, démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
5. Comment obtenir un terme de plus dans le développement asymptotique de H_n ?

11. Théorème de Cesàro

Corollaire 63. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels possédant une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \qquad [\textit{théorème de Cesàro}]$$

Démonstration.

- Supposons que $\ell \in \mathbf{R}$. Comme $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$ et que la série à termes positifs $\sum 1$ diverge, le théorème 59 livre

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - (n+1)\,\ell = \sum_{k=0}^{n}(u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=n+1}\right)$$

  On en déduit

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - \ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

- Supposons que $\ell = +\infty$. Comme la suite de terme général u_n tend vers $+\infty$

$$1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$$

  et u_n est positif à partir d'un certain rang. Comme la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement), le théorème 59 livre

$$n+1 = \sum_{k=0}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

  Comme la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ diverge vers $+\infty$, ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang, d'où

$$\frac{n+1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

  puis

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \left[\text{par opération sur les limites, cf. } \frac{1}{0^+} = +\infty\right]$$

- Le cas $\ell = -\infty$ es obtenu en appliquant le résultat du point précédent à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

Le théorème de Cesàro trouve des applications dans la recherche d'équivalents de termes généraux de suites récurrentes, cf. exercice ci-dessous.

Exercice 64. — Soit α un réel strictement positif fixé. Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^\alpha}$.

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra chercher un exposant $\beta > 0$ tel que la suite de terme général $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ possède une limite finie non nulle.