Intégration sur un intervalle quelconque

1. Survol de la construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Notation. — Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$.

On se propose de rappeler des éléments de la construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

1.1. Subdivision d'un segment

Définition 1. — *Une subdivision du segment $[a, b]$ est un uplet $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de points de $[a, b]$ tel que*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Le support d'une subdivision $\sigma := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a, b]$ est défini par :

$$\mathrm{Supp}(\sigma) := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

Exemple 2. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Le n-uplet

$$\left(\underbrace{a}_{x_0}, \underbrace{a + \frac{b-a}{n}}_{x_1}, \underbrace{a + \frac{2(b-a)}{n}}_{x_2}, \ldots, \underbrace{a + \frac{k(b-a)}{n}}_{x_k}, \ldots, \underbrace{a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}}_{x_{n-1}}, \underbrace{b}_{x_n} \right)$$

est une subdivision du segment $[a, b]$, appelée subdivision régulière du segment $[a, b]$ à n pas. La longueur du segment $[x_k, x_{k+1}]$ est constante, égale à $(b-a)/n$, d'où la terminologie.

Définition 3. — *Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions du segment $[a, b]$. La subdivision σ_1 est dite plus fine que la subdivision σ_2 si $\mathrm{Supp}(\sigma_2) \subset \mathrm{Supp}(\sigma_1)$.*

Définition 4. — *Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions du segment $[a, b]$. Le mélange des deux subdivisions σ_1 et σ_2 est l'unique subdivision, notée $\sigma_1 \# \sigma_2$, du segment $[a, b]$ dont le support est $\mathrm{Supp}(\sigma_1) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_2)$.*

1.2. Fonctions en escalier sur un segment

Définition 5. — *Une fonction $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction :*

$$f_{|\,]x_k, x_{k+1}[} \left| \begin{array}{ccc}]x_k, x_{k+1}[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array} \right.$$

est constante. Une telle subdivision du segment $[a, b]$, si elle existe, est dite adaptée à f.

Remarque 6. — Soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier. Soit σ est une subdivision adaptée à f. Alors toute subdivision plus fine que σ est encore adpatée à f.

Remarque 7. — Soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier. Soient c, d des nombres réels tels que $a \leqslant c < d \leqslant b$. Démontrer que la restriction de f au segment $[c, d]$ est en escalier sur $[c, d]$.

Notation. — On pose

$$\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ : \ \text{la fonction } f \text{ est en escalier} \right\}$$

Proposition 8. — *L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{R}^{[a,b]}$ des fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration.

- Soit c un nombre réel. Alors la fonction constante :

$$f_c \left| \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & c \end{array} \right.$$

  est en escalier. En effet, la fonction $f_{|\,]a,b[}$ est constante et donc la subdivision (a, b) du segment $[a, b]$ est adaptée à f_c. En fait, toute subdivision du segment $[a, b]$ est adaptée à la fonction f_c. Donc la fonction f_0 (resp. f_1), qui est le neutre pour l'addition de $\mathbf{R}^{[a,b]}$ (resp. pour la multiplication de $\mathbf{R}^{[a,b]}$) est en escalier.

- Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Considérons une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a,b]$ adaptée à la fonction f.
  Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. La fonction f étant constante sur $]x_k, x_{k+1}[$, il en est de même de la fonction λf.
  Donc la fonction λf est en escalier et $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision du segment $[a,b]$ adaptée à la fonction λf.
- Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$. Soit σ_1 (resp. σ_2) une subdivision du segment $[a,b]$ adaptée à la fonction f_1 (resp. f_2). Notons $\sigma := \sigma_1 \# \sigma_2$ et posons $\sigma =: (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.
  Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. La subdivision σ étant plus fine que σ_1 (resp. σ_2), la fonction f_1 (resp. f_2) est constante sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Donc la fonction $f_1 + f_2$ (resp. $f_1 f_2$) est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$.
  Ainsi la fonction $f_1 + f_2$ (resp. $f_1 f_2$) est en escalier et $\sigma_1 \# \sigma_2$ est une subdivision du segment $[a,b]$ adaptée à la fonction $f_1 + f_2$ (resp $f_1 f_2$).

□

Exercice 9. — Démontrer que, pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, les fonctions

$$\min(f_1, f_2) \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \min(f_1(t), f_2(t)) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \max(f_1, f_2) \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \max(f_1(t), f_2(t)) \end{array} \right.$$

sont en escalier sur $[a,b]$. En déduire que, pour toute $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & |f(t)| \end{array} \right.$$

est en escalier sur $[a,b]$.

Exercice 10. — Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$. Soient c, d deux nombres réels tels que $c < d$. Soient $g \in \mathcal{E}([c,d],\mathbf{R})$ On suppose que $f(t) \in [c,d]$, pour tout $t \in [a,b]$. Ainsi la fonction

$$g \circ f \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g(f(t)) \end{array} \right.$$

est-elle bien définie. Démontrer que la fonction $g \circ f$ est en escalier sur $[a,b]$.

1.3. Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition 11. — *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ et soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision du segment $[a,b]$ adaptée à la fonction f. On pose :*

$$S(f,\sigma) := \sum_{k=0}^{n-1} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k)$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{x_k, x_{k+1}} \in \mathbf{R}$ l'unique valeur prise par la fonction f sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

Lemme 12. — *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions du segment $[a,b]$ adaptées à la fonction f. Si σ_1 est plus fine que σ_2, alors $S(f,\sigma_1) = S(f,\sigma_2)$.*

Éléments de démonstration. On procède par récurrence sur le cardinal n de l'ensemble fini $\sigma_1 \setminus \sigma_2$. Si $n = 0$, alors $\sigma_1 = \sigma_2$ et l'assertion est triviale. L'étape essentielle, pour démontrer l'hérédité, est d'établir le résultat dans le cas où σ_1 contient un point de plus que σ_2.
Supposons alors que $\sigma_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ contient un point de plus que σ_2. Soit x_i ($i \in [\![1, n-1]\!]$) le point de σ_1 qui n'est pas dans σ_2. Donc $\sigma_2 = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Comme la fonction f est constante sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_{i+1}[$, nous savons que $f_{x_{i-1}, x_i} = f_{x_{i-1}, x_i} = f_{x_{i-1}, x_{i+1}}$. Nous calculons alors

$$\begin{array}{rcl}
S(f,\sigma_1) & := & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k) \\
& = & \displaystyle\left(\sum_{k=0}^{i-2} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k)\right) + f_{x_{i-1}, x_i} \, (x_i - x_{i-1}) + f_{x_i, x_{i+1}} \, (x_{i+1} - x_i) + \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k)\right) \\
& = & \displaystyle\left(\sum_{k=0}^{i-2} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k)\right) + f_{x_{i-1}, x_{i+1}} \, (x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i) + \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k)\right) \\
& = & \displaystyle\left(\sum_{k=0}^{i-2} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k)\right) + f_{x_{i-1}, x_{i+1}} \, (x_{i+1} - x_{i-1}) + \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} f_{x_k, x_{k+1}} \, (x_{k+1} - x_k)\right) \\
& =: & S(f,\sigma_2)
\end{array}$$

□

Lemme 13. — *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions du segment $[a,b]$ adaptées à la fonction f. Alors $S(f,\sigma_1) = S(f,\sigma_2)$.*

Démonstration. Comme la subdivision $\sigma_1 \# \sigma_2$ est plus fine que σ_1 et σ_2, il vient

$$S(f,\sigma_1\#\sigma_2) = S(f,\sigma_1) \qquad \text{et} \qquad S(f,\sigma_1\#\sigma_2) = S(f,\sigma_2)$$

d'après le lemme 12. □

Définition 14. — *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $f_{x_k,x_{k+1}} \in \mathbf{R}$ l'unique valeur prise par la fonction f sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le scalaire défini par*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \sum_{k=0}^{n-1} f_{x_k,x_{k+1}}\,(x_{k+1} - x_k) =: S(f,\sigma).$$

> D'après le lemme 13 la valeur de $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ ne dépend pas de la subdivision de $[a,b]$ adaptée à f choisie. La définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment est donc intrinsèque.

Remarque 15. — La possibilité de choisir une subdivision adaptée à f pour calculer $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ s'avérera souvent utile pour établir les résultats fondamentaux rassemblés dans la partie suivante.

Remarque 16. — Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$.

1. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Alors, par définition même, le scalaire $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ ne dépend pas des valeurs de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
2. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Soit $\{x_1', x_2', \ldots, x_p'\}$ un ensemble fini de points du segment $[a,b]$. Soit σ' l'unique subdivision du segment $[a,b]$ dont le support est l'ensemble fini $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_1', x_2', \ldots, x_p'\}$. Alors, comme σ' est plus fine que σ, la subdivision σ' est adaptée à f. D'après 1, le scalaire $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de dépend pas de la valeur de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_1', x_2', \ldots, x_p'$. En particulier le scalaire $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est indépendant des valeurs de f aux points $x_1', x_2', \ldots, x_p'$.
3. On peut donc modifier les valeurs d'une fonction en escalier sur un segment en un nombre fini de points, sans modifier la valeur de son intégrale sur ce segment.

1.4. Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Théorème 17. — *L'intégrale des fonctions en escalier sur un segment possède les propriétés suivantes.*

1. $\forall\,(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall\,(f_1,f_2) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \int_a^b \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\ \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\ \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\ \mathrm{d}x$ *[linéarité]*
2. $\forall\, f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \qquad (\,\forall\, x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0\,) \implies \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$ *[positivité]*
3. $\forall\, f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \forall\, c \in [a,b] \qquad \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$ *[relation de Chasles]*
4. $\forall\,(f,g) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \qquad (\,\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)\,) \implies \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ *[croissance]*
5. $\forall\, f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$ *[inégalité triangulaire]*

Démonstration. Si une fonction φ est constante sur un intervalle $]c,d[$, alors l'unique valeur qu'elle prend sur l'intervalle $]c,d[$ est notée $\varphi_{c,d}$.

1. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R})^2$. Soit σ_1 (resp. σ_2) une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f_1 (resp. f_2). Alors $\sigma_1 \# \sigma_2$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fois à f_1, f_2 et $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Ainsi
$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\ \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\ \mathrm{d}x &:= \lambda_1\, S(f_1, \sigma_1\#\sigma_2) + \lambda_2\, S(f_2, \sigma_1\#\sigma_2) \\ &= S(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \sigma_1\#\sigma_2) \\ &=: \int_a^b \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$
2. Soit $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R})$. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Comme f est positive ou nulle, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le scalaire $f_{x_k, x_{k+1}}$ est positif ou nul. Ainsi
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \sum_{k=0}^{n-1} f_{x_k,x_{k+1}}\,(x_{k+1} - x_k)$$
est positive ou nulle, comme somme de nombres réels positifs ou nuls.
3. Soit $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R})$. Soit $c \in [a,b]$. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Quitte à prendre une subdivision plus fine que σ, nous pouvons supposer que c appartient au support de σ.
Soit i l'unique entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $c = x_i$. Posons alors
$$\sigma_{\leqslant i} := (x_0, x_1, \ldots, x_i) \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\geqslant i} := (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
Alors $\sigma_{\leqslant i}$ (resp. $\sigma_{\geqslant i}$) est une subdivision de $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) adaptée à la fonction $f_{|\,[a,c]}$ (resp. $f_{|\,[c,b]}$).
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &:= \sum_{k=0}^{n-1} f_{x_k,x_{k+1}}\,(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} f_{x_k,x_{k+1}}\,(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=i}^{n-1} f_{x_k,x_{k+1}}\,(x_{k+1} - x_k) \\ &=: \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$
4. Soit $(f,g) \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R})^2$ tel que pour tout $x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, $g(x) - f(x) \geqslant 0$. Par positivité
$$\int_a^b g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$$
puisn, par linéarité
$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$$
Le résultat en découle.
5. Soit $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R})$. Comme pour tout $x \in [a,b]$, $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, la croissance livre
$$\int_a^b -|f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$$
Par linéarité
$$-\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$$
Donc $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$.

□

1.5. Théorème de Heine

Le théorème de Heine joue un rôle essentiel dans la construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un segment que nous rappelons ici.

Définition 18. — *Soit I intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Elle est dite uniformément continue si :*
$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, (x,y) \in I^2 \qquad |x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 19. — Soit I intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

1. Si f est k-lipschitzienne, pour un certain $k > 0$, i.e. si
$$\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$
alors f est uniformément continue sur I.
2. Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

Théorème 20. — *Soit une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$ (Heine).*

> Dans le théorème de Heine, le fait que l'ensemble de définition de la fonction soit un segment (compact) joue un rôle crucial. En effet, la fonction « carrée »
> $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$
> est continue sur $\mathbf{R}$, mais non-uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

1.6. Une fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier

Lemme 21. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ et $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$.*
1. *La fonction φ est bornée.*
2. *La fonction $f - \varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est bornée.*

Démonstration.
1. La fonction φ est en escalier sur un segment, donc son ensemble image est fini. Comme tout partie finie de $\mathbf{R}$ est bornée, la fonction φ est bornée.
2. La fonction φ est bornée d'après 1. Donc il existe $M_1 \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|\varphi(x)| \leqslant M_1$. La fonction f est continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes). Donc il existe M_2 tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant M_2$. Nous en déduisons que, pour tout $x \in [a,b]$
$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)| \leqslant M_1 + M_2.$$

□

Théorème 22. — *Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^2$ tel que*
1. $\forall x \in [a,b] \qquad \varphi_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon(x)$
2. $||\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon||_\infty \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant uniformément continue sur $[a,b]$ (théorème de Heine), il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$
$$|x-y| \leqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier naturel non nul n tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$. On introduit la subdivision régulière
$$\left(\underbrace{a}_{x_0}, \underbrace{a + \frac{b-a}{n}}_{x_1}, \underbrace{a + \frac{2(b-a)}{n}}_{x_2}, \ldots, \underbrace{a + \frac{k(b-a)}{n}}_{x_k}, \ldots, \underbrace{a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}}_{x_{n-1}}, \underbrace{b}_{x_n} \right)$$
dont le pas est de $\dfrac{b-a}{n}$.
Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$. La fonction $f_{|[x_k,x_{k+1}]}$ est continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$. Elle est donc bornée et elle atteint ses bornes. Donc il existe $\alpha_k, \beta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tels que
$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], \qquad f(\alpha_k) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta_k) \tag{1}$$
D'autre part, comme $\alpha_k, \beta_k \in [x_k, x_{k+1}]$,
$$|\beta_k - \alpha_k| \leqslant |x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{n} \leqslant \alpha.$$

Donc

$$|f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

Soient les deux fonctions

$$\varphi_\varepsilon \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(\alpha_k) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\text{ où } k \in [\![0, n-1]\!] \\ f(b) & \text{si } x = x_n = b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$\psi_\varepsilon \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(\beta_k) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\text{ où } k \in [\![0, n-1]\!] \\ f(b) & \text{si } x = x_n = b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ces deux fonctions sont en escalier. De $\varphi_\varepsilon(b) = \psi_\varepsilon(b)$ et (1) on déduit

$$\forall x \in [a,b] \qquad \varphi_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon(x)$$

De $\varphi_\varepsilon(b) = \psi_\varepsilon(b)$ et (2) on déduit

$$\forall x \in [a,b] \qquad |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$$

et donc $||\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon||_\infty \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire 23. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Alors il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ telle que*

$$||f - \varphi_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons φ_n et ψ_n des fonctions en escaliers obtenues en appliquant le théorème précédent pour $\varepsilon := \dfrac{1}{n}$. D'où

$$\forall x \in [a,b], \qquad \varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_n(x) \tag{3}$$

et

$$||\varphi_n - \psi_n||_\infty \leqslant \frac{1}{n}. \tag{4}$$

De (3), on déduit $||f - \varphi_n||_\infty \leqslant ||\psi_n - \varphi_n||_\infty$. Alors, grâce à (4), il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$0 \leqslant ||f - \varphi_n||_\infty \leqslant ||\psi_n - \varphi_n||_\infty \leqslant \frac{1}{n}.$$

Le théorème d'encadrement donne le résultat. □

1.7. Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème 24. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Soient les deux parties de $\mathbf{R}$ définies par*

$$I^-(f) := \left\{ \int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x\ :\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \text{ telle que, pour tout } x \in [a,b],\ \varphi(x) \leqslant f(x) \right\}$$

et

$$I^+(f) := \left\{ \int_a^b \psi(x)\ \mathrm{d}x\ :\ \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \text{ telle que, pour tout } x \in [a,b],\ f(x) \leqslant \psi(x) \right\}.$$

1. *La partie $I^-(f)$ de $\mathbf{R}$ est non vide et majorée.*
2. *La partie $I^+(f)$ de $\mathbf{R}$ est non vide et minorée.*
3. $\sup(I^-(f)) = \inf(I^+(f))$

Démonstration. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons φ_n et ψ_n des deux fonctions en escaliers obtenues en appliquant le théorème 22, pour $\varepsilon := \dfrac{1}{n}$. D'où

$$\forall x \in [a,b] \qquad \varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_n(x)$$

et

$$||\varphi_n - \psi_n||_\infty \leqslant \frac{1}{n}$$

1. Par suite $\int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \in I^-(f)$. Donc $I^-(f)$ est non vide. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x)$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant \psi_n(x)$. Par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier sur des segments
$$\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x$$
Donc $\int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x$ est un majorant de $I^-(f)$.
2. De même qu'en 1, on obtient $\int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x \in I^+(f)$ et $\int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x$ est un minorant de $I^+(f)$.
3. De 1 et 2 on déduit (passage au sup et à l'inf)
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \sup\left(I^-(f)\right) \leqslant \int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x$$
et
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \inf\left(I^+(f)\right)$$
puis :
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \sup\left(I^-(f)\right) \leqslant \int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x$$
et
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \inf\left(I^+(f)\right) \leqslant \int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x$$
On en déduit
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad 0 \leqslant \left|\sup\left(I^-(f)\right) - \inf\left(I^+(f)\right)\right| \leqslant \int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \tag{5}$$
En utilisant les propriétés de l'intégrale des fonctions en escaliers sur un segment, il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x &= \left|\int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_a^b \psi_n(x) - \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |\psi_n(x) - \varphi_n(x)|\ \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b ||\varphi_n - \psi_n||_\infty\ \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b \frac{1}{n}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$
Joint à (5), ce calcul donne :
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad 0 \leqslant \left|\sup\left(I^-(f)\right) - \inf\left(I^+(f)\right)\right| \leqslant \frac{b-a}{n}$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $|\sup(I^-(f)) - \inf(I^+(f))| = 0$, d'où le résultat.

□

Remarque 25. — Les suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, introduites dans la démonstration précédente, vérifient une propriété remarquable, qui se déduit aisément des derniers résultats de cette démonstration.
$$\int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup\left(I^-(f)\right) = \inf\left(I^+(f)\right)$$

et

$$\int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup\left(I^-(f)\right) = \inf\left(I^+(f)\right).$$

Définition 26. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le scalaire défini par :*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \sup\left(I^-(f)\right) = \inf\left(I^+(f)\right)$$

où

$$I^-(f) := \left\{\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x\ :\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \text{ telle que } \forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leqslant f(x)\right\}$$

et

$$I^+(f) := \left\{\int_a^b \psi(x)\ \mathrm{d}x\ :\ \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \text{ telle que } \forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant \psi(x)\right\}.$$

1.8. Sommes de Riemann

Théorème 27. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ telle que :*

$$||f - f_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

Alors la suite numérique de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

Démonstration. Considérons à nouveau la suite de fonctions en escaliers $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ introduite dans la démonstration donnée du théorème 24. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f_n(x) - \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

Comme

$$\int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

il reste à établir $\displaystyle\int_a^b f_n(x) - \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier sur un segment

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f_n(x) - \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - \varphi_n(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b ||f_n - \varphi_n||_\infty\ \mathrm{d}x = (b-a)\ ||f_n - \varphi_n||_\infty.$$

D'après le théorème d'encadrement, il suffit de vérifier que $||f_n - \varphi_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$0 \leqslant ||f_n - \varphi_n||_\infty = ||f_n - f + f - \varphi_n||_\infty \leqslant ||f_n - f||_\infty + ||f - \varphi_n||_\infty.$$

Comme $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $||\varphi_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème d'encadrement livre $||f_n - \varphi_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Corollaire 28. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$.*

1. *Convergence des sommes de Riemann « par la gauche »*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

2. *Convergence des sommes de Riemann « par la droite »*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Éléments de démonstration. Ce corollaire se déduit du théorème précédent.

- On interprète chacune des sommes de Riemann comme une intégrale $\displaystyle\int_a^b \theta_n(x)\ \mathrm{d}x$, où $\theta_n : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ est une fonction en escalier à préciser.
- Dans chacun des cas, on vérifie que $||f - \theta_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, en appliquant le théorème de Heine.

□

1.9. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Proposition 29. — *L'intégrale des fonctions continues sur un segment possède les propriétés suivantes.*

1. $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2\quad\forall(f,g)\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})^2\qquad\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)+\mu g(x)\ \mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ *[linéarité]*
2. $\forall\,f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})\qquad(\ \forall\,x\in[a,b]\quad f(x)\geqslant 0\ )\implies\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\geqslant 0$ *[positivité]*
3. $\forall\,f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})\qquad\forall\,c\in[a,b]\qquad\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$ *[relation de Chasles]*
4. $\forall\,(f,g)\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})^2\qquad(\ \forall\,x\in[a,b]\ f(x)\leqslant g(x)\ )\implies\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ *[croissance]*
5. $\forall\,f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})\qquad\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$ *[inégalité triangulaire]*

Éléments de démonstration.

1. Elle découle de la propriété de linéarité pour les fonctions en escalier « par passage à la limite », en utilisant le théorème 17, par exemple.
2. Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$. Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$, comme dans la démonstration du théorème 24. Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Pour tout $x\in[a,b]$, $0\leqslant f(x)\leqslant\psi_n(x)$. Par positivité de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment
$$\int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x\geqslant 0$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient
$$0\leqslant\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$
3. Elle découle de la relation de Chasles pour les fonctions en escalier « par passage à la limite », en utilisant le théorème 27, par exemple.
4. Elle est conséquence de la positivité et de la linéarité (cf. démonstration du théorème 17).
5. Elle est conséquence de la positivité et de la linéarité (cf. démonstration du théorème 17).

□

1.10. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 30. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbf{R})$. et c un point de l'intervalle I. Alors la fonction*
$$F_c\ \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\end{array}\right.$$
est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en c.

1.11. Propriété de séparation pour l'intégrale d'une fonction continue et positive ou nulle sur un segment

Proposition 31. — *Soit $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction continue et positive ou nulle sur un segment. Alors :*
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x=0\qquad\implies\qquad(\ \forall x\in[a,b]\quad f(x)=0\ )$$

Démonstration. Cf. exercice 79 de la banque CCINP. □

1.12. Calcul d'une intégrale de fonction continue sur un segment à l'aide d'une primitive

Théorème 32. — *Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R})$. Alors*

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

Les calculs d'intégrales de fonctions continues sur des segments reposent très souvent sur ce théorème. En effet, il se reformule ainsi. Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, si la fonction $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une primitive de f alors :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

et donc la connaissance de primitives usuelles permet de calculer effectivement des intégrales.

1.13. Intégration par parties sur un segment

Théorème 33. — *Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R})$. Alors :*

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\ \mathrm{d}x$$

où $[u(x)\, v(x)]_a^b := u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a)$.

Éléments de démonstration. Conséquence du théorème 32 et de la formule de dérivation $(uv)' = u'\, v + v'\, u$. □

1.14. Changement de variable sur un segment

Théorème 34. — *Soient $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R})$, I un intervalle contenant $u([a,b])$ et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbf{R})$. Alors*

$$\int_a^b f(u(x))\ u'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Éléments de démonstration. Conséquence du théorème 32 et de la formule de dérivation

$$(F \circ u)' = u'\ (F' \circ u)$$

où F est une primitive de f sur i.

□

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Notation. — Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$.

On expose une extension de la notion d'intégrale vue pour les fonctions continues sur un segment aux fonctions continues par morceaux sur un segment.

2.1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 35. — *Soit une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction f est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que*

(H1) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|\,]a_k, a_{k+1}[}$ est continue ;

(H2) $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $a^+, a_1^-, a_1^+, a_2^-, a_2^+, \ldots, a_{n-1}^-, a_{n-1}^+, b^-$.

Une telle subdivision du segment $[a,b]$, si elle existe, est dite adaptée à f.

Remarque 36. — Dans la précédente définition, on peut remplacer (H1) et (H2) par

(H) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|\,]a_k, a_{k+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$.

Proposition 37. — *Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux est bornée.*

Notation. — On pose

$$\mathcal{CM}\left([a,b],\mathbf{R}\right) := \left\{ f \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ : \ \text{la fonction } f \text{ est continue par morceaux} \right\}$$

Remarque 38. — Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ en escalier (resp. continue) est continue par morceaux. Ainsi

$$\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \ \subset \ \mathcal{CM}\left([a,b],\mathbf{R}\right) \ \supset \ \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$$

Proposition 39. — *L'ensemble $\mathcal{CM}\left([a,b],\mathbf{R}\right)$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{R}^{[a,b]}$ des fonctions définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.*

Éléments de démonstration. Analogue à celle donnée pour la structure de $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ (cf. proposition 8). □

Une composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 40. — Soient les fonctions

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Vérifier que f et g sont continues par morceaux, sur leurs intervalles de définition respectifs.
2. Justifier que la fonction $g \circ f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est bien définie, puis démontrer qu'elle n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

2.2. Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Notation. — Si une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue par morceaux, si $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le prolongement par continuité de $f_{|\,]a_k,a_{k+1}[}$ à $[a_k, a_{k+1}]$ est noté $\overline{f_{|\,]a_k,a_{k+1}[}}$, i.e.

$$\overline{f_{|\,]a_k,a_{k+1}[}} \left| \begin{array}{ccc} [a_k,a_{k+1}] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lim\limits_{t \to a_k^+} f(t) & \text{si } x = a_k \\ f(x) & \text{si } a_k < x < a_{k+1} \\ \lim\limits_{t \to a_{k+1}^-} f(t) & \text{si } x = a_{k+1} \end{cases} \end{array} \right.$$

Lemme 41. — *Soit $f \in \mathcal{CM}\left([a,b],\mathbf{R}\right)$. Soient*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b \qquad \textit{et} \qquad a = a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{m-1} < a'_m = b$$

deux subdivisions de $[a,b]$, adaptées à f. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \overline{f_{|\,]a_k,a_{k+1}[}}(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{\ell=0}^{m-1} \int_{a'_\ell}^{a'_{\ell+1}} \overline{f_{|\,]a'_\ell,a'_{\ell+1}[}}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Éléments de démonstration. Analogue à celle donnée pour les sommes $S(f,\sigma)$ où $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ et σ est une subdivision adaptée à f (cf. lemmes 12 et 13). □

Définition 42. — *Soit $f \in \mathcal{CM}\left([a,b],\mathbf{R}\right)$. Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$, adaptée à f. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le scalaire défini par*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \overline{f_{|\,]a_k\,;a_{k+1}[}}(x)\ \mathrm{d}x$$

D'après le lemme 41, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ ne dépend pas de la subdivision de $[a,b]$ adaptée à f choisie. La définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment est donc intrinsèque.

Remarque 43. — Soit une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$.

1. Si $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbf{R}$ alors les définitions 14 et 42 de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ coïncident.
2. Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R}$ alors les définitions 26 et 42 de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ coïncident.

2.3. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Théorème 44. — *L'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment possède les propriétés suivantes.*

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall (f,g) \in \mathcal{CM}\left([a,b], \mathbf{R}\right)^2 \qquad \displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ *[linéarité]*
2. $\forall f \in \mathcal{CM}\left([a,b], \mathbf{R}\right) \qquad (\ \forall x \in [a,b]\ f(x) \geqslant 0\ ) \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$ *[positivité]*
3. $\forall f \in \mathcal{CM}\left([a,b], \mathbf{R}\right) \qquad \forall c \in [a,b] \qquad \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$ *[relation de Chasles]*
4. $\forall (f,g) \in \mathcal{CM}\left([a,b], \mathbf{R}\right)^2 \qquad (\ \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leqslant g(x)\ ) \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ *[croissance]*
5. $\forall f \in \mathcal{CM}\left([a,b], \mathbf{R}\right) \qquad \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$ *[inégalité triangulaire]*

Éléments de démonstration. Analogue à celle donnée pour les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment (cf. théorème 17), en s'appuyant sur les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (cf. 29). □

2.4. Pas de propriété de séparation pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive ou nulle

Nous ne disposons pas de propriété séparation pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive ou nulle, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 45. — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \{-1,0,1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

qui est positive ou nulle sur $[-1,1]$, mais non identiquement nulle sur $[-1,1]$.

1. Représenter graphiquement la fonction f, puis justifier que la fonction f est continue par morceaux sur $[-1,1]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

2.5. Pas de théorème fondamental de l'analyse pour une fonction continue par morceaux

Nous ne disposons pas du théorème fondamental de l'analyse pour une fonction continue par morceaux, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 46. — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rl} -1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f, puis justifier que la fonction f est continue par morceaux sur chaque segment de $\mathbf{R}$.
2. Reconnaître la fonction
$$F_0 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$
3. Justifier que la fonction F_0 n'est pas une primitive de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

3. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Notation. — Dans cette partie, la lettre I désigne un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et la lettre $\mathbf{K}$ l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 47. — *Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{K}$. est dite continue par morceaux sur I si et seulement si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux sur ce segment, i.e.*

$$\forall\,[a,b]\subset I \qquad f_{|\,[a,b]} \in \mathcal{CM}\left([a,b],\mathbf{K}\right).$$

Notation. — On pose

$$\mathcal{CM}\left(I,\mathbf{K}\right) := \left\{ f\in\mathbf{K}^I \;:\; \text{la fonction est continue par morceaux} \right\}$$

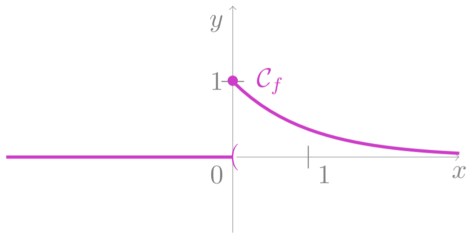
Exemple 48. — Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I. Ainsi

$$\mathcal{C}^0(I,\mathbf{K}) \;\subset\; \mathcal{CM}\left(I,\mathbf{K}\right)$$

Exemple 49. — La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Exemple 50. — La fonction f définie par

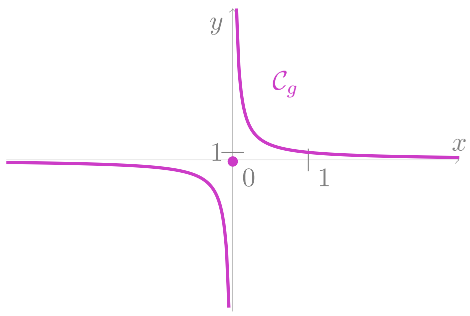
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Exemple 51. — La fonction g définie par

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



n'est pas continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Proposition 52. — *L'ensemble $\mathcal{CM}\left(I,\mathbf{K}\right)$ est une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}^I$.*

Une composée de fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 53. — Justifier que les fonctions

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

sont continues par morceaux sur $\mathbf{R}$, mais que la fonction $f\circ g$ ne l'est pas.

Exercice 54. — Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ n & \text{si } 0<x<\dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Représenter graphiquement la fonction f_n, puis justifier que la fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ fixé. Démontrer que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
3. La fonction f définie par
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$
est-elle continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$?

4. Études asymptotiques d'intégrales partielles

Exercice 55. — Justifier que, pour tout $\varepsilon \in\,]0,1[$, l'intégrale $I(\varepsilon) := \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(\varepsilon)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 56. — Justifier que, pour tout $\varepsilon \in\,]0,1[$, l'intégrale : $I(\varepsilon) := \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(\varepsilon)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 57. — Justifier que, pour tout $\varepsilon \in\,]0,1[$, l'intégrale : $I(\varepsilon) := \displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(\varepsilon)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 58. — Soit a un réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[$, l'intégrale $I_a(A) := \displaystyle\int_0^A e^{-at}\ \mathrm{d}t$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_a(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 59. — Soit α un nombre réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[$, l'intégrale $I_\alpha(A) := \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\alpha(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 60. — Soit β un nombre réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[$, l'intégrale $I_\beta(A) := \displaystyle\int_2^A \frac{1}{x\,\ln^\beta(x)}\ \mathrm{d}x$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\beta(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 61. — Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[$, l'intégrale : $I(A) := \displaystyle\int_0^A x^2\,e^{-x}\ \mathrm{d}x$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 62. — Soit λ un nombre réel strictement positif fixé. Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[$, l'intégrale $I_\lambda(A) := \displaystyle\int_0^A \sin(t)\,e^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\lambda(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 63. — Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[$, l'intégrale $I(A) := \displaystyle\int_0^A \frac{1}{1+x^3}\ \mathrm{d}x$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 64. — Soit α un nombre réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[$, l'intégrale $I_\alpha(A) := \displaystyle\int_2^A \frac{1}{x^\alpha\,\ln(x)}\ \mathrm{d}x$ est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\alpha(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 65. — Soit $f \in \mathcal{CM}(\,]0,+\infty[,\mathbf{R})$. Est-il vrai que $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$?

Exercice 66. — Soit $f \in \mathcal{CM}(\,]0,+\infty[,\mathbf{R})$. Est-il vrai que $\displaystyle\int_\varepsilon^{2\varepsilon} f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} 0$?

5. Intégration sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Notation. — La lettre a désigne un nombre réel.

5.1. Définition d'une intégrale convergente sur $[a, +\infty[$

Remarque 67. — Soient $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{K})$ et un réel $x \geqslant a$. Comme, le segment $[a, x]$ est inclus dans l'intervalle $[a, +\infty[$, la fonction $f_{|\,[a,x]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est bien définie.

Définition 68. — *Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{K})$.*

1. *L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction*

$$I \left| \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & I(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \qquad [\textit{intégrale sur le segment } [a, x]] \end{array} \right.$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.

2. *Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, alors on pose*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque 69. — Soients $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{K})$ et $b \in [a, +\infty[$. Comme :

$$\forall\, x \in [b, +\infty[, \quad \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{constante}} + \int_b^x f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{[relation de Chasles pour l'intégrale sur un segment]}$$

les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ ont même nature.

Exemple 70. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\ \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Exemple 71. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{d}t$ diverge. En effet, la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exemple 72. — L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 73. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

5.2. Intégrales de Riemann au voisinage de $+\infty$

Proposition 74. — *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors*

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \ \textit{converge}}_{\textit{intégrale de Riemann}} \iff \alpha > 1$$

5.3. Intégrales d'une exponentielle au voisinage de $+\infty$

Proposition 75. — *Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors*

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\ \mathrm{d}t \ \textit{converge} \iff a > 0$$

5.4. Queue d'une intégrale convergente sur $[a, +\infty[$

Proposition 76. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbf{K})$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. La fonction*

$$Q \left| \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de la fonction $-f$ sur $[a, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$.

5.5. Critère de convergence pour les intégrales de fonctions positives sur $[a, +\infty[$

Rappel. — Soit $\varphi\colon [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante. D'après le théorème de la limite monotone

$$\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \sup\{\varphi(t)\ :\ t \in [a, +\infty[\,\} \in \mathbf{R} & \text{si la fonction } \varphi \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{si la fonction } \varphi \text{ n'est pas majorée} \end{cases}$$

Dans tous les cas

$$\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sup\{\varphi(t)\ :\ t \in [a, +\infty[\,\} \in \overline{\mathbf{R}}$$

Proposition 77. — *Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction*

$$I \left| \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est majorée.

Définition 78. — *Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ on pose $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = +\infty$.*

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$. Quelle que soit la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$, nous disposons des identités

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \sup\left\{\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\ :\ x \geqslant a\right\} \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

et des inégalités

$$\forall\, x \in [a, +\infty[\quad \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

5.6. Théorème de domination pour les fonctions positives sur $[a, +\infty[$

Théorème 79. — *Soient $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{R})$ et $g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{R})$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t \qquad [\textit{inégalité dans } \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}]$$

et donc

(a) si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;

(b) si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 80. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 81. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{1+t^3}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

6. Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Notation. — La lettre a désigne un nombre réel.

6.1. Définition d'une fonction intégrable sur $[a, +\infty[$

Définition 82. — *Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{K})$. On dit que la fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est* <u>*absolument convergente*</u> *si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.*

Remarque 83. — Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{R})$ une fonction de signe constant. La fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

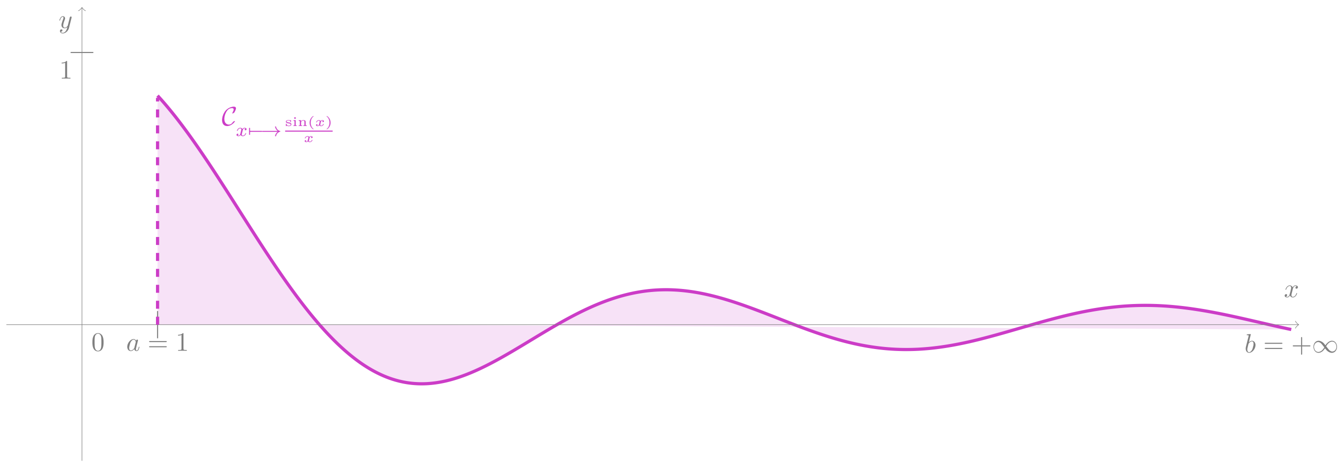
Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{K})$. Un calcul démontrant que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.

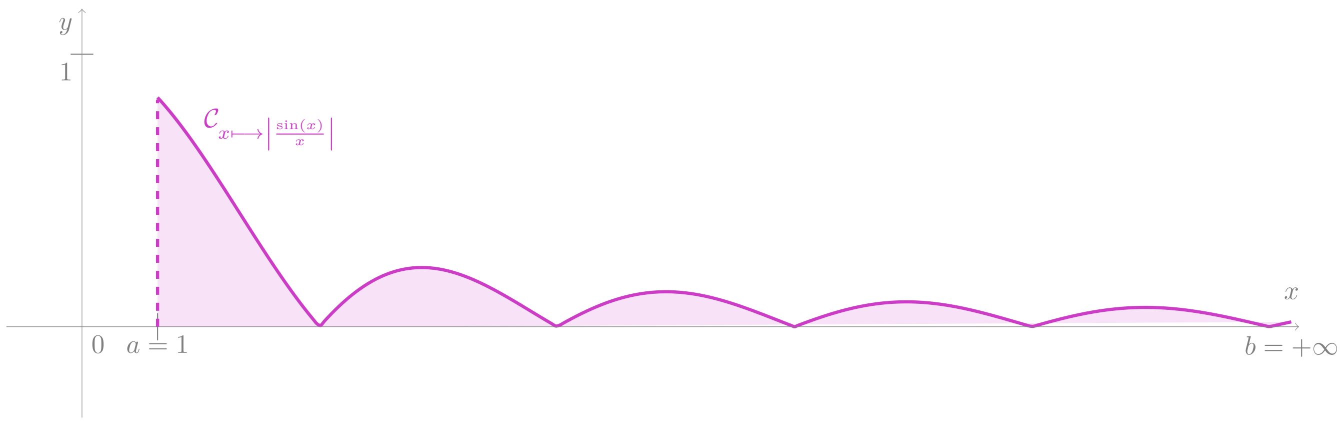
6.2. La convergence absolue d'une intégrale sur $[a, +\infty[$ implique sa convergence

Théorème 84. — *Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{K})$. Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

La réciproque du théorème 84 est fausse, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 85. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x$ est convergente mais non-absolument convergente (une telle intégrale est dite semi-convergente).





6.3. Théorème de comparaison sur $[a,+\infty[$

Théorème 86. — *Soient $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbf{K})$ et $g \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbf{K})$.*

1. *Supposons $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$. Alors :*
$$g \text{ intégrable sur } [a,+\infty[\quad\Longrightarrow\quad f \text{ intégrable sur } [a,+\infty[.$$
2. *Supposons $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$. Alors :*
$$f \text{ intégrable sur } [a,+\infty[\quad\Longleftrightarrow\quad g \text{ intégrable sur } [a,+\infty[.$$

Exercice 87. — Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbf{K})$ telle que $f \geqslant 0$. Démontrer les deux assertions suivantes.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 88. — Étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\, e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$

Exercice 89. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 90. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 91. — Soient deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\ \ln^\beta(x)}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 92. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x))^{\ln(\ln(x))}}\ \mathrm{d}x$.

6.4. Du comportement asymptotique d'une fonction intégrable en $+\infty$

Soit $f \in \mathcal{CM}([0,+\infty[,\mathbf{K})$ telle que $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Alors

$f(t)$ ne tend pas nécessairement vers 0, lorsque t tend vers $+\infty$.

comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple 93. — On vérifie que pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$
$$k + \frac{1}{k^2} < (k+1) - \frac{1}{(k+1)^2}$$
et on en déduit que les intervalles $\left[k - \frac{1}{k^2}\,,\, k + \frac{1}{k^2}\right]$, où $k \in \mathbf{N}$, sont deux-à-deux disjoints. On peut alors définir la fonction $f\colon [0,+\infty[\to \mathbf{R}_+$ par

— pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la restriction de f au segment $\left[k - \frac{1}{k^2}, k\right]$ coïncide avec la fonction affine définie par $f\left(k - \frac{1}{k^2}\right) = 0$ et $f(k) = 1$;

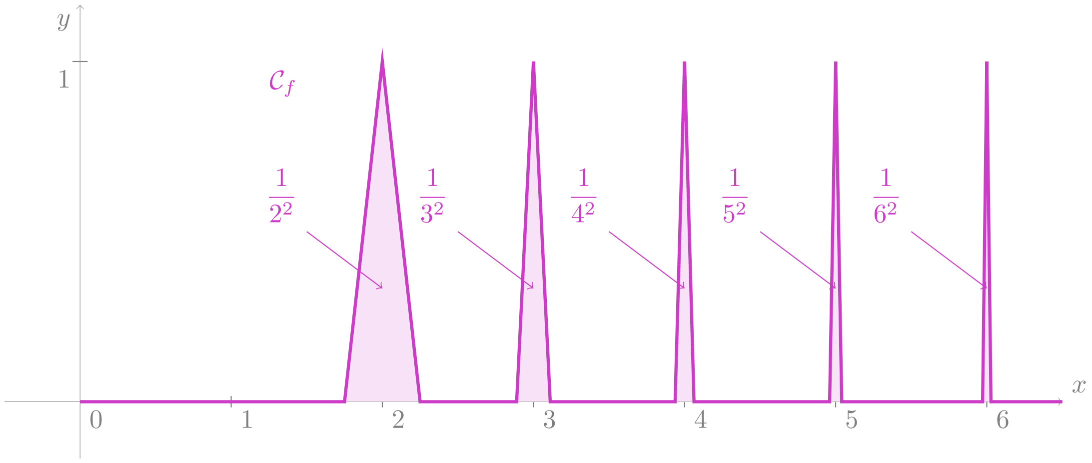
— pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la restriction de f au segment $\left[k, k + \frac{1}{k^2}\right]$ coïncide avec la fonction affine définie par $f(k) = 1$ et $f\left(k + \frac{1}{k^2}\right) = 0$;

— la fonction f est nulle sur l'ensemble $[0,+\infty[\setminus \displaystyle\bigcup_{k=2}^{+\infty} \left[k - \frac{1}{k^2}, k + \frac{1}{k^2}\right]$.

On a donc, pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$

$$\forall\, x \in \left[k - \frac{1}{k^2}, k\right] \quad f(x) = k^2\left(x - k + \frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \left[k, k + \frac{1}{k^2}\right] \quad f(x) = k^2\left(k + \frac{1}{k^2} - x\right) .$$

Le graphe de la fonction f a l'allure d'une « chaîne de montagnes ».



La fonction f est continue par morceaux et positive ou nulle sur $[0, +\infty[$. D'autre part, pour tout $x > 2$, si on pose $n := \lfloor x \rfloor$

$$I(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{n+\frac{1}{n^2}} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-\frac{1}{k^2}}^{k+\frac{1}{k^2}} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \underbrace{\frac{\pi^2}{6}}_{\text{indépendant de } x} .$$

Comme la fonction I majorée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Cependant, la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, si tel était le cas, il existerait $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ tel que

$$f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell$$

Par composition des limites nous en déduirions

$$1 = f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \qquad \text{et} \qquad 0 = f\left(n + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

puis $0 = 1$ (unicité de la limite).

Exercice 94. — Construire une fonction $f\colon [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, positive ou nulle telle que

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;

(b) $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Exercice 95. — Soit une fonction $f\colon [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, telle que :

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;

(b) il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell$.

Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 96. — Soit une fonction $f\colon [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, telle que :

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;

(b) la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
2. Démontrer $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$. On pourra considérer les intégrales $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ \mathrm{d}t$, où $x \geqslant 0$.

7. Intégration sur un intervalle quelconque

Notation. — La lettre I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

7.1. Définition d'une intégrale convergente sur un intervalle quelconque

Définition 97. — *Soient a et b des points de $\overline{\mathbf{R}}$ tels que $a < b$.*

1. *Cas d'un intervalle semi-ouvert, ouvert à droite. — Soit $f \in \mathcal{CM}\left([a,b[\, , \mathbf{K} \right)$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si la fonction*
$$I \left| \begin{array}{ccc} [a,b[& \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$
admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. *Cas d'un intervalle semi-ouvert, ouvert à gauche. — Soit $f \in \mathcal{CM}\left( ]a,b]\, , \mathbf{K} \right)$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si la fonction*
$$I \left| \begin{array}{ccc}]a,b] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$
admet une limite finie lorsque x tend vers a^+. Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
3. *Cas d'un intervalle ouvert. — Soient $f \in \mathcal{CM}\left( ]a,b[\, , \mathbf{K} \right)$ et c un point quelconque de $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ converge (au sens de 2.) et l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge (au sens de 1.). Dans ce cas, on pose*
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_x^c f(t)\ \mathrm{d}t + \lim_{y\to b^-} \int_c^y f(t)\ \mathrm{d}t.$$
La définition de la notion de convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et sa valeur éventuelle ne dépendent pas du choix du point c.

Exemple 98. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2$.

Exemple 99. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente en 0 et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t = -1$.

Exercice 100. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ converge.

Exercice 101. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

Bien que
$$\int_{-x}^x t\ \mathrm{d}t = 0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ \mathrm{d}t$ diverge. En effet
$$\int_0^x t\ \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Exercice 102. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\ \mathrm{d}t$.

7.2. Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle quelconque

Définition 103. — *Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge alors on pose $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = +\infty$.*

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$ et $[a, b]$ un segment inclus dans l'intervalle I. Quelle que soit la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_I f(t)\ \mathrm{d}t \qquad [\text{inégalité dans } \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}]$$

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$. Un calcul aboutissant à

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t < +\infty$$

vaut preuve de convergence.

7.3. Propriétés de l'intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Théorème 104. — *L'intégrale généralisée possède les propriétés suivantes.*

1. *Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors*

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_I g(t)\ \mathrm{d}t \text{ convergent} \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \\ \displaystyle\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\ \mathrm{d}t \end{cases} \qquad [\textit{linéarité}]$$

2. *Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$.*

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad [\textit{positivité, inégalité dans } \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}]$$

3. *Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})^2$.*

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_I g(t)\ \mathrm{d}t \text{ convergent} \\ f \leqslant g \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_I f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\ \mathrm{d}t \qquad [\textit{croissance}]$$

4. *Soient $a := \inf(I) \in \overline{\mathbf{R}}$, $b := \sup(I) \in \overline{\mathbf{R}}$, $c \in]a, b[$ et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$.*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ convergent} \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases} \qquad [\textit{relation de Chasles}]$$

5. *Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \left|\int_I f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t \qquad [\textit{inégalité triangulaire, inégalité dans } \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}]$$

6. *Soit $f \in \mathbf{R}^I$.*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } I \\ f \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f = 0 \qquad [\textit{séparation pour les fonctions continues}]$$

On veillera à appliquer la linéarité avec soin, en vérifiant les hypothèses de convergence au préalable. Bien que

$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\ \mathrm{d}t$ converge, l'identité

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\ \mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\ \mathrm{d}t - \int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

n'a aucun sens. En effet, les deux intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ divergent.

Remarque 105. — Soit $(f,g) \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{K})^2$.

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge et } \int_I g(t)\ \mathrm{d}t \text{ diverge } \Longrightarrow \int_I f(t)+g(t)\ \mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

Exercice 106. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

7.4. Intégrale du logarithme népérien au voisinage de 0^+

Proposition 107. — *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ *converge.*

7.5. Intégrale de Riemann au voisinage de 0^+

Proposition 108. — *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x}_{\textit{intégrale de Riemann}} \quad \textit{converge} \iff \alpha < 1$$

7.6. Le faux problème de convergence en une extrémité réelle

Proposition 109. — *Soient a et b des réels tels que $a < b$.*

1. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\,[a,b[\,,\mathbf{K}\,)$. Si f admet une limite finie en b^- alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge.*
2. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\,]a,b]\,,\mathbf{K}\,)$. Si f admet une limite finie en a^+ alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge.*

Exercice 110. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 111. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2\ln(t)}{2+\sin(t)}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

7.7. Intégration par parties sur un intervalle ouvert

Théorème 112. — *Soient I un intervalle ouvert non vide, $a = \inf(I) \in \overline{\mathbf{R}}$ et $b = \sup(I) \in \overline{\mathbf{R}}$. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{K})^2$ tel que le produit fg possède des limites finies en a^+ et b^-.*

1. *Les deux intégrales* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$ *ont même nature.*
2. *Si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t$ *converge ou l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$ *converge, alors*

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$$

où $[fg]_a^b := \lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x) - \lim\limits_{x\to a^+} f(x)g(x)$.

Démonstration. Introduisons des réels x, c, y tels que $a < x < c < y < b$.

1. Comme les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur les segments $[x, c]$ et $[c, y]$, la formule d'intégration par parties pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment livre
$$\int_x^c f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t = f(c)g(c) - f(x)g(x) - \int_x^c f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \tag{6}$$
et
$$\int_c^y f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t = f(y)g(y) - f(c)g(c) - \int_c^y f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \tag{7}$$
Puisque $f(x)g(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers a^+, nous déduisons que (6) que
$$\text{l'intégrale } \int_a^c f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si l'intégrale } \int_a^c f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \tag{8}$$
Puisque $f(x)g(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers b^-, nous déduisons que (7) que
$$\text{l'intégrale } \int_c^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si l'intégrale } \int_c^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \tag{9}$$
D'après (8) et (9), les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$ ont même nature.

2. Supposons que l'une des deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Alors, d'après le résultat 1, ces deux intégrales convergent. Nous pouvons alors faire tendre x vers a^+ dans (6) pour obtenir
$$\int_a^c f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t = f(c)g(c) - \lim_{x \to a^+} f(x)g(x) - \int_a^c f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \tag{10}$$
et faire tendre y vers b^- dans (7) pour obtenir
$$\int_c^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{y \to b^-} f(y)g(y) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \tag{11}$$
En additionnant membre à membre les égalités (10) et (11), il vient
$$\underbrace{\int_a^c f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t}_{\int_a^b f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t} = \underbrace{\lim_{y \to b^-} f(y)g(y) - \lim_{x \to a^+} f(x)g(x)}_{[fg]_a^b} - \underbrace{\left(\int_a^c f'(t)\,g(t) + \int_c^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t\right)}_{\int_a^b f'(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t}$$

□

Exercice 113. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\ \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

Exercice 114. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,e^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

Exercice 115. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

7.8. Théorème de changement de variable sur un intervalle ouvert

Lemme 116. — *Soit $(\alpha, \beta, a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^4$ tel que $\alpha < \beta$ et $a < b$ et :*
$$\varphi\colon\ ]\alpha, \beta[\longrightarrow]a, b[$$
une bijection strictement croissante. Alors
$$\varphi(t) \xrightarrow[t \to \alpha^+]{} a^+ \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) \xrightarrow[t \to \beta^-]{} b^-$$

Démonstration. Nous démontrons uniquement le résultat pour la limite de φ en β^-, lorsque β et b sont réels. Nous voulons établir que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0 \quad \forall t \in \,]\alpha,\beta[\quad \beta - \rho < t < \beta \implies b - \varepsilon < \varphi(t) < b$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0 \quad \forall t \in \,]\alpha,\beta[\quad \beta - \rho < t \implies b - \varepsilon < \varphi(t)$$

puisque les inégalités ôtées sont nécessairement vérifiées.
Soit ε tel que $0 < \varepsilon < b - a$. Ainsi, $\beta - \varepsilon \in \,]\alpha,\beta[$ et

$$\rho := \beta - \varphi^{-1}(b - \varepsilon)$$

est un nombre réel strictement positif bien défini.
Soit $t \in \,]\alpha,\beta[$ tel que $\beta - \rho < t$. Comme φ est strictement croissante

$$b - \varepsilon = \varphi(\beta - \rho) < \varphi(t)$$

□

Théorème 117. — *Soit* $(\alpha,\beta,a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^4$.

1. *Soient* $f \in \mathcal{C}^0(\,]a,b[\,,\mathbf{K})$ *et* $\varphi\colon]\alpha,\beta[\longrightarrow]a,b[$ *une bijection* <u>*strictement croissante*</u> *et de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors les intégrales*
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$$
ont même nature et sont <u>*égales*</u> *si elles convergent.*
2. *Soient* $f \in \mathcal{C}^0(\,]a,b[\,,\mathbf{K})$ *et* $\varphi\colon]\alpha,\beta[\longrightarrow]a,b[$ *une bijection* <u>*strictement décroissante*</u> *et de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors les intégrales*
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$$
ont même nature et sont <u>*opposées*</u> *si elles convergent.*

Démonstration. Nous démontrons uniquement le résultat 1.

- Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$ converge.
Soient x, c, y des réels tels que $a < x < c < y < b$.
La formule de changement de variable sur les segments $\left[\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(c)\right] \subset \,]\alpha,\beta[$ et $\left[\varphi^{-1}(c),\varphi^{-1}(y)\right] \subset \,]\alpha,\beta[$ livre
$$\int_x^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\varphi^{-1}(c)} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \int_c^y f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(y)} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u \tag{12}$$
D'après le lemme 116 (appliqué à φ^{-1})
$$\varphi^{-1}(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \alpha^+ \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1}(y) \xrightarrow[y\to b^-]{} \beta^-$$
Alors nous déduisons de (12) et de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$
  — $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^{\varphi^{-1}(c)} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$;
  — $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(c)}^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$

  puis
$$\underbrace{\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t}_{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t} = \underbrace{\int_\alpha^{\varphi^{-1}(c)} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u + \int_{\varphi^{-1}(c)}^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u}_{\int_\alpha^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u}$$

- Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
  Soient δ, γ, η des réels tels que $\alpha < \delta < \gamma < \eta < \beta$.
  La formule de changement de variable sur les segments $[\delta, \gamma] \subset]\alpha, \beta[$ et $[\gamma, \eta] \subset]\alpha, \beta[$ livre

$$\int_{\varphi(\delta)}^{\varphi(\gamma)} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\delta}^{\gamma} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\eta)} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\gamma}^{\eta} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u \tag{13}$$

D'après le lemme 116 (appliqué à φ)

$$\varphi(\delta) \xrightarrow[\delta \to \alpha^+]{} a^+ \qquad \text{et} \qquad \varphi(\eta) \xrightarrow[\eta \to \beta^-]{} b^-$$

Alors nous déduisons de (12) et de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

— $\displaystyle\int_{\alpha}^{\gamma} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_{\alpha}^{\gamma} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^{\varphi(\gamma)} f(t)\ \mathrm{d}t$;

— $\displaystyle\int_{\gamma}^{\beta} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_{\gamma}^{\beta} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \int_{\varphi(\gamma)}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$;

puis

$$\underbrace{\int_{\alpha}^{\gamma} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u + \int_{\gamma}^{\beta} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u}_{\int_{\alpha}^{\beta} f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u} = \underbrace{\int_a^{\varphi(\gamma)} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{\varphi(\gamma)}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t}_{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}$$

□

Exercice 118. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2-t)^{\alpha}}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 119. — Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 120. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et qu'elle est nulle.

Exercice 121. — Soient $m \in \mathbf{R}$ et $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$. Sachant que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$, démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\ \mathrm{d}x$ et préciser sa valeur.

8. Intégrabilité sur un intervalle quelconque

Notation. — La lettre I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

8.1. Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle quelconque

Définition 122. — *Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$. On dit que la fonction f est <u>intégrable</u> sur I ou que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ est <u>absolument convergente</u> si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.*

Remarque 123. — Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$ une fonction de signe constant. La fonction f est intégrable sur I si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

> Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$. Un calcul aboutissant à
>
> $$\int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t < +\infty$$
>
> vaut preuve d'intégrabilité.

8.2. La convergence absolue d'une intégrale sur un intervalle quelconque implique la convergence

Théorème 124. — *Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$. Si f est intégrable sur I alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

La réciproque du théorème 124 est fausse, comme l'illuste l'exemple suivant.

Exemple 125. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ est convergente, mais non-absolument convergente. Elle est alors dite semi-convergente.

Exercice 126. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(t^2\right)\ e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

8.3. L'espace $L^1(I, \mathbf{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbf{K}$

Proposition 127. — *L'ensemble*

$$L^1(I, \mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{K})\ :\ \int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$$

des fonctions intégrales de I dans $\mathbf{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$. De plus

$$\forall\, f \in L^1(I, \mathbf{K}) \qquad \left| \int_I f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t \qquad [\textit{inégalité triangulaire, inégalité dans } \mathbf{R}_+]$$

Exercice 128. — Démontrer que l'application

$$|| \cdot ||_1 \ \left| \begin{array}{ccc} L^1(I, \mathbf{K}) \cap \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

définie une norme sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $L^1(I, \mathbf{K}) \cap \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$.

Exercice 129. — On pose

$$L^2(I, \mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})\ :\ \int_I f^2(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$$

1. Démontrer que $L^2(I, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$.
2. Démontrer que l'application

$$|| \cdot ||_2 \ \left| \begin{array}{ccc} L^2(I, \mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t} \end{array} \right.$$

   définie une norme sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $L^2(I, \mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

8.4. Théorème de comparaison en une borne quelconque

Théorème 130. — *Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $b \in \overline{\mathbf{R}}$ tels que $a < b$.*

1. *Soient $f \in \mathcal{CM}\left([a, b[\ , \mathbf{K} \right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left([a, b[\ , \mathbf{K} \right)$*
   (a) *Supposons $f(x) \underset{x \to b^-}{=} \mathrm{O}(g(x))$. Alors :*

   $$g \text{ intégrable sur } [a, b[\quad \Longrightarrow \quad f \text{ intégrable sur } [a, b[.$$

   (b) *Supposons $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} g(x)$. Alors :*

   $$f \text{ intégrable sur } [a, b[\quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ intégrable sur } [a, b[.$$

2. *Soient $f \in \mathcal{CM}\left( ]a, b]\ , \mathbf{K} \right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left( ]a, b]\ , \mathbf{K} \right)$*

(a) Supposons $f(x) \underset{x \to a^+}{=} \mathrm{O}(g(x))$*. Alors :*

$$g \text{ intégrable sur }]a,b] \quad \Longrightarrow \quad f \text{ intégrable sur }]a,b].$$

(b) Supposons $f(x) \underset{x \to a^+}{\sim} g(x)$*. Alors :*

$$f \text{ intégrable sur }]a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ intégrable sur }]a,b].$$

Exercice 131. — Déterminer les réels x tels que l'intégrale

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

converge.

Exercice 132. — Démontrer que les intégrales

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\ \mathrm{d}t$$

convergent et sont égales. En déduire leur valeur commune.

8.5. Intégrale de Riemann singulière en un point réel

Proposition 133. — *Soit* $(a,b,\alpha) \in \mathbf{R}^3$ *tel que* $a < b$*.*

1. *L'inétgrale de Riemann* $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\ \mathrm{d}x$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$*.*
2. *L'intégrale de Riemann* $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\ \mathrm{d}x$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$*.*

Exercice 134. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 135. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$.

9. Intégration des relations de comparaison

Théorème 136. — *On énonce deux versions, suivant l'emplacement de la singularité.*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ *tel que* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$*. Soient* $f \in \mathcal{CM}\left([a,b[\,,\mathbf{R}\right)$ *et* $g \in \mathcal{CM}\left([a,b[\,,\mathbf{R}_+\right)$ *telles que* $f(t) \underset{t \to b^-}{=} \mathrm{o}\left(g(t)\right)$*.*

1. *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b |f|$ *converge et :*

$$\int_x^b f \underset{x \to b^-}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g\right).$$

2. *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *diverge, alors*

$$\int_a^x f \underset{x \to b^-}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right).$$

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ *tel que* $-\infty \leqslant a < b < +\infty$*. Soient* $f \in \mathcal{CM}\left(]a,b]\,,\mathbf{R}\right)$ *et* $g \in \mathcal{CM}\left(]a,b]\,,\mathbf{R}_+\right)$ *telles que* $f(t) \underset{t \to a^+}{=} \mathrm{o}\left(g(t)\right)$*.*

1. *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b |f|$ *converge et :*

$$\int_a^x f \underset{x \to a^+}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right).$$

2. *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *diverge, alors*

$$\int_x^b f \underset{x \to a^+}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g\right).$$

Démonstration. Nous établissons les résultats de la colonne de gauche, lorsque $a \in \mathbf{R}$ et $b = +\infty$. Soient donc $f \in \mathcal{CM}\left([a,+\infty[\,,\mathbf{R}\right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left([a,+\infty[\,,\mathbf{R}_+\right)$ telles que $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(g(t)\right)$.

1. Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge.

   - *Intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$.*
   Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(g(t)\right)$, l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$ se déduit du théorème 86.
   - *Les queues des intégrales de f sont négligeables devant les queues des intégrales de g au voisinage de $+\infty$.*
   L'assertion $\displaystyle\int_x^{+\infty} f \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} g\right)$, à démontrer, peut se formuler comme suit

   $$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,a_\varepsilon \geqslant a\quad \forall\,x\geqslant a_\varepsilon\qquad \left|\int_x^{+\infty} f\right| \leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} g$$

   Soit $\varepsilon>0$. Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(g(t)\right)$

   $$\exists\,a_\varepsilon \geqslant a\quad \forall\,t\geqslant a_\varepsilon\qquad |f(t)| \leqslant \varepsilon\, g(t)$$

   Ainsi, pour tout $x \geqslant a_\varepsilon$

   $$\begin{aligned}\left|\int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t && \text{[inégalité triangulaire]}\\ &\leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t && \left[\,|f|\leqslant \varepsilon\, g \text{ sur } [x,+\infty[\text{ et croissance de l'intégrale}\right].\end{aligned}$$

2. Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.

   - *Comportement asymptotique des intégrales partielles de g.*
   Comme la fonction g est positive, la fonction

   $$I \left| \begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x g \end{array}\right.$$

   est croissante. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge, la fonction I n'admet pas de limite finie en $+\infty$. Par théorème de la limite monotone

   $$\int_a^x g \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \tag{14}$$

   - *Les intégrales partielles de f sont négligeables devant les intégrales partielles de g au voisinage de $+\infty$.* L'assertion $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right)$, à démontrer, peut se formuler comme suit

   $$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,a_\varepsilon \geqslant a\quad \forall\,x\geqslant a_\varepsilon\qquad \left|\int_a^x f\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g$$

   Soit $\varepsilon>0$.

   (i) Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(g(t)\right)$

   $$\exists\,a_{1,\varepsilon} \geqslant a\quad \forall\,t\geqslant a_{1,\varepsilon}\qquad |f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, g(t)$$

   Ainsi, pour tout $x \geqslant a_{1,\varepsilon}$:

   $$\begin{aligned}\left|\int_{a_{1,\varepsilon}}^x f\right| &\leqslant \int_{a_{1,\varepsilon}}^x |f| && \text{[inégalité triangulaire]}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{a_{1,\varepsilon}}^x g && \left[\,|f|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, g \text{ sur } [a_{1,\varepsilon},x] \text{ et croissance de l'intégrale}\right]\end{aligned}$$

   Comme la fonction g est positive et $[a_{1,\varepsilon},x]\subset[a,x]$, nous en déduisons que

   $$\left|\int_{a_{1,\varepsilon}}^x f\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g \tag{15}$$

(ii) D'après (14), la quantité $\displaystyle\int_a^x g$ est non nulle sur un voisinage de $+\infty$ et, comme $\left|\displaystyle\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right|$ est une constante :

$$\frac{\left|\displaystyle\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right|}{\displaystyle\int_a^x g} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi :

$$\exists\, a_{2,\varepsilon} \geqslant a \quad \forall\, x \geqslant a_{2,\varepsilon} \qquad \left|\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g \tag{16}$$

Posons $a_\varepsilon := \max\{a_{1,\varepsilon}, a_{2,\varepsilon}\}$. Pour tout $x \geqslant a_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^x f\right| &= \left|\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f + \int_{a_{1,\varepsilon}}^x f\right| && \text{[relation de Chasles]}\\
&\leqslant \left|\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right| + \left|\int_{a_{1,\varepsilon}}^x f\right| && \text{[inégalité triangulaire]}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g && \text{[(15) et (16)]}\\
&= \varepsilon \int_a^x g.
\end{aligned}$$

□

Théorème 137. — *On énonce deux versions, suivant l'emplacement de la singularité.*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soient $f \in \mathcal{CM}\left([a,b[\,,\mathbf{R}\right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left([a,b[\,,\mathbf{R}_+\right)$ telles que $f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{O}\left(g(t)\right)$.

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge et :*

$$\int_x^b f \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g\right).$$

2. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors*

$$\int_a^x f \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g\right).$$

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Soient $f \in \mathcal{CM}\left(]a,b]\,,\mathbf{R}\right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left(]a,b]\,,\mathbf{R}_+\right)$ telles que $f(t) \underset{t\to a^+}{=} \mathrm{O}\left(g(t)\right)$.

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge et :*

$$\int_a^x f \underset{x\to a^+}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g\right).$$

2. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors*

$$\int_x^b f \underset{x\to a^+}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g\right).$$

Éléments de démonstration. Adapter la démonstration rédigée du théorème 136. □

Corollaire 138. — *On énonce deux versions, suivant l'emplacement de la singularité.*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soient $f \in \mathcal{CM}\left([a,b[\,,\mathbf{R}\right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left([a,b[\,,\mathbf{R}_+\right)$ telles que $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$.

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge et :*

$$\int_x^b f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g.$$

2. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors*

$$\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g.$$

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Soient $f \in \mathcal{CM}\left(]a,b]\,,\mathbf{R}\right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left(]a,b]\,,\mathbf{R}_+\right)$ telles que $f(t) \underset{t\to a^+}{\sim} g(t)$.

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge et :*

$$\int_a^x f \underset{x\to a^+}{\sim} \int_a^x g.$$

2. *Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors*

$$\int_x^b f \underset{x\to a^+}{\sim} \int_x^b g.$$

Démonstration. Nous établissons les résultats de la colonne de gauche, lorsque $a \in \mathbf{R}$ et $b = +\infty$. Soient donc $f \in \mathcal{CM}\left([a, +\infty[\ , \mathbf{R} \right)$ et $g \in \mathcal{CM}\left([a, +\infty[\ , \mathbf{R}_+ \right)$ telles que $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} g(t)$. Cette dernière hypothèse se reformule :

$$f(t) - g(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(g(t)\right).$$

Cette observation va nous permettre de déduire aisément le corollaire du théorème 136.

1. Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge.

   - *Intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.*
     Comme $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} g(t)$, l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ se déduit du théorème 86.
   - *Les queues des intégrales de f sont équivalentes aux queues des intégrales de g au voisinage de $+\infty$.*
     D'après le théorème 136

     $$\int_x^{+\infty} f - \int_x^{+\infty} g = \int_x^{+\infty} (f - g) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} g\right)$$

     d'où $\displaystyle\int_x^{+\infty} f \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g$.

2. Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge. D'après le théorème 136

   $$\int_a^x f - \int_a^x g = \int_a^x (f - g) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right)$$

   d'où $\displaystyle\int_a^x f \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_a^x g$.

□

Exercice 139. — Soit la fonction :

$$\varphi \colon x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition I de la fonction φ.
2. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et donner sa dérivée.
3. En considérant $\varphi(x) - \varphi(1)$, démontrer $\varphi(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer :

   $$\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + \mathrm{O}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

   et en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de $+\infty$.
5. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\ \mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.