Intégrales à paramètre

1. Théorème de convergence dominée

Théorème 1. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$ telle que :*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$;*

(H2) *il existe une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$;*

(H3) *il existe une fonction dominante $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (n,t) \in \mathbf{N} \times I \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \qquad$ *[hypothèse de domination].*

Alors :

(C1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur I ;*

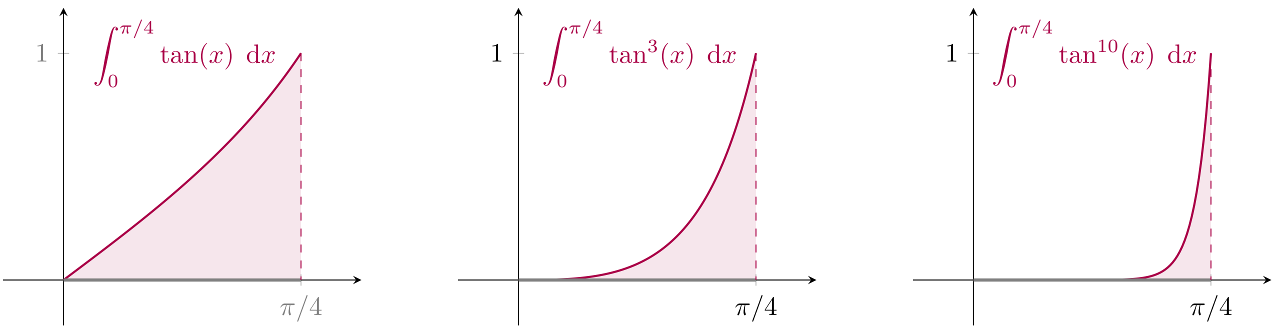
(C2) *f est intégrable sur I ;*

(C3) $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$

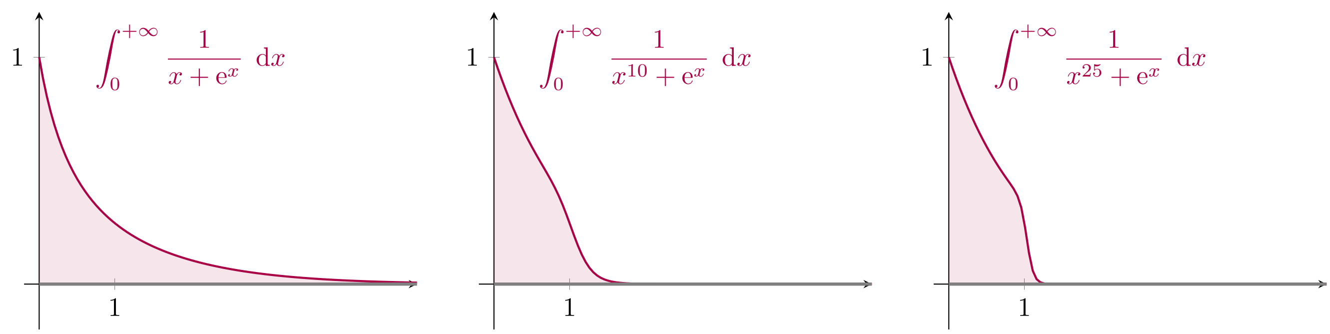
Ce théorème est admis.

Le théorème 1 donne une condition suffisante pour qu'une limite simple de suite de fonctions soit intégrable.

Exercice 2. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\ \mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.



Exercice 3. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.

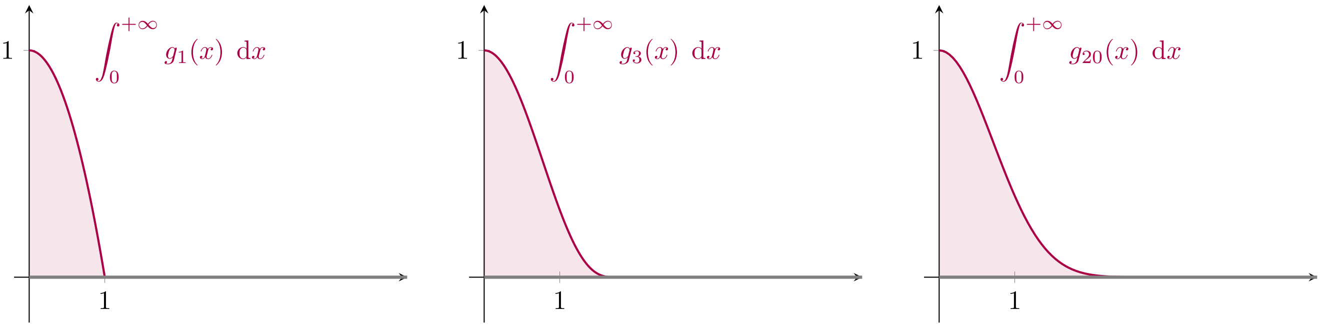


Exercice 4. — valeur de la Gaussienne à l'aide du théorème de convergence dominée Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}[}(x). \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x.$

3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

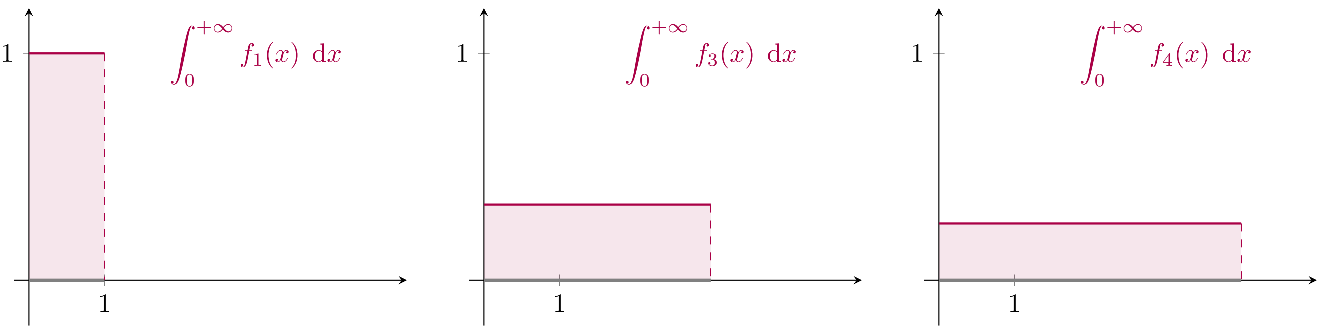


L'hypothèse de domination dans le théorème 1 est essentielle, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exercice 5. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\,\mathbf{1}_{[0,n]}(x). \end{array} \right.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ ne tend pas vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$, quand n tend vers $+\infty$.



Exercice 6. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,e^{-t}}\ \mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Démontrer que la série numérique $\sum (-1)^n\, I_n$ converge.

Exercice 8. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\ \mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. — Soit $f \colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue et bornée. Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\,f(t)\,e^{-nt}\ \mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{n\,x^2+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I_n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Variante continue du théorème de convergence dominée

Corollaire 11. — *Soient A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$ d'intérieurs non vides et soit $f\colon A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ une application. Pour tout $x \in A$, posons :*

$$f(x,\,\cdot\,)\;\left|\;\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t)\ . \end{array}\right.$$

Soit a un point adhérent à A. Supposons :

(H1) *pour tout $x \in A$, $f(x,\,\cdot\,) \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$;*

(H2) *il existe une fonction $g\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux, telle que pour tout $t \in I$:*

$$f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} g(t)$$

(H3) *il existe une fonction dominante $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall\,(x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ *[hypothèse de domination].*

Alors :

(C1) *pour tout $x \in I$, $f(x,\,\cdot\,)$ est intégrable sur I ;*

(C2) *g est intégrable sur I ;*

(C3) $\displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I g(t)\ \mathrm{d}t.$

Démonstration.

(C1) Soit $x \in I$.

- La fonction $f(x,\,\cdot\,)$ est continue par morceaux sur I (H1).
- La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(x,t)|\ \mathrm{d}t$ est conséquence de (H3) et du théorème de domination pour les fonctions positives.

(C2)

- La fonction g est continue par morceaux sur I (H2).
- Soit $t \in I$ fixé. D'après H3 :

$$\forall\,x \in A \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

En faisant tendre x vers a, il vient :

$$|g(t)| \leqslant \varphi(t)$$

grâce à H2 et à la continuité du module. D'après H3 et le théorème de domination pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_I |g(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

(C3) D'après le critère séquentiel de la limite, nous sommes ramenés à démontrer que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$:

$$(\star) \qquad \int_I f(x_n,t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I g(t)\ \mathrm{d}t$$

Considérons donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et introduisons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction h_n définie par :

$$h_n\;\left|\;\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x_n,t) \end{array}\right.$$

(H1') D'après H1, la fonction f_n est continue par morceaux, pour tout $n \in \mathbf{N}$;

(H2') Par composition de limite et H2, pour tout $t \in I$:

$$h_n(t) := f(x_n,t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(t)$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction g, qui est continue par morceaux sur I.

(H3') De H3, nous déduisons que :

$$\forall\,(n,t) \in \mathbf{N} \times I \qquad |h_n(t)| = |f(x_n,t)| \leqslant \varphi(t)$$

où φ est continue par morceaux et intégrable sur I.

D'après H1', H2' et H3', nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 1) pour obtenir $(\star)$.

$\square$

Exercice 12. — Considérons la fonction $f\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$.

1. D'éterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la limite éventuelle de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 13. — Considérons la fonction $f\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x\ \mathrm{d}t$.

1. D'éterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la limite éventuelle de la fonction f en $+\infty$.

3. Théorèmes d'intégration terme à terme de Lebesgue

3.1. Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue : cas positif

Théorème 14. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}_+$ telle que :*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;*

(H2) *la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{R}_+)$*

Alors :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t \qquad [\textit{identité dans } [0,+\infty]]$$

Ce théorème est admis.

On conserve les notations du théorème 14 et on suppose les hypothèses (H1) et (H2) vérifiées. Alors

$$\text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est intégrable sur } I \text{ si et seulement si } \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t < +\infty$$

Exercice 15. — Démontrer l'identité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

Exercice 16. — Soit $x \in]-1,1[$. Démontrer l'identité $\displaystyle\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{u^2} - x}\ \mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 17. — On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\ \mathrm{d}t$, en justifiant son existence en cours d'étude.

Exercice 18. — Démontrer l'identité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$, en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

Exercice 19. — Démontrer l'identité $\displaystyle\int_2^{+\infty} \zeta(x) - 1 \ \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$, en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

Exercice 20. — Démontrer l'identité $\displaystyle\int_0^{1} x^{-x} \ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$, en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

3.2. Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue : cas général

Théorème 21. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$ telle que :*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;*

(H2) *la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$;*

(H3) *la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ converge.*

Alors :

(C1) *la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ;*

(C2) $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \ \mathrm{d}t.$

Ce théorème est admis.

Le théorème 21 donne une condition suffisante pour qu'une somme de série de fonctions convergeant simplement soit intégrable.

Exercice 22. — Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{x}\right) e^{-x} \ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$, en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

Exercice 23. — Soit $a > 0$. Démontrer l'identité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}$, en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

3.3. Intégration terme à terme en appliquant le théorème de convergence dominée aux sommes partielles

Pis-aller 24. — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$ telle que :

(H1) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la série de fonctions $f_n \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$;

(H2) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$.

Il se peut que :

- les fonctions f_n ne soient pas à valeurs réelles positives (on ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue : cas positif) ;
- $\displaystyle\sum \int_I |f_n| = +\infty$ (on ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue : cas général) ;

mais qu'il soit tout de même possible d'établir que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \ \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \ \mathrm{d}t$$

en justifiant préalablement que tous les termes en jeu existent.

Pour cela, on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

En effet, supposons que :

(H3) il existe une fonction $\varphi \colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

(a) φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(b) $\forall\,(n,t) \in \mathbf{N} \times I \qquad \left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right| \leqslant \varphi(t)$

Le théorème de convergence dominée nous livrera alors :

(C1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction S_n est intégrable sur I (ce qui équivaut à, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I) ;

(C2) la fonction $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ;

(C3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_I f_k(t)\ \mathrm{d}t = \int_I S_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$, ce qui signifie :

- la série numérique $\displaystyle\sum \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 25. — Soit $a > 0$. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

Remarque 26. — En spécialisant l'identité de l'exercice 25 à $a \in \{1,2\}$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

En spécialisant l'identité de l'exercice 25 à $a \in \{3,4\}$ et en développant les fractions rationnelles $\dfrac{1}{X^3+1}$ et $\dfrac{1}{X^4+1}$ en éléments simples, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9} + \frac{\ln(2)}{3} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{\pi + \ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\sqrt{2}}.$$

Exercice 27. — Soit $a > 0$. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}.$$

Exercice 28. — Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π.

1. Démontrer que $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}\ \mathrm{d}x \right) = -\ln\left(\left| 2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \right)$.
2. Démonter que la série numérique $\displaystyle\sum \int_0^1 e^{i(n+1)\theta}\, x^n\ \mathrm{d}x$ converge et que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{i(n+1)\theta}\, x^n\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}\ \mathrm{d}x$$
3. En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum \frac{\cos(n\,\theta)}{n}$ converge et que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\,\theta)}{n} = -\ln\left(\left| 2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \right)$$

4. Intégrales à paramètre : problématique et exemples

4.1. Problématique

1. ***Données.*** On considère :
   - un intervalle A d'intérieur non vide (ensemble des paramètres) ;
   - un intervalle I d'intérieur non vide (intervalle d'intégration) ;
   - une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

2. ***Hypothèse.*** Nous supposons que, pour tout x fixé dans A, la fonction :

$$f(x,\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

   est continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi, pour tout x fixé dans A, $\displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est un nombre complexe bien défini.

3. ***Objectifs.*** Nous nous proposons d'étudier ces différents nombres complexes (pour chaque x fixé dans A, nous en avons un à disposition) « ensemble », i.e. nous nous intéressons à la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right. \qquad \text{[intégrale à paramètre]}$$

   Précisément, nous étudions la régularité de cette fonction g sur A :
   - continuité ;
   - dérivabilité et dérivée éventuelle ;
   - caractère $\mathcal{C}^k$ et dérivée k-ième éventuelle ($k \in \mathbf{N}^*$).

4.2. Exemples de fonctions définies par une intégrale à paramètre

Exemple 29. — La fonction Γ d'Euler, qui est définie par :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Nous démontrerons que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et qu'elle interpole la factorielle, i.e. que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Exemple 30. — Si $f \in \mathcal{CM}([0,+\infty[,\mathbf{C})$ est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$, alors on définit sa transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ par :

$$\mathcal{L}(f) \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

La transformée de Laplace peut être utilisée pour résoudre des équations différentielles.

Exemple 31. — Si $f \in \mathcal{CM}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, alors on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ par :

$$\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-ixt}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

La transformée de Fourier trouve également des applications dans la résolution d'équations différentielles.

5. Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 32. — *Soient A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f\colon A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$. Supposons :*

(H1) *pour tout $x \in A$, l'application :*

$$f(x,\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur I ;

(H2) *pour tout $t \in I$, l'application :*

$$f(\,\cdot\,,t) \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est continue sur A ;

(H3) *il existe une fonction dominante $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** *$\forall\,(x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.*

Alors :

(C1) *pour tout $x \in A$, la fonction :*

$$f(x,\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur I ;

(C2) *la fonction :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est continue sur A.

Remarque 33. — Les résultats du théorème 32 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H3), par la version locale en x suivante :

(H3 locale) pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta}\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

- **(a)** $\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- **(b)** $\forall(x,t) \in [\alpha,\beta] \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t)$.

En effet, si la fonction g est continue sur chaque segment de l'intervalle A, alors elle est continue sur A.

Exercice 34. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 35. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\,x^2}}{1+t^3}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 36. — Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction bornée. Soit g la fonction définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\, f(x-t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 37. — Soit g la fonction définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x\,t)\,e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 38. — Soit g la fonction définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x+\cos(t)}\,e^{-t}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Démontrer que g est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Exercice 39. — Soit T un réel strictement positif. On note $\mathcal{C}_T(\mathbf{R},\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qui sont continues et T-périodiques.

1. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_T(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On définit la fonction $f*g$ par :

$$f*g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{T} f(x-t)\,g(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

   Démontrer que $f*g \in \mathcal{C}_T(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2. Démontrer que la loi de composition interne $*$ sur $\mathcal{C}_T(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est commutative.

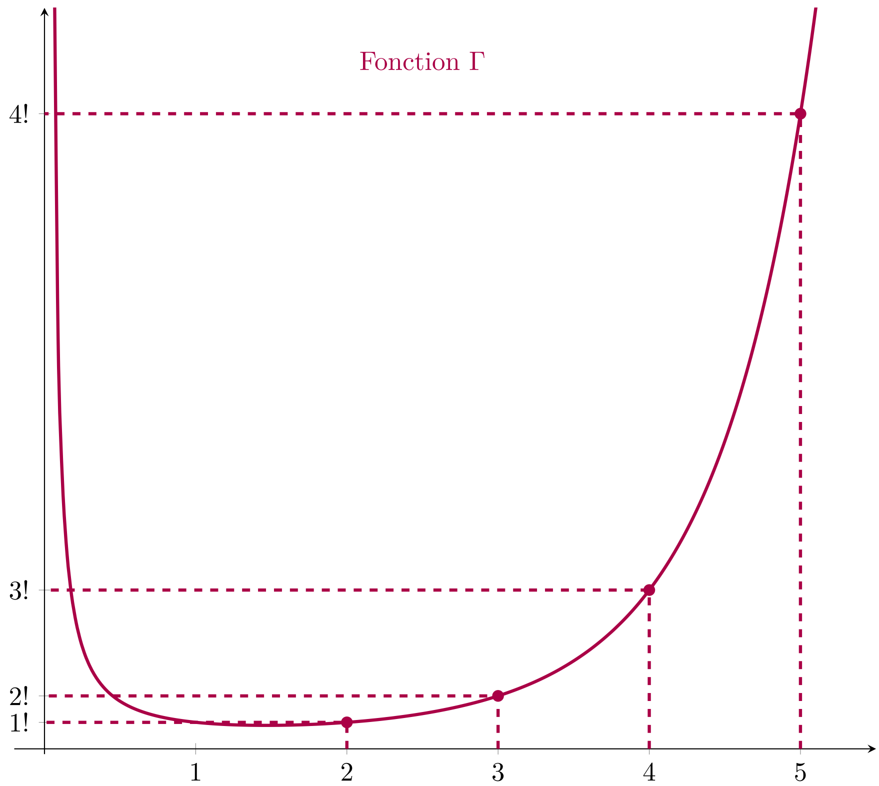
Exercice 40. — Soit Γ la fonction définie par :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction Γ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Démontrer que :

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty \qquad \Gamma(x) \geqslant \frac{2^x}{x}\,e^{-2}$$

   puis préciser le comportement asymptotique de Γ en 0^+ et en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.



6. Dérivée d'une intégrale à paramètre

Théorème 41. — *Soient A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$. Supposons :*

(H1) *pour tout $t \in I$, l'application*

$$f(\,\cdot\,,t) \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, dont nous notons la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\,\cdot\,,t)$;

(H2) *pour tout $x \in A$, les applications :*

$$f(x,\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array} \right.$$

sont continues par morceaux sur I ;

(H3) *pour tout $x \in A$, l'application*

$$f(x,\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur I ;

(H4) *il existe une fonction dominante $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t) \in A \times I \qquad \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t).$

Alors :

(C1) *pour tout $x \in A$, la fonction :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur I ;

(C3) *la fonction :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et de plus :

$$\forall\, x \in A \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Remarque 42. — Les résultats du théorème 41 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H4), par la version locale en x suivante :

(H4 locale) pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta} : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

- **(a)** $\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- **(b)** $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times I, \quad \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t).$

En effet, si la fonction g est dérivable sur chaque segment de l'intervalle A, alors elle est dérivable sur A. De plus, si la formule (C2) est valable sur tout segment de A, elle est valable sur A tout entier.

Exercice 43. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

qui est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$ (cf. exercice 34), est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.

Exercice 44. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

qui est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$ (cf. exercice 35), est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.

Exercice 45. — Démontrer que la fonction Γ définie par :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

qui est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$ (cf. exercice 40), est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}_{>0}, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 46. — On considère la fonction g définie par :

$$g\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. Étudier le comportement asymptotique de g en $+\infty$.
3. En déduire la valeur de $g(x)$, pour tout $x \in\,]0,+\infty[$.
4. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non-absolument convergente.
5. Démontrer que la fonction g est continue en 0.
6. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 47. — On considère la fonction g définie par :

$$g\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \cos(x\,t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.
3. En déduire la valeur de $g(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$.

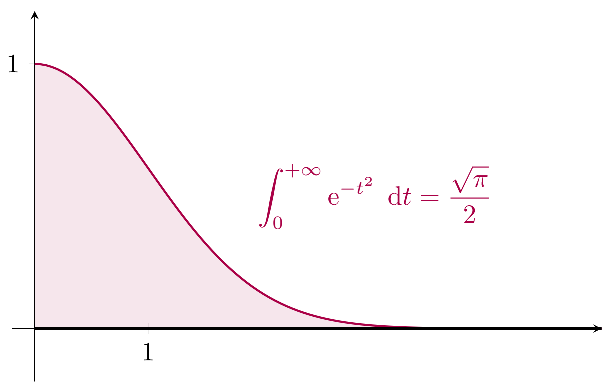
Exercice 48. — On se propose de calculer $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, en résolvant une équation différentielle.
Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

2. Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. En déduire la valeur de I.



7. Dérivées d'ordre supérieur d'une intégrale à paramètre

Théorème 49. — *Soit A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbf{C}$ et un entier $k \geqslant 2$. Supposons :*

(H1) *pour tout $t \in I$, l'application :*

$$f(\,\cdot\,,t) \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

est une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, dont nous notons la dérivée ℓ-ième $\dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(\,\cdot\,,t)$ pour tout $\ell \in [\![1,k]\!]$;

(H2) *pour tout $x \in A$, les applications :*

$$f(x,\,\cdot\,) \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \qquad \text{et, pour tout } \ell \in [\![1,k]\!], \quad \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,\,\cdot\,) \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t) \end{array}$$

sont continues par morceaux sur I ;

(H3) *pour tout $x \in A$, les applications :*

$$f(x,\,\cdot\,) \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \qquad \text{et, pour tout } \ell \in [\![1,k-1]\!], \quad \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,\,\cdot\,) \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t) \end{array}$$

sont intégrables sur I ;

(H4) *il existe une fonction dominante $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t) \in A \times I \qquad \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

Alors :

(C1) *pour tout $x \in A$, la fonction :*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\,\cdot\,) \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \end{array}$$

est intégrable sur I ;

(C2) *la fonction :*

$$g \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\;\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et de plus :

$$\forall\, \ell \in [\![1,k]\!] \qquad \forall\, x \in A \qquad g^{(\ell)}(x) = \int_I \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t)\;\mathrm{d}t$$

Remarque 50. — Les résultats du théorème 49 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H4), par la version locale en x suivante :

(H4 locale) pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta}\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

- **(a)** $\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- **(b)** $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times I \qquad \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t).$

En effet, si la fonction g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur chaque segment de l'intervalle A, alors elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A. De plus, si la formule (C2) est valable sur tout segment de A, elle est valable sur A tout entier.

Exercice 51. — Soit g la fonction définie par :

$$g\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\, e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction g est définie sur $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $g''(x)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$.
3. En déduire la valeur de $g(x)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Exercice 52. — Soit f la fonction définie par :

$$f\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t\,x}\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$.
2. Calculer $f^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. La fonction f est-elle développable en série entière ?

8. Étude de la fonction Γ d'Euler (HP)

Exercice 53. — On se propose d'étudier la fonction :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

1. Justifier que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.
2. Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, x \in]0,+\infty[\quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ \mathrm{d}t$$
3. Que dire de la convexité de la fonction Γ ?
4. Démontrer que la fonction Γ est log-convexe, i.e. que la fonction $\ln\circ\Gamma$ est convexe.
5. Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.
7. Déduire la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ du résultat principal de l'exercice 48.
8. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{11}{2}\right)$.
9. Démontrer que la fonction Γ' s'annule en un unique point $\alpha \in]1,2[$ et en déduire le sens de variation de la fonction Γ.
10. Démontrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et en déduire la limite de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
11. Démontrer que $\Gamma(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, puis que :
$$\forall\, \beta \in]0,+\infty[\quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\Gamma(x)\right).$$
12. Soit $x \in]0,+\infty[$. Démontrer que :
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$$
et en déduire que $\Gamma(x) = \dfrac{n^x\, n!}{x\,(x+1)\,\ldots\,(x+n)}$.
13. Nous posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Nous savons que :
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}\,(1)$$
où γ désigne la constante d'Euler.
    (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 x^n\, \ln(1-x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\ \mathrm{d}x = -\frac{H_{n+1}}{n+1}$.
    (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\ \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\ (\ln(n) - H_{n+1})$.
    (c) Démontrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.