Fonctions vectorielles

Notation. — Dans tout le document
- la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$;
- $(E, ||\cdot||)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ;
- $\cdot$ désigne la multiplication d'un vecteur de E par un scalaire de $\mathbf{K}$ (par la gauche) ;
- I est un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide.

1. Dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point

1.1. Définition de la dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point

Définition 1. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

1. *On dit que f est dérivable en a s'il existe $\ell \in E$ tel que*

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \xrightarrow[t\to a]{} \ell$$

2. *Si ce vecteur ℓ existe, il est unique. On le note $f'(a)$ et on le nomme vecteur dérivé de f en a.*

Remarque 2. — Nous conservons les notations de la précédente définition. Si la fonction f donne la position d'un objet en fonction du temps, alors sa dérivée est le vecteur vitesse.

Remarque 3. — Comme toutes les normes sont équivalentes sur E, les notions de dérivabilité et de vecteur dérivé ne dépendent par de la norme choisie sur E.

Exemple 4. — La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f'(a) = (-\sin(a), \cos(a))$.

1.2. Notation o de Landau pour les fonctions vectorielles

Définition 5. — *Soient $a \in I$, $\varphi \in \mathbf{R}^I$ et $f, g \in E^I$.*

1. *On dit que le vecteur $f(t)$ de E est un o de $\varphi(t)$ au voisinage de a, et on écrit $f(t) \underset{t\to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(t))$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in> 0 \quad \forall t \in I \cap (\,]a-r, a[\cup]a, a+r[\,) \quad ||\, f(t)\,|| \leqslant \varepsilon\ |\varphi(t)|$$

2. *On écrit $f(t) \underset{t\to a}{=} g(t) + \mathrm{o}(\varphi(t))$, si $f(t) - g(t) \underset{t\to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(t))$, i.e. si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in> 0 \quad \forall t \in I \cap (\,]a-r, a[\cup]a, a+r[\,) \quad ||\, f(t) - g(t)\,|| \leqslant \varepsilon\ |\varphi(t)|$$

Remarque 6. — On conserve les notations de la définition 5. Si la fonction φ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a alors

$$f(t) \underset{t\to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(t)) \iff \frac{f(t)}{\varphi(t)} \xrightarrow[t\to a]{} 0_E \qquad \text{et} \qquad f(t) \underset{t\to a}{=} g(t) + \mathrm{o}(\varphi(t)) \iff \frac{f(t)-g(t)}{\varphi(t)} \xrightarrow[t\to a]{} 0_E$$

1.3. Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction vectorielle par l'existence d'un DL1

Proposition 7. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

1. *Si la fonction f est dérivable en a, alors f possède le développement limité à l'ordre 1 en a suivant :*

$$f(t) \underset{t\to a}{=} f(a) + (t-a)\cdot f'(a) + \mathrm{o}(t-a)$$

2. *Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, i.e.*

$$\exists\, (\alpha_0, \alpha_1) \in E^2 \quad f(t) \underset{t\to a}{=} \alpha_0 + (t-a)\cdot\alpha_1 + \mathrm{o}(t-a) \qquad [DL_1(a) \text{ de la fonction } f]$$

alors $f(a) = \alpha_0$, f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha_1$.

1.4. La dérivabilité d'une fonction vectorielle implique la continuité

Proposition 8. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$. Alors :*

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est continue en } a$$

1.5. Dérivabilité et vecteur dérivé d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées

Rappel. — Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de formes linéaires sur E définies par

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

est une base de $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$, appelée base duale de E. Elle permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur de E dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$

$$\forall\, x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{e_i^*(x)}_{\text{scalaire}} \cdot e_i \qquad [e_i^*(x) \text{ est la } i\text{-ième coordonnée de } x \text{ dans la base } (e_1, \ldots, e_n)]$$

Théorème 9. — *Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $f \in E^I$ et $a \in I$.*

1. *La fonction vectorielle f est dérivable en a si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction scalaire $e_i^* \circ f \in \mathbf{R}^I$ est dérivable en a ;*
2. *Si la fonction vectorielle f est dérivable en a, alors*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(e_i^* \circ f)'(a)}_{\textit{scalaire}} \cdot e_i$$

Exercice 10. — Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(t^3 - t^2 + 1, t^4 + 7t\right). \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

Exercice 11. — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

1.6. Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction vectorielle

Définition 12. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

1. *On dit que f est dérivable en a à droite s'il existe $\delta \in E$ tel que*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \to a^+]{} \delta$$

   Si ce vecteur δ existe, il est unique. On le note $f'_d(a)$ et on le nomme vecteur dérivé à droite de f en a.

2. *On dit que f est dérivable en a à gauche s'il existe $\lambda \in E$ tel que*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \to a^-]{} \lambda$$

   Si ce vecteur λ existe, il est unique. On le note $f'_g(a)$ et on le nomme vecteur dérivé à gauche de f en a.

1.7. Définition de la fonction dérivée d'une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle

Notation. — L'ensemble des fonctions de I dans E qui sont dérivables en tout point de I est noté $\mathcal{D}(I, E)$, i.e.

$$\mathcal{D}(I, E) := \left\{ f \in E^I \ : \ f \text{ est dérivable en tout point de } I \right\}$$

Définition 13. — *La fonction dérivée d'une fonction $f \in \mathcal{D}(I, E)$, est définie par*

$$f' \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array} \right.$$

2. Opérations sur les fonctions vectorielles dérivables

2.1. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles dérivables

Proposition 14. — *L'ensemble $\mathcal{D}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de E^I et l'application*

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I,E) & \longrightarrow & E^I \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$$

est linéaire.

2.2. Composition d'une fonction vectorielle dérivable par une application linéaire

Proposition 15. — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors pour tout fonction $f \in \mathcal{D}(I,E)$, $L \circ f \in \mathcal{D}(I,F)$ et*

$$\forall\, t \in I \quad (L \circ f)'(t) = L\left(f'(t)\right)$$

i.e. $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Démonstration. Soient $a \in I$ et $t \in I$. D'après la proposition 7

$$f(x) = f(a) + (t-a)\cdot f'(a) + (t-a)\,\varepsilon(t-a)$$

où $\varepsilon(t-a) \xrightarrow[t \to a]{} 0_E$. On a donc

$$u \circ f(t) = u\left(f(a) + (t-a)f'(a) + (t-a)\cdot\varepsilon(t-a)\right) = u(f(a)) + (t-a)\cdot u(f'(a)) + (t-a)\cdot u(\varepsilon(t-a))$$

Comme E et F sont de dimension finie, u est continue, d'où

$$u(\varepsilon(t-a)) \xrightarrow[t\to a]{} 0_F$$

et donc $(t-a)\cdot u(\varepsilon(t-a)) \underset{t\to a}{=} \mathrm{o}\,(t-a)$. Ainsi, $u \circ f$ possède un DL en a à l'ordre 1

$$u \circ f(t) \underset{t\to a}{=} u(f(a)) + (t-a)u(f'(a)) + \mathrm{o}\,(t-a)$$

D'après la proposition 7, $u \circ f$ est dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$. ☐

Exercice 16. — Soient $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}(I,\mathbf{R})^n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que l'application

$$g \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & P\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t)\end{pmatrix} \end{array}\right.$$

est dérivable sur I et exprimer, pour tout $t \in I$, $g'(t)$ en fonction de $f_1'(t), \dots, f_n'(t)$ et P.

Exercice 17. — Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et le système différentiel linéaire

$$(S)\ :\ X' = A\,X$$

d'inconnue $X \in \mathcal{D}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.

1. Déterminer une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, où $D := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel linéaire
$$(S')\ :\ Y' = D\,Y$$
d'inconnue $Y \in \mathcal{D}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.
3. En déduire l'ensemble solution de (S).

Exercice 18. — Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le système différentiel linéaire

$$(S) \ : \ X' = A\, X$$

d'inconnue $X \in \mathcal{D}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.

1. Déterminer une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = P\,T\,P^{-1}$, où $T := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel linéaire
$$(S') \ : \ Y' = T\,Y$$
d'inconnue $Y \in \mathcal{D}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.
3. En déduire l'ensemble solution de (S).

2.3. Composition de fonctions vectorielles dérivables par une application bilinéaire

Proposition 19. — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$, $(G, ||\cdot||_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $B\colon E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. et $f \in \mathcal{D}(I,E), g \in \mathcal{D}(I,F)$. Alors l'application $B(f,g)$ définie par*

$$B(f,g) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\left(f(t), g(t)\right) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I \quad B(f,g)'(t) = B\left(f'(t), g(t)\right) + B\left(f(t), g'(t)\right)$$

Démonstration. Soient $a \in I$ et $t \in T$. Alors d'après la proposition 7

$$f(t) = f(a) + (t-a)\cdot f'(a) + (t-a)\cdot \varepsilon_1(t-a) \quad \text{et} \quad g(t) = g(a) + (t-a)\cdot g'(a) + (t-a)\cdot \varepsilon_2(t-a)$$

où $\varepsilon_1(t-a) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0_E$ et $\varepsilon_2(t-a) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0_F$. Alors

$$\begin{aligned} B(f(t),g(t)) &= B\left(f(a) + (t-a)\cdot f'(a) + (t-a)\cdot \varepsilon_1(t-a)\ ,\ g(a) + (t-a)\cdot g'(a) + (t-a)\cdot \varepsilon_2(t-a)\right) \\ &= B\left(f(a), g(a)\right) + (t-a)\cdot \left[B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right)\right] + (t-a)\cdot \varepsilon(t-a) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(t-a) := B(\varepsilon_1(t-a), g(t)) + B(f(t), \varepsilon_2(t-a))$. Comme E, F, G sont de dimensions finies, l'application B est continue. Ainsi

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\,(u,v) \in E \times F \quad ||\,B(u,v)\,||_G \leqslant C\ ||\,u\,||_E\ ||\,v\,||_F$$

d'où

$$0 \leqslant ||\,\varepsilon(t-a)\,||_G \leqslant M\ \left[\,||\,\varepsilon_1(t-a)\,||_E\,||\,g(t)\,||_F + ||\,f(t)\,||_E\,||\,\varepsilon_2(t-a)\,||_F\,\right].$$

Ainsi, comme f et g sont bornées au voisinage de a (puisque continues en a), $\varepsilon(t-a) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$. Donc $B(f,g)$ admet le $DL_1(a)$

$$B(f(t),g(t)) \underset{t\to a}{=} B\left(f(a), g(a)\right) \ + \ (t-a)\cdot\left[B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right)\right] + \mathrm{o}\,(t-a)$$

D'après la proposition 7, $B(f,g)$ est dérivable en a et $(B(f,g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$. □

Remarque 20. — Les résultats des propositions 15 et 19 restent vrais, si l'on remplace « dérivable » par « de classe $\mathcal{C}^1$ ».

Exemple 21. — Supposons E muni d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ et considérons $(f,g) \in \mathcal{D}(I,E)^2$. Alors l'application

$$\langle\, f\,,\, g\,\rangle \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \langle\, f(t)\,,\, g(t)\,\rangle \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I \quad \langle\, f\,,\, g\,\rangle'(t) = \langle\, f'(t)\,,\, g(t)\,\rangle + \langle\, f(t)\,,\, g'(t)\,\rangle$$

Exercice 22. — Supposons E muni d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ et notons $||\,\cdot\,||_2$ la norme associée. Soit $f \in \mathcal{D}(I,E)$ telle que

$$\forall t \in I \qquad ||\,f(t)\,||_E = 1$$

En d'autres termes, f prend ses valeurs sur la sphère unité de $(E, ||\cdot||_2)$. Démontrer que, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

2.4. Composition de fonctions vectorielles dérivables par une application multilinéaire

Proposition 23. — *Soient $\left(E_1, ||\cdot||_{E_1}\right), \ldots, \left(E_n, ||\cdot||_{E_n}\right), \left(G, ||\cdot||_G\right)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie,*

$$M \colon E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$$

une application n-linéaire, et $f_1 \in \mathcal{D}(I, E_1), \ldots, f_n \in \mathcal{D}(I, E_n)$. Alors l'application $M(f_1, \ldots, f_n)$ définie par

$$M(f_1, \ldots, f_n) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\left(f_1(t), \ldots, f_n(t)\right) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$

$$M(f_1, \ldots, f_n)'(t) = M\left(f_1'(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)\right) + M\left(f_1(t), f_2'(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)\right) + \ldots + M\left(f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n'(t)\right)$$

Exemple 24. — Soit une application

$$f \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & f(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \underbrace{\left(C_1(t), \ldots, C_n(t)\right)}_{\text{vecteurs colonnes de la matrice } f(t)} \end{array} \right.$$

dérivable sur I. Alors l'application

$$\det(f) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(f(t)) = \det\left(\left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \det\left(C_1(t), \ldots, C_n(t)\right) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et pour tout $t \in I$

$$\det(f)'(t) = \det\left(C_1'(t), C_2(t), C_3(t), \ldots, C_n(t)\right) + \det\left(C_1(t), C_2'(t), C_3(t), \ldots, C_n(t)\right) + \ldots + \det\left(C_1(t), C_2(t), C_3(t), \ldots, C_n'(t)\right)$$

Exercice 25. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 + x & x & \ldots & \ldots & x \\ x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ x & \ldots & \ldots & x & a_n + x \end{pmatrix}$$

Exercice 26. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(I_n + t\,A) \end{array} \right.$$

Démontrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $\varphi'(0)$.

2.5. Ccomposition d'une fonction numérique dérivable par une fonction vectorielle dérivable

Proposition 27. — *Soient $f \in \mathcal{D}(I, E)$, J un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(J, \mathbf{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors l'application $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et*

$$\forall\, t \in J \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$$

3. Fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$

3.1. Définition d'une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 28. — *Soit $f \in E^I$.*

1. *L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.*
2. *Soit un entier $k \geqslant 2$. L'application f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I.*
3. *L'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.*

Notation. — Pour tout $k \in [\![1, +\infty]\!]$, on pose

$$\mathcal{C}^k(I, E) := \left\{ f \in E^I \ : \ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \right\}$$

et pour tout $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$

$$f^{(2)} = (f')' \quad , \quad f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)' \quad , \quad \ldots \quad , \quad f^{(\ell+1)} = \left(f^{(\ell)}\right)' \quad , \quad \ldots \quad , \quad f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

3.2. Caractère $\mathcal{C}^k$ d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées

Proposition 29. — *Soient $f \in E^I$ et $k \in [\![1, +\infty]\!]$.*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^* \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{K})$.*
2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I alors*

$$\forall\, \ell \in [\![1, k]\!] \quad \forall\, t \in I \quad f^{(\ell)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(e_i^* \circ f\right)^{(\ell)}(t)}_{\textit{scalaire}} \cdot e_i$$

Exercice 30. — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\sin(t) + \sin(2t))\ ,\ -2\cos(t) - \cos(2t)) \end{array} \right.$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 2\pi]$ et calculer sa dérivée seconde.

3.3. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles dérivables de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 31. — *Pour tout $k \in [\![1, +\infty]\!]$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de E^I.*

3.4. Formule de Leibniz pour les fonctions vectorielles

Proposition 32. — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$, $(G, ||\cdot||_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $B\colon E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $k \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^k(I, F)$, où $k \in \mathbf{N}^*$. L'application*

$$B(f, g) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\left(f(t), g(t)\right) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :

$$\forall\, t \in I \quad B(f, g)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t)\right)$$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $k \in \mathbf{N}^*$.

- *Initialisation à $n = 1$.* Il s'agit précisément du résultat de la proposition 19.
- *Hérédité.* Supposons le résultat vrai pour un $k \in \mathbf{N}^*$ fixé et démontrons qu'il est encore vrai pour $k+1$. Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E) \times \mathcal{C}^{k+1}(I, F)$. Alors, comme $(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, E) \times \mathcal{C}^k(I, F)$, l'hypothèse de récurrence assure que $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\forall\, t \in I \quad B(f, g)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t)\right). \tag{1}$$

  Soit $i \in [\![0, k]\!]$. Les fonctions $f^{(i)}$ et $g^{(k-i)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. D'après la proposition 19, la fonction $B\left(f^{(i)}, g^{(k-i)}\right)$ est donc également de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
  La fonction $[B(f, g)]^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I.
  Grâce à (1) et à la proposition 19, nous calculons, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
B(f, g)^{(k+1)}(t) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left[B\left(f^{(i+1)}(t), g^{(k-i)}(t)\right) + B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k}{j-1} \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right) \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \qquad \text{[relation de Pascal]}
\end{aligned}$$

□

4. Fonctions vectorielles continues par morceaux sur un segment

Notation. — $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbf{R}$ ($a<b$).

4.1. Définition d'une fonction vectorielle continue par morceaux

Définition 33. — *Une fonction $f \in E^{[a,b]}$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision*

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_p = b$$

du segment $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i,a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a_i,a_{i+1}]$.

4.2. Continue par morceaux d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées

Proposition 34. — *Une fonction $f \in E^{[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^* \circ f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$.*

4.3. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles continues par morceaux

Proposition 35. — *L'ensemble*

$$\mathcal{CM}([a,b],E) := \left\{ f \in E^{[a,b]} \;:\; f \text{ est continue par morceaux sur } [a,b] \right\}$$

un sous-espace vectoriel de $E^{[a,b]}$.

Remarque 36. — Soient c,d des éléments de $[a,b]$ tels que $c<d$. et $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. Alors

$$f_{|[c,d]} \left| \begin{array}{ccc} [c,d] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[c,d]$.

5. Intégration d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment

Notation. — $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbf{R}$ ($a<b$).

5.1. Lemme clé pour la définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle c.p.m. sur un segment

Lemme 37. — *Soient $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$, $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$, $\underline{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ deux bases de E et $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$, $(u_1^*,\ldots,u_n^*)$ leurs bases duales. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b e_i^* \circ f(t)\ \mathrm{d}t\right)}_{\text{élément de } \mathbf{K}} \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b u_i^* \circ f(t)\ \mathrm{d}t\right)}_{\text{élément de } \mathbf{K}} \cdot u_i$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b e_i^* \circ f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u_i^* \circ f(t)\ \mathrm{d}t$ sont les intégrales des fonctions $e_i^* \circ f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbf{R})$ et $u_i^* \circ f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbf{R})$, construites en MP2I.

Démonstration. Nous démontrons l'égalité entre

$$I_{\underline{e}}(f) := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \circ f(t)\ \mathrm{d}t\right) \cdot e_i \qquad \text{et} \qquad I_{\underline{u}}(f) := \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b u_j^* \circ f(t)\ \mathrm{d}t\right) \cdot u_j$$

$$\begin{aligned} I_{\underline{e}}(f) &:= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^*(f(t))\ \mathrm{d}t\right) \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^*(f(t)) \cdot u_j\right)\ \mathrm{d}t\right) \cdot e_i \qquad \text{[décomposition du vecteur } f(t) \text{ dans la base } \underline{u}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^*(f(t)) \times_{\mathbf{K}} e_i^*(u_j) \right) \,\mathrm{d}t \right) \cdot e_i && [\text{linéarité de } e_i^*] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(e_i^*(u_j) \times_{\mathbf{K}} \int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \cdot e_i && [\text{linéarité de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \times_{\mathbf{K}} e_i^*(u_j) \right) \cdot e_i && [\text{commutativité de la multiplication dans } \mathbf{K}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u_j) \cdot e_j \right) && [\text{axiome de la structure d'espace vectoriel}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \cdot u_j && [\text{décomposition du vecteur } u_j \text{ dans la base } \underline{e}] \\
&=: I_{\underline{u}}(f)
\end{aligned}
$$

□

5.2. Définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment

Définition 38. — *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le vecteur de E défini par*

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \circ f(t) \,\mathrm{d}t \right) \cdot e_i$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b e_i^* \circ f(t) \,\mathrm{d}t$ est l'intégrale de la fonction $e_i^* \circ f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbf{R})$, construite en MP2I.

Remarque 39. — D'après le lemme 37, la définition 38 de l'intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment à valeurs dans E est indépendante de la base de E choisie. Elle est donc intrinsèque à la fonction vectorielle.

Exercice 40. — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{4-t^2}, \dfrac{1}{1+t^2} \right) \end{array} \right.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t$.

5.3. Sommes de Riemann pour une fonction vectorielle continue par morceaux

Théorème 41. — *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$.*

$$\underbrace{\frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right)}_{=:S_N^g(f)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad \underbrace{\frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right)}_{=:S_N^d(f)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Nous démontrons le résultat pour la suite $(S_N^g(f))_{N\in\mathbf{N}^*}$ des sommes de Riemann à gauche.

(a) Notons tout d'abord que nous connaissons le résultat pour $E = \mathbf{R}$, d'après le cours de MP2I.

(b) Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$

$$
\begin{aligned}
S_N^g &= \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \\
&= \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right)\right) \cdot e_i && \left[\text{décomposition de } f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \text{ dans la base } \underline{e}\right] \\
&= \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} e_i^* \circ f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \cdot e_i
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} \cdot e_i^* \circ f \left(a + k\, \frac{b-a}{N} \right) \right) \cdot e_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} S_N^g \left(e_i^* \circ f \right) \cdot e_i$$

(c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $e_i^* \circ f \in \mathcal{CM}\left([a,b], \mathbf{R}\right)$, nous savons que

$$S_N^g \left(e_i^* \circ f \right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_a^b e_i^* \circ f(t) \ \mathrm{d}t \qquad \text{[cours de MP2I]}$$

(d) L'application :

$$N_{\underline{e}} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \max \left\{ |e_i^*(x)| \ : \ [\![1, n]\!] \right\} \end{array} \right.$$

est une norme (norme produit relativement à la base $\underline{e}$). De plus, si $(x_N)_{N \in \mathbf{N}^*} \in E^{\mathbf{N}^*}$ et $x \in E$

$$x_N \xrightarrow[N \to +\infty]{N_{\underline{e}}} x \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad e_i^*(x_N) \xrightarrow[N \to +\infty]{\mathbf{R}} e_i^*(x) \right)$$

(e) De (b), (c) et (d), nous déduisons

$$S_N^g = \sum_{i=1}^{n} S_N^g \left(e_i^* \circ f \right) \cdot e_i \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \circ f(t) \ \mathrm{d}t \right) \cdot e_i = \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$$

□

5.4. Propriétés de l'intégrale des fonctions vectorielles continues par morceaux

Théorème 42. —

1. *Linéarité.*

$$\forall\, (f, g) \in \mathcal{CM}\left([a,b], E\right)^2 \quad \forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \int_a^b \lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t) \ \mathrm{d}t = \lambda \cdot \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t + \mu \cdot \int_a^b d(t) \ \mathrm{d}t$$

2. *Relation de Chasles.*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{CM}\left([a,b], E\right) \quad \forall\, c \in [a,b] \quad \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t) \ \mathrm{d}t$$

3. *Composée par une application linéaire. Soit $(F, ||\cdot||_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $f \in \mathcal{CM}\left([a,b], E\right)$, $L \circ f \in \mathcal{CM}\left([a,b], F\right)$ et*

$$L \left(\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t \right) = \int_a^b L \circ f(t) \ \mathrm{d}t$$

4. *Inégalité triangulaire. Soient $||\cdot||$ une norme quelconque sur E et $f \in \mathcal{CM}\left([a,b], E\right)$. Alors l'application*

$$\left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & ||\, f(t)\, || \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[a,b]$ et

$$\left|\left| \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t \right|\right| \leqslant \int_a^b ||\, f(t)\, || \ \mathrm{d}t$$

6. Intégrale fonction de sa borne supérieure

6.1. Théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions vectorielles continues

Lemme 43. — *Soit $f \in \mathcal{D}(I, E)$ telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) = 0_E$. Alors la fonction f est constante sur l'intervalle I.*

Théorème 44. — *Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et $a \in I$. L'application*

$$F_a \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique fonction de I dans E telle que

1. *la fonction F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
2. *$F_a' = f$;*
3. *$F_a(a) = 0_E$.*

Démonstration. L'assertion 3 est claire. Comme f est continue sur I, il suffit de démontrer que F_a est dérivable sur I avec comme fonction dérivée f, pour établir les assertions 1 et 2.

(a) Nous démontrons tout d'abord que la fonction F_a est dérivable au point a, avec $f(a)$ comme vecteur dérivé en ce point, i.e.

$$\frac{F_a(x) - F_a(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f est continue en a

$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in I \quad |x - a| \leqslant r \implies ||\, f(x) - f(a)\, || \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant r$. Nous calculons

$$\frac{F_a(x) - F_a(a)}{x - a} - f(a) = \frac{F_a(x)}{x - a} - \frac{1}{x - a} \int_a^x f(a)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x - a} \int_a^x f(t) - f(a)\ \mathrm{d}t$$

puis appliquons le changement de variable affine $u = \dfrac{t - a}{x - a}$ pour obtenir

$$\frac{F_a(x) - F_a(a)}{x - a} - f(a) = \int_0^1 f(a + (x - a)\, u) - f(a)\ \mathrm{d}u$$

L'inégalité triangulaire livre alors

$$\left|\left| \frac{F_a(x) - F_a(a)}{x - a} - f(a) \right|\right| \leqslant \int_0^1 ||\, f(a + (x - a)\, u) - f(a)\, ||\ \mathrm{d}u \tag{3}$$

Comme, pour tout $u \in [0, 1]$

$$|a + (x - a)\, u - a| = u\ |x - a| \leqslant |x - a| \leqslant r$$

nous déduisons de (2) et (3) que

$$\left|\left| \frac{F_a(x) - F_a(a)}{x - a} - f(a) \right|\right| \leqslant \varepsilon$$

Nous avons établi que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in I \setminus \{a\} \quad |x - a| \leqslant r \implies \left|\left| \frac{F_a(x) - F_a(a)}{x - a} - f(a) \right|\right| \leqslant \varepsilon$$

(b) Soit $x_0 \in I$. Le résultat (a) a été établi pour un point a quelconque de I. Il vaut donc en particulier au point x_0, i.e. la fonction F_{x_0} est dérivable au point x_0 et $F_{x_0}'(x_0) = f(x_0)$.

(c) D'après la relation de Chasles

$$\forall\, x \in I \quad F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{constante}} + F_{x_0}(x)$$

Nous déduisons alors de (b) que la fonction F_a est dérivable en x_0, avec $F_a'(x_0) = F_{x_0}'(x_0) = f(x_0)$.

□

6.2. Théorème d'intégration par parties pour les fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 45. — *Soient $(F \,||\cdot||_F)$, $(G \,||\cdot||_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $B\colon E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire et $(f,g)\in\mathcal{C}^1([a,b],E)\times\mathcal{C}^1([a,b],F)$. Alors*

$$\int_a^b B(f'(t),g(t))\ \mathrm{d}t = B(f(b),g(b)) - B(f(a),g(a)) - \int_a^b B(f(t),g'(t))\ \mathrm{d}t$$

6.3. Inégalité des accroissements finis pour une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment

Théorème 46. — *Soit $f\in\mathcal{C}^1(I,E)$. Alors*

$$\forall\,(a,b)\in I^2 \qquad ||\,f(b)-f(a)\,||_E \leqslant |b-a| \times ||\,f'\,||_{\infty,[a,b]}$$

L'égalité accroissements finis n'est pas nécessairement valable pour les fonctions à valeurs vectorielles. En effet, l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $t\in[0,2\pi]$, $f'(t) = i\ e^{it}$ est de module 1. Il n'existe donc aucun point $c\in]0,2\pi[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi-0} = 0$$

Exercice 47. — Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R},E)$ telle que f' est bornée sur $\mathbf{R}$. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne.

7. Formules de Taylor

7.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 48. — *Soient $p\in\mathbf{N}$ et $f\in\mathcal{C}^{p+1}(I,E)$. Alors :*

$$\forall\,(a,x)\in I^2,\quad f(x) = \sum_{k=0}^{p}(x-a)^k\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!}\cdot f^{(p+1)}(t)\ \mathrm{d}t}_{=:R_p(f,a,x)}.$$

Le vecteur $R_p(f,a,x)$ de E est appelé reste intégral.

7.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Corollaire 49. — *Soient $p\in\mathbf{N}$ et $f\in\mathcal{C}^{p+1}(I,E)$ telle que*

$$\exists\,M\in\mathbf{R}_+\quad \forall\,t\in I\qquad \left|\left|\,f^{(p+1)}(t)\,\right|\right| \leqslant M$$

Alors :

$$\forall\,(a,x)\in I^2\qquad \underbrace{\left|\left|\,f(x)-\left(\sum_{k=0}^{p}(x-a)^k\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right)\right|\right|}_{=||\,R_p(f,a,x)\,||} \leqslant M\times\frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Exercice 50. — Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbf{R},E)$ telle que les fonctions f et f'' soient bornées. On pose

$$M_0 := ||\,f\,||_\infty \qquad\text{et}\qquad M_2 := ||\,f''\,||_\infty$$

1. Démontrer que

$$\forall\,(x,h)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^*\qquad ||\,f'(x)\,|| \leqslant \frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$$

2. Qu'en déduire pour f' ?
3. Démontrer

$$||\,f'\,||_\infty =: M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2} \qquad \text{[inégalité de Kolmogorov]}$$

7.3. Formule de Taylor-Young

Corollaire 51. — *Soient $p\in\mathbf{N}$, $f\in\mathcal{C}^p(I,E)$ et $a\in I$. Alors*

$$f(t) \underset{t\to a}{=} \sum_{k=0}^{p}(t-a)^k\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \mathrm{o}\left((t-a)^p\right)$$