Espaces vectoriels normés 3

Notation. — Dans ce chapitre, n, p sont des entiers naturels non nuls et $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Applications linéaires continues

1.1. Caractérisation des applications linéaires continues

Théorème 1. — *Soient $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ des espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les cinq assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application u est continue sur E.*
2. *L'application u est continue en 0.*
3. *La restriction de u à la boule unité fermée est bornée.*
4. $\exists C > 0 \quad \forall x \in E \quad ||u(x)||_F \leqslant C\, ||x||_E$
5. *L'application u est lipschitzienne.*

En pratique, pour démontrer que l'application linéaire $u\colon (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$ est continue, on pourra considérer un vecteur x de E et chercher une constante réelle C, indépendante de x, telle que

$$||u(x)||_F \leqslant C\, ||x||_E$$

Exemple 2. — Toute application linéaire

$$u\colon (\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathbf{K}^p, ||\cdot||_\infty)$$

est continue. En effet, si nous notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, alors, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$

$$||u(x)||_\infty = \left|\left| \sum_{i=1}^n x_i\, u(e_i) \right|\right|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leqslant ||x||_\infty} ||u(e_i)||_\infty \leqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n ||u(e_i)||_\infty \right)}_{\text{constante indépendante de } x} ||x||_\infty$$

Exemple 3. — Soient $\langle \cdot , \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, de norme associée $||\cdot||$, et $x \in E$ fixé. l'application

$$\langle x , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} (E, ||\cdot||) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ y & \longmapsto & \langle x , y \rangle \end{array} \right.$$

est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in E$

$$|\langle x\,,\ \cdot\ \rangle(y)| = |\langle x\,,\, y\rangle| \leqslant \underbrace{||\,x\,||}_{\text{constante indépendante de } y}\ ||\,y\,||$$

Exemple 4. — L'application

$$\mathrm{Eval}_2 \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}[X], ||\cdot||_1) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ P & \longmapsto & P(2) \end{array} \right.$$

n'est pas continue car elle n'est pas bornée sur la boule unité fermée de $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_1)$. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X^n \in S(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$ et $\mathrm{Eval}_2(X^n) = 2^n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 5. — Démontrer que l'application linéaire

$$\mathrm{Eval}_0 \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

est continue si l'on munit $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$, mais discontinue si l'on munit $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_1$.

En pratique, pour démontrer que l'application linéaire $u\colon (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$ n'est pas continue, on pourra chercher une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_E} 0_E \qquad \text{et} \qquad u(x_n) \underset{n\to+\infty}{\overset{N_F}{\not\longrightarrow}} u(0_E) = 0_F$$

On aura ainsi établi la négation du critère séquentiel de continuité de u en 0_E.

Exercice 6. — Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbf{K}$ une forme linéaire non nulle.

1. Démontrer que le noyau de φ est soit fermé dans E, soit dense dans E.
2. Démontrer que l'application φ est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f)$ est une partie fermée de $(E, ||\cdot||)$.

1.2. Opérations sur les applications linéaires continues

Notation. — Si $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, on pose

$$\mathcal{L}_c(E,F) := \left\{ f \in F^E \ :\ \text{l'application } f \text{ est linéaire et continue} \right\} = \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{C}^0(E,F)$$

Théorème 7. — *Soient $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$, $(G, ||\cdot||_G)$ trois espaces vectoriels normés.*

1. *Pour tout $u, v \in \mathcal{L}_c(E,F)$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\lambda\, u + \mu\, v \in \mathcal{L}_c(E,F)$.*
2. *Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, pour tout $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E,G)$.*

1.3. Norme subordonnée d'une application linéaire continue

Proposition 8. — *Soient $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On appelle norme subordonnée de u à $||\cdot||_E$ et $||\cdot||_F$ le nombre réel*

$$|||\,u\,||| := \sup\left\{ ||\,u(x)\,||_F \ :\ x \in E \ \textit{et}\ ||\,x\,||_E \leqslant 1 \right\}$$

L'application

$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E,F) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ u & \longmapsto & |||\,u\,||| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Remarque 9. — En conservant les notations de la proposition 8 et en supposant $E \neq \{0_E\}$, nous avons

$$|||\,u\,||| := \sup_{x \in \overline{B(0_E,1)}} ||\,u(x)\,||_F = \sup_{x \in S(0_E,1)} ||\,u(x)\,||_F \qquad \text{[définition alternative de la norme subordonnée]}$$

Exercice 10. — Calculer la norme subordonnée de l'application linéaire continue

$$u \left| \begin{array}{ccc} \left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty\right) & \longrightarrow & \left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty\right) \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, 3x+4y) \end{array} \right.$$

et généraliser.

Exercice 11. — Démontrer que l'application

$$\mathrm{Eval}_0 \left| \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty\right) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\,.\,|) \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

est linéaire et calculer $|||\,\mathrm{Eval}_0\,|||$.

Exercice 12. — Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sa matrice dans la base canonique.

1. Démontrer que l'application linéaire $u\colon (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ est continue et calculer sa norme subordonnée.
2. Démontrer que l'application linéaire $u\colon (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_1) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_1)$ est continue et calculer sa norme subordonnée.

1.4. Inégalités pour les normes subordonnées d'applications linéaires continues

Proposition 13. — *Soient $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés.*

$$\forall\, u \in \mathcal{L}_c(E,F) \quad \forall x \in E \quad ||\,u(x)\,||_F \leqslant |||\,u\,|||\ ||\,x\,||_E$$

La norme subordonnée $|||\,u\,|||$ d'une application linéaire $u\colon (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F)$ peut être vue comme « la meilleure constante de Lipschitz » pour l'application u.

Théorème 14. — *Soient $(E, ||\cdot||_E)$ un espace vectoriel normé.*

$$\forall\,(u,v) \in \mathcal{L}_c(E)^2 \quad |||\,u\circ v\,||| \leqslant |||\,u\,|||\ |||\,v\,||| \qquad [\textit{sous-multiplicativité de la norme } ||\cdot||]$$

1.5. Applications multilinéaires continues

Proposition 15. — *caractérisation des applications bilinéaires continues Soient $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$, $(G, ||\cdot||_G)$ trois espaces vectoriels normés et $B\colon E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. L'application B est continue si et seulement si*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\,(x,y) \in E\times F \quad ||\,B(x,y)\,||_G \leqslant C\ ||\,x\,||_E\ ||\,y\,||_F$$

Démonstration. Rappelons que la norme placée sur $E\times F$ est la norme produit $||\cdot||$, définie par

$$\forall\,(x,y) \in E\times F, \quad ||\,(x,y)\,|| := \max\left(||\,x\,||_E\,, ||\,y\,||_F\right)$$

Procédons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons l'application B continue. Alors B est continue en tout point de $E\times F$, en particulier continue au point $(0_E, 0_F)$. Remarquons que, B étant bilinéaire, $B(0_E, 0_F) = 0_G$. Dans la définition de la continuité de B en $(0_E, 0_F)$, nous spécifions ε à $1 > 0$ pour obtenir qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in E\times F$

$$\underbrace{||\,(x,y)\,|| \leqslant \alpha}_{||\,(x,y)-(0_E,0_F)\,|| \leqslant \alpha} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{||\,B(x,y)\,||_G \leqslant 1}_{||\,B(x,y)-B(0_E,0_F)\,||_G \leqslant 1}$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties suivant que les vecteurs x et y s'annulent ou non.

- Soient x un vecteur de E non nul et y un vecteur de F non nul. Alors le vecteur $\left(\dfrac{\alpha}{||\,x\,||_E}\,x\,,\ \dfrac{\alpha}{||\,y\,||_F}\,y\right)$ de $E\times F$ a une norme $||\cdot||$ égale à α. Donc

$$\left|\left|\,B\left(\frac{\alpha}{||\,x\,||_E}\,x\,,\ \frac{\alpha}{||\,y\,||_F}\,y\right)\right|\right|_G \leqslant 1$$

En utilisant la bilinéarité de B, l'homogénéité de la norme $||\cdot||_G$ et le fait que α, $||\,x\,||_E$ et $||\,y\,||_F$ sont strictement positifs, nous en déduisons

$$||\,B(x,y)\,||_G \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\ ||\,x\,||_E\ ||\,y\,||_F \tag{1}$$

- Si $(x, y) \in E \times F$ est tel que $x = 0_E$ ou $y = 0_F$, alors la bilinéarité de B livre $B(x, y) = 0_G$. L'inégalité (1) s'étend donc à tous les vecteurs (x, y) de $E \times F$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \|\, B(x, y) \,\|_G \leqslant C \,\|\, x \,\|_E \,\|\, y \,\|_F$$

Soient $(x, y) \in E \times F$. Démontrons que B est continue en (x, y), en appliquant le critère séquentiel de continuité. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $E \times F$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\|\cdot\|} (x, y)$$

D'après le cours sur les convergences des suites dans un espace produit

$$x_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\|\cdot\|_E} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\|\cdot\|_F} y$$

Soient $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\|\, B(x_n, y_n) - B(x, y) \,\|_G &\leqslant \|\, B(x_n, y_n) - B(x_n, y) \,\|_G + \|\, B(x_n, y) - B(x, y) \,\|_G \qquad \text{[inégalité triangulaire]} \\
&= \|\, B(x_n, y_n - y) \,\|_G + \|\, B(x_n - x, y) \,\|_G \qquad [B \text{ est bilinéaire}] \\
&\leqslant C \,\|\, x_n \,\|_E \,\|\, y_n - y \,\|_F + C \,\|\, x_n - x \,\|_E \,\|\, y \,\|_F \qquad \text{[cf. hypothèse]}
\end{aligned}$$

Comme toute norme est continue (puisque 1-lipschitzienne d'après la seconde inégalité triangulaire)

$$C \,\|\, x_n \,\|_E \,\|\, y_n - y \,\|_F + C \,\|\, x_n - x \,\|_E \,\|\, y \,\|_F \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\mathbf{R}} C \times \|\, x \,\|_E \times 0 + C \times 0 \times \|\, y \,\|_F = 0$$

D'après le théorème d'encadrement, $\|\, B(x_n, y_n) - B(x, y) \,\|_G \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, i.e. $B(x_n, y_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\|\cdot\|_G} B(x, y)$.

□

Exemple 16. — Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x \,,\, y \rangle| \leqslant \|\, x \,\|\, \|\, y \,\|$$

L'application bilinéaire

$$\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} (E, \|\cdot\|) \times (E, \|\cdot\|) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \,,\, y \rangle \end{array} \right.$$

est donc continue.

Proposition 17. — *Soient un entier $p \geqslant 2$, $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right), \ldots, \left(E_p, \|\cdot\|_{E_p}\right)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés et :*

$$f \colon E_1 \times \ldots \times E_p \longrightarrow F$$

une application multilinéaire. L'application f est continue si et seulement si

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p \quad \|\, f(x_1, \ldots, x_p) \,\|_F \leqslant C \,\|\, x_1 \,\|_{E_1} \ldots \|\, x_p \,\|_{E_p}$$

Exercice 18. — Démontrer que l'application

$$\det \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array} \right.$$

est continue.

2. Comparaison de normes

Notation. — La lettre E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

2.1. Définition de deux normes équivalentes

Définition 19. — *Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est équivalente à N_2 si*

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}_{>0}\times\mathbf{R}_{>0}\quad\forall x\in E\quad \alpha\,N_1(x)\leqslant N_2(x)\leqslant\beta\,N_1(x)$$

Proposition 20. — *La relation $\mathcal{R}$, définie sur l'ensemble des normes sur E par, pour toutes normes N_1 et N_2 sur E*

$$N_1\,\mathcal{R}\,N_2\quad :\Longleftrightarrow\quad N_1 \text{ est équivalente à } N_2$$

est une relation d'équivalence.

Exemple 21. — On considère les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ définies précédemment sur $\mathbf{R}^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. *Comparaison des normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sur $\mathbf{R}^n$.* Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$. Nous calculons :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2=\sum_{i=1}^n x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i|\;|x_j|\geqslant\sum_{i=1}^n x_i^2$$

   et en déduisons que $||\,x\,||_2\leqslant||\,x\,||_1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$

$$||\,x\,||_1:=\sum_{i=1}^n|x_i|=\sum_{i=1}^n|x_i|\times 1=\langle\,(|x_1|,\dots,|x_n|)\ ,\ (1,\dots,1)\,\rangle\leqslant||\,x\,||_2\cdot||\,(1,\dots,1)\,||_2=\sqrt{n}\ ||\,x\,||_2$$

   Ainsi

$$||\cdot||_2\leqslant||\cdot||_1\leqslant\sqrt{n}\ ||\cdot||_2\qquad\text{[inégalités optimales]}$$

   Les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont donc équivalentes sur $\mathbf{R}^n$.

2. *Comparaison des normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$.* Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$0\leqslant|x_i|\leqslant||\,x\,||_\infty$$

   et donc

$$||\,x\,||_\infty\leqslant\sum_{i=1}^n|x_i|\leqslant n\ ||\,x\,||_\infty$$

   Ainsi

$$||\cdot||_\infty\leqslant||\cdot||_1\leqslant n\ ||\cdot||_\infty\qquad\text{[inégalités optimales]}$$

   Les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ sont donc équivalentes sur $\mathbf{R}^n$.

3. *Comparaison des normes $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$.* Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$0\leqslant x_i^2\leqslant||\,x\,||_\infty^2$$

   et donc

$$||\,x\,||_\infty^2\leqslant\sum_{i=1}^n x_i^2\leqslant n\ ||\,x\,||_\infty^2$$

   Ainsi

$$||\cdot||_\infty\leqslant||\cdot||_2\leqslant\sqrt{n}\ ||\cdot||_\infty\qquad\text{[inégalités optimales]}$$

   Les normes $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont donc équivalentes sur $\mathbf{R}^n$, ce que l'on pouvait déduire des points 1 et 2.

2.2. Caractérisation séquentielle de l'équivalence de deux normes

Notation. — Les lettres N_1 et N_2 désignent deux normes sur E.

Théorème 22. — *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\exists\,\alpha\in\mathbf{R}_{>0}\quad\forall\,x\in E\quad N_2(x)\leqslant\alpha\,N_1(x)$
2. *L'application*

$$\mathrm{id}_E\ \left|\ \begin{array}{ccc}(E,N_1)&\longrightarrow&(E,N_2)\\ x&\longmapsto&x\end{array}\right.$$

   est continue.
3. *Toute suite d'éléments de E qui converge vers 0_E au sens de N_1, converge vers 0_E au sens de N_2.*

Corollaire 23. — *Les normes N_1 et N_2 sont équvalentes si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in N}$ de E :*

$$(u_n)_{n\in N} \text{ converge vers } 0_E \text{ au sens de } N_1 \iff (u_n)_{n\in N} \text{ converge vers } 0_E \text{ au sens de } N_2.$$

Ce corollaire peut être utilisé pour démontré que deux normes sur un même espace vectoriel ne sont pas équivalentes.

Exercice 24. — Démontrer que sur $\mathbf{R}[X]$:

1. les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ ne sont pas équivalentes ;
2. les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
3. les normes $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 25. — Soient a et b des réels tels que $a<b$. Démontrer que sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$:

1. les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ ne sont pas équivalentes ;
2. les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
3. les normes $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2.3. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente

Notation. — Les lettres N_1 et N_2 désignent deux normes sur E.

Théorème 26. — *On suppose que*

$$\exists\, \alpha \in \mathbf{R}_{>0} \quad \forall x \in E \quad N_2(x) \leqslant \alpha\, N_1(x)$$

et on considère une partie A de E.

1. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, pour tout $\ell \in \mathbf{R}$*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell \quad \Longrightarrow \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} \ell$$

2. *Si A est ouverte pour la norme N_2 alors elle est ouverte pour la norme N_1.*
3. *Si A est fermée pour la norme N_2 alors elle est fermée pour la norme N_1.*
4. *Si A est bornée pour la norme N_1 alors elle est bornée pour la norme N_2.*
5. *Si A est compacte pour la norme N_1 alors elle est compacte pour la norme N_2.*
6. *L'adhérence de A pour la norme N_1 est incluse dans l'adhérence de A pour la norme N_2.*
7. *L'intérieur de A pour la norme N_2 est incluse dans l'intérieur de A pour la norme N_1.*

Corollaire 27. — *On suppose que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes et on considère une partie A de E.*

1. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, pour tout $\ell \in \mathbf{R}$*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} \ell$$

2. *La partie A est ouverte pour la norme N_1 si et seulement si elle est ouverte pour la norme N_2.*
3. *La partie A est fermée pour la norme N_1 si et seulement si elle est fermée pour la norme N_2.*
4. *La partie A est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2.*
5. *La partie A est compacte pour la norme N_1 si et seulement si elle est compacte pour la norme N_2.*
6. *L'adhérence de A pour la norme N_1 coïncide avec l'adhérence de A pour la norme N_2.*
7. *La partie A est dense dans E pour la norme N_1 si et seulement si elle est dense dans E pour la norme N_2.*
8. *L'intérieur de A pour la norme N_1 coïncide avec l'intérieur de A pour la norme N_2.*
9. *La frontière de A pour la norme N_1 coïncide avec la frontière de A pour la norme N_2.*

Pour étudier une propriété topologique sur un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||_E)$, on peut donc remplacer la norme $||\cdot||_E$ par une autre norme sur E qui est équivalente à $||\cdot||_E$.

Corollaire 28. — *Soient F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $||\cdot||_E\,, N_E$ deux normes équivalentes sur E, $||\cdot||_F\,, N_F$ deux normes équivalentes sur F et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Alors*

$$f\colon (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F) \text{ est continue} \quad \Longleftrightarrow \quad f\colon (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F) \text{ est continue}$$

3. Espaces vectoriels normés de dimension finie

3.1. Équivalence des normes sur un espace de dimension finie

Théorème 29. — *Toutes les normes sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

Démonstration. Cf. exercice 9 de la feuille d'exercices « Espaces vectoriels normés 2 ». □

3.2. Caractère intrinsèque des notions topologiques sur un espace de dimension finie

Corollaire 30. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.*

1. *La convergence d'une suite de vecteurs de E, ainsi que sa limite éventuelle, ne dépendent pas de la norme placée sur E.*
2. *La notion de partie ouverte de E ne dépend pas de la norme placée sur E.*
3. *La notion de partie fermée de E ne dépend pas de la norme placée sur E.*
4. *La notion de partie bornée de E ne dépend pas de la norme placée sur E.*
5. *La notion de partie compacte de E ne dépend pas de la norme placée sur E.*
6. *La notion d'adhérence d'une partie de E ne dépend pas de la norme placée sur E.*
7. *La notion de partie dense dans E ne dépend pas de la norme placée sur E.*
8. *La notion d'intérieur d'une partie de E ne dépend pas de la norme placée sur E.*
9. *La notion de frontière d'une partie de E ne dépend pas de la norme placée sur E.*

Remarque 31. — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors

$$N_{\mathcal{B}} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i & \longmapsto & \displaystyle\max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \end{array} \right.$$

   est une norme sur E. Aussi existe-t-il une norme sur E.

2. Puisque les propriétés topologiques de E ne dépendent pas de la norme placée sur E, on n'indique généralement pas quelle norme on considère sur E. Par exemple, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E converge vers un vecteur ℓ de E, on note

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{E} \ell \qquad \text{[sans mentionner de norme]}$$

> Pour étudier une propriété topologique sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, on peut considérer la norme de notre choix sur E. Cette souplesse est parfois commode, à condition d'avoir une certaine culture des normes existantes, sur des espaces de dimension finie par exemple.

Corollaire 32. — *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. La continuité d'une application de E vers F ne dépend pas des normes placées sur E et F.*

3.3. Convergence des suites dans un espace de dimension finie

Notation. — On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E et une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Proposition 33. — *Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on définit e_i^* comme étant l'unique forme linéaire sur E telle que*

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!] \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

i.e.

$$e_i^* \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j & \longmapsto & x_i \end{array} \right. \qquad [\textit{application } i\textit{-ème coordonnée dans la base } \mathcal{B}]$$

Alors $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$, appelée base duale de la base $\mathcal{B}$.

Proposition 34. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in E$.*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{E} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left(\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad e_i^*(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{K}} e_i^*(\ell)\right)}_{\textit{convergence coordonnée par coordonnée dans la base } \mathcal{B}}$$

3.4. Compacité dans un espace de dimension finie

Théorème 35. — *Soit A une partie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Alors*

$$A \text{ est compacte} \iff A \text{ est fermée et bornée.}$$

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On considère la norme N_∞ sur E définie par

$$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |e_i^*(x)| \end{array} \right.$$

Les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} (E, N_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty) \\ x & \longmapsto & (e_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (E, N_\infty) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\, e_i \end{array} \right.$$

sont des isométries réciproques d'une de l'autre. Elles sont en particuliers continues, puisque 1-lipschitziennes.
Soit A une partie fermée et bornée de E (pour toute norme sur E, en particulier pour la norme N_∞). Comme f est une isométrie, $f(A)$ est une partie fermée et bornée de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$. Nous savons alors que $f(A)$ est une partie compacte de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$ (cf. polycopié de cours « Espaces vectoriels normés 2 »). Nous en déduisons que

$$A = g(f(A))$$

est une partie compacte de (E, N_∞), comme image continue d'un compact. □

Exercice 36. — Démontrer que le groupe orthogonal

$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) := \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; A^\top A = I_n \right\}$$

et le groupe spécial orthogonal

$$\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) := \{ A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \;:\; \det(A) = 1 \}$$

sont des parties compactes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3.5. Suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence dans un espace de dimension finie

Théorème 37. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de vecteurs de E. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence dans E alors elle converge dans E.*

3.6. Caractère fermé d'un sous-espace de dimension finie

Théorème 38. — *Soient (E, N) un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé (non nécessairement de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors F est une partie fermée de E.*

Démonstration. Notons N_F la norme sur F induite par la norme N sur E, i.e.

$$N_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de F et x un vecteur de E tels que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} x \tag{2}$$

Nous démontrons que $x \in F$ (caractérisation séquentielle des fermés).
La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée, i.e.

$$\exists\, R > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \underbrace{N(x_n)}_{N_F(x_n)} \leqslant R$$

Ainsi

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad x_n \in \{ y \in F \;:\; N_F(y) \leqslant R \} = \overline{B_{N_F}(0, R)} \qquad \text{[boule fermée dans } F \text{ pour la norme } N_F]$$

Comme F est un espace de dimension finie, le théorème 35 nous livre que la partie $\overline{B_{N_F}(0,R)}$ est compacte (pour la norme N_F ou pour toute norme sur F). Il existe donc une application $\varphi \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $x_F \in F$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{N_F \text{ ou } N} x_F \tag{3}$$

Or (2) implique

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{N} x \tag{4}$$

De (3), (4) et de l'unicité de la limite, nous déduisons que $x = x_F \in F$.

□

Un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé (E,N) n'est pas nécessairement fermé. En effet, si $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, $N = ||\cdot||_1$ alors la forme linéaire non nulle

$$\mathrm{Eval}_0 \left| \begin{array}{ccc} (E,N) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

est discontinue (exercice 5). Ainsi $F := \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Eval}_0)$ est un hyperplan de E qui est dense dans E (exercice 6) donc non fermé dans E.

3.7. Applications linéaires entre deux espaces de dimension finie

Théorème 39. — *Toute application linéaire entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie est continue.*

Démonstration. Soient E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $(f_1,\ldots,f_m)$ une base de F. On considère les normes N_E sur E et N_F sur F définies par

$$N_E \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |e_i^*(x)| \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad N_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ y & \longmapsto & \max\limits_{i\in[\![1,m]\!]} \left|f_j^*(y)\right| \end{array} \right.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pout tout vecteur $x \in E$

$$N_F(u(x)) = N_F\left(u\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)\,e_i\right)\right) = N_F\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)\,u(e_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \underbrace{|e_i^*(x)|}_{\leqslant N_E(x)} N_F(u(e_i)) \leqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n N_F(u(e_i))\right)}_{\text{indépendant de } x} N_E(x)$$

L'application u est donc continue. □

Corollaire 40. — *Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie*

$$\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)\,.$$

3.8. Norme subordonnée d'une matrice carrée

Proposition 41. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $||\cdot||$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.*

1. *L'application*

$$\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

   est continue.

2. *On appelle norme subordonnée de A à la norme $||\cdot||$ le nombre réel*

$$|||\,A\,||| := |||\,\varphi_A\,||| := \sup\{||\,AX\,|| \;:\; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ et } ||\,X\,|| \leqslant 1\} = \sup\{||\,AX\,|| \;:\; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ et } ||\,X\,|| = 1\}$$

3. *L'application*

$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ A & \longmapsto & |||\,A\,||| \end{array} \right.$$

   est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3.9. Inégalités pour les normes subordonnées de matrices carrées

Corollaire 42. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $||\cdot||$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.*

1. $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad ||\, AX\, || \leqslant |||\, A\, |||\ ||\, X\, ||$
2. $\forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2 \quad |||\, AB\, ||| \leqslant |||\, A\, |||\ |||\, B\, |||$ [*sous-multiplicativité de la norme* $||\cdot||$]

Exercice 43. — Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\underbrace{\rho(M)}_{\text{rayon spectral}} := \max\{|\lambda| \ :\ \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(M)\} < 1$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$. Démontrer que

$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{|||\cdot|||} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$$

3.10. Continuité des applications polynomiales sur un espace de dimension finie

Théorème 44. — *Soient un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(a_{i_1,\ldots,i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbf{N}^n}$ une famille presque nulle d'éléments de $\mathbf{K}$. Alors l'application polynomiale*

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbf{N}^n} a_{i_1,\ldots,i_n}\, e_1^*(x)^{i_1}\, \ldots\, e_n^*(x)^{i_n} \end{array} \right.$$

est continue.

Démonstration. On s'appuie sur la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $x \in E$ et $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que

$$x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{E} x$$

D'après la proposition 33

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad e_i^*(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}} e_i^*(x)$$

Par théorème d'opérations sur les limites de suites convergentes dans $\mathbf{K}$

$$f(x_k) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbf{N}^n} a_{i_1,\ldots,i_n}\, e_1^*(x_k)^{i_1}\, \ldots\, e_n^*(x_k)^{i_n} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{K}} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbf{N}^n} a_{i_1,\ldots,i_n}\, e_1^*(x)^{i_1}\, \ldots\, e_n^*(x)^{i_n} = f(x)$$

$\square$

Corollaire 45. — *L'application déterminant*

$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, [A]_{1,\sigma(1)}\, \ldots\, [A]_{n,\sigma(n)} \end{array} \right.$$

est continue.

3.11. Applications multilinéaires sur un produit d'espaces de dimension finie

Théorème 46. — *Soient $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et si $(F, ||\cdot||)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, alors toute application multilinéaire $f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ est continue.*

Corollaire 47. — *L'application*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array} \right.$$

est continue.

Corollaire 48. — *Soient E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ (v,u) & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

est continue.