# Équations différentielles linéaires

*Acronymes.* — Pour simplifier l'exposé, nous introduisons trois acronymes.

- EDL1 : équation différentielle linéaire d'ordre 1
- SDL1 : système différentiel linéaire d'ordre 1
- EDLS$n$ : équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n$, où $n \geqslant 1$ est un entier

*Notation.* — Dans tout ce chapitre :

- $I$ désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$ ;
- $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ ;
- $E$ désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

## 1. Présentation des objets de l'étude

### 1.1. EDL1

***Exercice 1.*** — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad x' = \frac{1}{t}\, x + t^2 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(\,]0,+\infty[\,,\mathbf{R})$$

***Exercice 2.*** — On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad |t|\; x' + x = t^2$$

1. Résoudre $\mathcal{E}$ sur $]0,+\infty[$, puis sur $]-\infty,0[$.
2. Soit $x \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction solution de $\mathcal{E}$.
   (a) Que vaut $x(0)$ ?
   (b) Donner une expression de $x(t)$, pour tout $t > 0$, dans laquelle une constante réelle $k_1$ apparaît.
   (c) Donner une expression de $x(t)$, pour tout $t < 0$, dans laquelle une constante réelle $k_2$ apparaît.
   (d) En exploitant la continuité et la dérivabilité de $x$ en 0, ajuster les valeurs de $k_1$ et $k_2$.
3. Résoudre $\mathcal{E}$ sur $\mathbf{R}$, en prenant appui sur la question 2. On soignera la logique.

***Exercice 3.*** — Résoudre l'équation différentielle $x' = 0$ sur un intervalle $I$ de $\mathbf{R}$, puis sur $\mathbf{R}^*$ et enfin sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

**Définition 4.** — *Soient $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I,E)$.*

**(1) Équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL1).** *L'équation :*

$$(\mathcal{E}) \qquad x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I,E)$$

*est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

**(2) Équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 (EDL1 homogène).** *L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est dite homogène, si la fonction $b$ est nulle.*

**(3) Solution d'une EDL1.** *Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I,E)$ telle que :*

$$\forall\, t \in I \qquad x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

**(4) L'EDL1 homogène associée à une EDL1.** *L'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$ est :*

$$(\mathcal{EH}) \qquad x' = a(t) \cdot x \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I,E)$$

**(5) Problème de Cauchy associé à une EDL1.** *Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Le problème de Cauchy associé à $(\mathcal{E})$ avec condition initiale :*

$$(\mathrm{CI}) \qquad x(t_0) = x_0$$

*s'écrit :*

$$(\mathcal{PE}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I,E)$$

**(6) Solution d'un problème de Cauchy associé à une EDL1.** *Une solution de $(\mathcal{PE})$ est une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I,E)$ telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, t \in I \qquad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

*i.e. une solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant la condition* $(\mathrm{CI})$.

***Exemple 5.*** — Soient les applications :

$$a \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^3\right) \\ t & \longmapsto & a(t) \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u_1,u_2,u_3) & \longmapsto & \left(u_2, u_3, t u_1 + \operatorname{ch}(t)\, u_2 - t^2\, u_3\right) \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \text{et} \quad b \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ t & \longmapsto & (0,0,\arctan(t)) \end{array}\right.$$

L'équation :

$$(\mathcal{E}) \qquad x' = a(t)\cdot x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3\right)$$

est une EDL1.

***Remarque 6.*** — La définition 4 généralise celle d'EDL1 introduite en MP2I. En effet, considérons :

- $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ ;
- $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ ;
- l'EDL1 de MP2I :

$$(\mathcal{E}) \qquad x' = a(t)\, x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$$

Si l'on définit l'application $\widetilde{a}$ par :

$$\widetilde{a} \left| \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \widetilde{a}(t) \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ u & \longmapsto & a(t)\, u \end{array}\right. \end{array}\right.$$

alors :

$$(\widetilde{\mathcal{E}}) \qquad x' = \widetilde{a}(t)\cdot x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$$

est une EDL1 au sens de la définition 4. De plus, une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$ est solution de $(\widetilde{\mathcal{E}})$.

### 1.2. SDL1

**Définition 7.** — *Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.*

**(1) Système différentiel linéaire d'ordre 1 (SDL1).** *Le système :*

$$(\mathcal{S}) \qquad X' = A(t)\, X + B(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*est appelé système différentiel linéaire d'ordre 1.*

**(2) Système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 (SDL1 homogène).** *Le système différentiel $(\mathcal{S})$ est dit homogène, si la fonction vectorielle $B$ est nulle.*

**(3) Solution d'un SDL1.** *Une solution de $(\mathcal{S})$ est une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ telle que :*

$$\forall\, t \in I \qquad X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$$

**(4) Le SDL1 homogène associé à un SDL1.** *Le système différentiel homogène associé à $(\mathcal{S})$ est :*

$$(\mathcal{SH}) \qquad X' = A(t)\, X \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

**(5) Problème de Cauchy associé à un SDL1.** *Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le problème de Cauchy associé à $(\mathcal{S})$ avec condition initiale :*

$$(\mathrm{CI}) \quad X(t_0) = X_0$$

*s'écrit :*

$$(\mathcal{PS}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)\, X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

**(6) Solution d'un problème de Cauchy associé à une EDL1.** *Une solution de $(\mathcal{PS})$ est une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, t \in I \qquad X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

*i.e. une solution de $(\mathcal{S})$ vérifiant la condition* (CI).

***Remarque 8.*** — Considérons deux familles $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de fonctions continues sur $I$ à valeurs dans $\mathbf{K}$.

- Le système différentiel :
$$(\mathcal{S})\qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad , \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$
est un SDL1. En effet, une fonction vectorielle est continue si et seulement si chacune de ses fonctions composantes est continue.
- Une solution de $(\mathcal{S})$ est une fonction vectorielle $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$, telle que :
$$\forall t \in I \qquad \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}(t)\, x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)\, x_n(t) + b_1(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}(t)\, x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)\, x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

***Exemple 9.*** — Le système :
$$(\mathcal{S})\qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & \mathrm{ch}(t) & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \arctan(t) \end{pmatrix} \quad , \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}))$$
est un SDL1.

***Exercice 10.*** — Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. Démontrer que la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que la matrice $P^{-1}\, A\, P$ soit diagonale.
3. On considère le SDL1 homogène :
$$(\mathcal{S})\qquad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4\,x_1 + x_2 \end{cases} \quad , \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$$
Résoudre $(\mathcal{S})$ en considérant le changement de variable $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
4. Justifier que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$, noté $\mathit{Sol}\,(\mathcal{S})$, est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
5. Résoudre le problème de Cauchy :
$$(\mathcal{PS})\qquad \begin{cases} (\mathcal{S}) & \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4\,x_1 + x_2 \end{cases} \\ \\ \text{CI} & \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases} \end{cases} \quad , \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$$
associé à $(\mathcal{S})$
6. Soit $t_0$ un réel fixé. Démontrer que l'application :
$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathit{Sol}\,(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$
est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

### 1.3. EDLS$n$

***Exercice 11.*** — Résoudre l'équation :
$$(\mathcal{E})\qquad x'' = -4\,x' + 5\,x + 2\,e^t \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

***Exercice 12.*** — Résoudre l'équation :
$$(\mathcal{E})\qquad x'' = -2\,x' - x + 4\,e^{-t} \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

**Définition 13.** — *Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$.*

**(1) Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n$ (EDLS$n$).** *L'équation :*

$$(\mathcal{E}_n) \qquad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

*est appelée équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n$.*

**(2) Équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$ (EDLS$n$ homogène).** *L'équation différentielle $(\mathcal{E}_n)$ est dite homogène, si la fonction $b$ est nulle.*

**(3) Solution d'une EDLS$n$.** *Une solution de $(\mathcal{E}_n)$ est une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ telle que :*

$$\forall\, t \in I \qquad x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)}(t) + b(t)$$

**(4) L'EDLS$n$ homogène associée à une EDLS$n$.** *L'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E}_n)$ est :*

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_n) \qquad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

**(5) Problème de Cauchy associé à un EDLS$n$.** *Soient $t_0 \in I$ et $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{K}$. Le problème de Cauchy associé à $(\mathcal{E}_n)$ avec condition initiale :*

$$(\mathrm{CI}) \qquad \forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad x^{(i)}(t_0) = x_i$$

*s'écrit :*

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}_n) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b(t) \\ \forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

**(6) Solution d'un problème de Cauchy associé à une EDLS$n$.** *Une solution de $(\mathcal{P}\mathcal{E}_n)$ est une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, t \in I \qquad x^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b(t) \\ \forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{array} \right.$$

*i.e. une solution de $(\mathcal{E}_n)$ vérifiant la condition* (CI).

***Exemple 14.*** — L'équation :

$$(\mathcal{E}_3) \quad x''' = t\, x + \mathrm{ch}(t)\, x' - t^2\, x'' + \arctan(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

est une EDLS3.

## 2. Champ de vecteurs d'un SDL1

***Convention.*** Dans cette partie, nous confondons les points du plan $\mathbf{R}^2$ et leurs coordonnées dans la base canonique. $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$.

***Définition du SDL1 $(\mathcal{S})$.*** Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,2]\!]^2} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On lui associe le SDL1 (homogène) à coefficients constants :

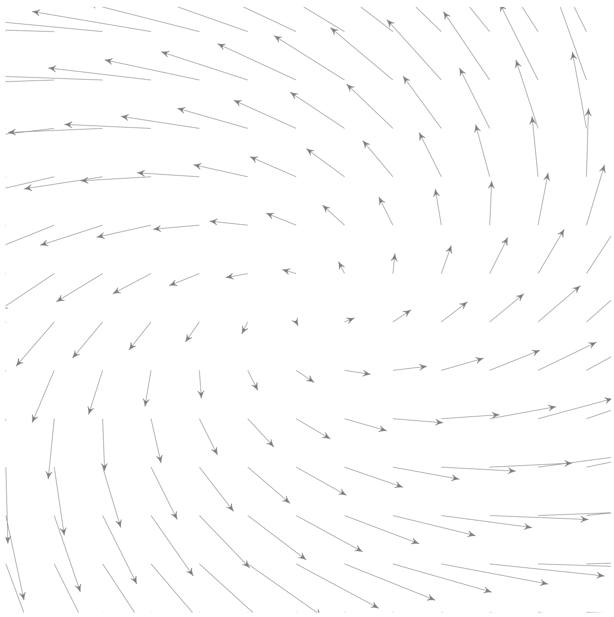
$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcccc} x' & = & a_{1,1}\, x & + & a_{1,2}\, y \\ y' & = & a_{2,1}\, x & + & a_{2,2}\, y \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$$

***Champ de vecteurs associé au SDL1 $(\mathcal{S})$.*** À ce SDL1 $(\mathcal{S})$, nous associons le champ de vecteurs :

$$\xi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On représente le champ de vecteurs $\xi$ en traçant en tout point $M$ du plan, le vecteur $\xi(M)$.

Représentation du champ de vecteurs $\xi$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



***Trajectoire d'une solution du SDL1 $(\mathcal{S})$ et interprétation cinématique.*** Considérons une solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système différentiel $(\mathcal{S})$. Nous introduisons sa trajectoire :

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbf{R} \right\}$$

que nous pouvons assimiler à l'ensemble des positions $M(t)$ prises par un mobile au cours du temps $t$. En dérivant le vecteur position du mobile :

$$\overrightarrow{OM(t)} := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

au temps $t$, on obtient son vecteur vitesse.

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}\,t} := \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \xi\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \xi\left(\overrightarrow{OM(t)}\right) \qquad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathcal{SH})\right].$$

***Géométrie des solutions du SDL1 $(\mathcal{SH})$.*** Fixons un temps $t$. Alors :

$$\overrightarrow{OM(t+h)} \underset{h\to 0}{=} \overrightarrow{OM(t)} + h\,\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}\,t} + \mathrm{o}\,(h)$$

d'où

$$\overrightarrow{M(t)M(t+h)} \underset{h\to 0}{=} h\,\xi\left(\overrightarrow{OM(t)}\right) + \mathrm{o}\,(h)$$

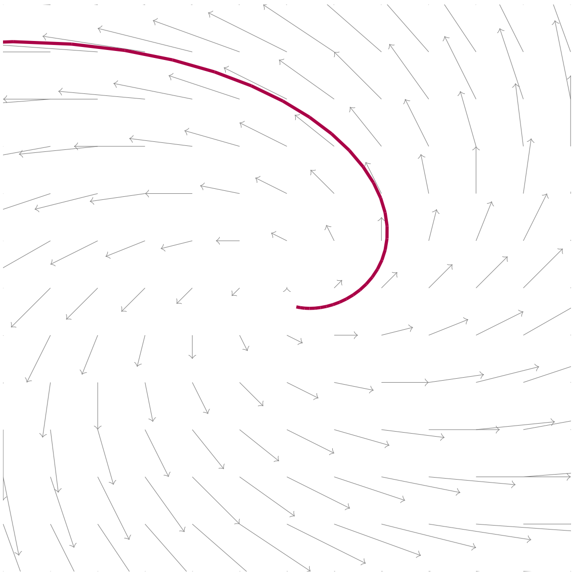
Ainsi, si $h > 0$ est « petit », alors le vecteur $\overrightarrow{M(t)M(t+h)} = \begin{pmatrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - y(t) \end{pmatrix}$ peut être approximé par un vecteur colinéaire à $\xi\left(\overrightarrow{OM(t)}\right) = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de même sens.

Si un point $M$ (atteint en un temps $t$ qui n'importe pas ici) appartient à la trajectoire $\Gamma$, alors la tangente à $\Gamma$ au point $M$ est portée par le vecteur $\xi(M)$. Nous en déduisons que :

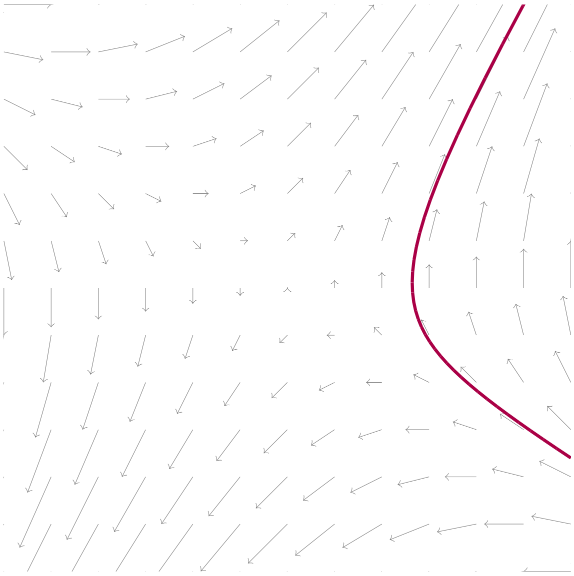
la trajectoire d'une solution du SDL1 $(\mathcal{S})$ épouse le champ de vecteurs $\xi$.

***Champ de vecteurs et une trajectoire d'une solution pour le SDL1 $(\mathcal{S})$.***

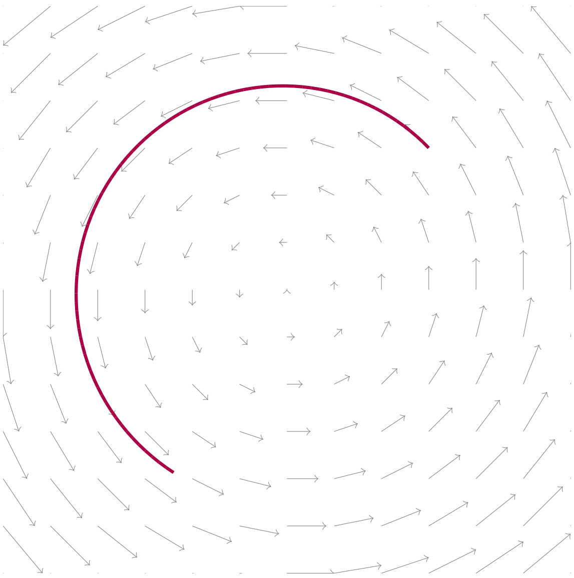
Cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



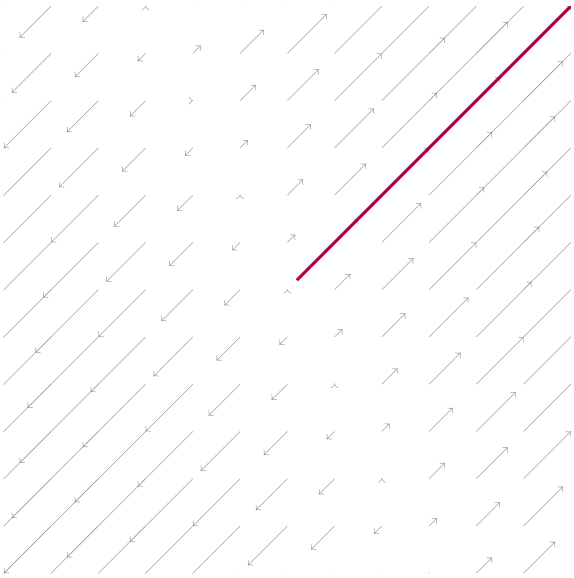
Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$



# 3. Réduction à l'étude des EDL1

## 3.1. Réduction de l'étude d'une EDL1 à celle d'un SDL1

*Notation.* — Soit $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

**Proposition 15.** — *Soient $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On introduit les fonctions $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0, (I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ définies par :*

$$A \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(a(t)) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad B \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(b(t)) \end{array} \right.$$

1. *On considère l'EDL1 $(\mathcal{E})$ et le SDL1 $(\mathcal{S})$ définis par :*

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{S}) \quad X' = A(t)\, X + B(t)$$

*d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si la fonction $\mathrm{Mat}_{\underline{e}} \circ x \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{S})$.*

2. *Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. On considère les deux problèmes de Cauchy $(\mathcal{PE})$ et $(\mathcal{PS})$ définis par :*

$$(\mathcal{PE}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{PS}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)\, X + B(t) \\ X(t_0) = \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x_0) \end{array} \right.$$

*d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ est solution de $(\mathcal{PE})$ si et seulement si la fonction $\mathrm{Mat}_{\underline{e}} \circ x \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{PS})$.*

L'étude d'une EDL1 se ramène donc à l'étude d'un SDL1, en introduisant une base de $E$. De même, l'étude d'un problème de Cauchy associé à une EDL1 se ramène à l'étude d'un problème de Cauchy associé à un SDL1.

## 3.2. Réduction de l'étude d'un SDL1 à celle d'une EDL1

**Proposition 16.** — *Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. On introduit la fonction $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})))$ définie par :*

$$a \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) \\ t & \longmapsto & a(t) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & \longmapsto & A(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. *On considère le SDL1 $(\mathcal{S})$ et l'EDL1 $(\mathcal{E})$ définis par :*

$$(\mathcal{S}) \quad X' = A(t)\, X + B(t) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{E}) \quad X' = a(t) \cdot X + B(t)$$

*tous deux d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si la fonction $X$ est solution de $(\mathcal{E})$.*

2. *Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On considère les deux problèmes de Cauchy $(\mathcal{PS})$ et $(\mathcal{PE})$ définis par :*

$$(\mathcal{PS}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)\, X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{PE}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = a(t) \cdot X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

*tous deux d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{PS})$ si et seulement si la fonction $X$ est solution de $(\mathcal{PE})$.*

L'étude d'un SDL1 se ramène donc à l'étude d'une EDL1. De même, l'étude d'un problème de Cauchy associé à un SDL1 se ramène à l'étude d'un problème de Cauchy associée à une EDL1.

### 3.3. Réduction de l'étude d'une EDLS$n$ à celle d'un SDL1

**Proposition 17.** — *Considérons $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$. On introduit, pour tout $t \in I$ :*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \dots & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \qquad \text{et} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

1. *On condidère l'EDLSn $(\mathcal{E}_n)$ et le SDL1 $(\mathcal{S})$ définis par :*

$$(\mathcal{E}_n) \qquad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b(t) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{S}) \qquad X' = A(t)\, X + B(t)$$

*d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.*

   (a) *Une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ est solution de $(\mathcal{E}_n)$ si et seulement si la fonction $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{S})$.*

   (b) *Une fonction $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si la fonction $x_1 \in \mathbf{K}^I$ est solution de $(\mathcal{E}_n)$.*

2. *Soient $t_0 \in I$ et $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{K}$. On considère les problèmes de Cauchy $(\mathcal{PE}_n)$ et $(\mathcal{PS})$ définis par :*

$$(\mathcal{PE}_n) \quad \begin{cases} x^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b(t) \\ \forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{PS}) \quad \begin{cases} X' = A(t)\, X + B(t) \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

*d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.*

   (a) *Une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ est solution de $(\mathcal{PE}_n)$ si et seulement si la fonction $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{PS})$.*

   (b) *Une fonction $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{PS})$ si et seulement si $x_1 \in \mathbf{K}^I$ est solution de $(\mathcal{PE}_n)$.*

L'étude d'un EDLS$n$ se ramène donc à l'étude d'un SDL1. De même, l'étude d'un problème de Cauchy associé à une EDLS$n$ se ramène à l'étude d'un problème de Cauchy associé à un SDL1.

***Exercice 18.*** — On considère l'EDLS3 :

$$(\mathcal{E}_3) \qquad x''' + \ln(t)\, x'' - \frac{3}{t}\, x' + \frac{4}{t^2}\, x = t \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^3(\,]0, +\infty[\,, \mathbf{R})$$

Donner un SDL1 $(\mathcal{S})$ dont la résolution est équivalente à celle de $(\mathcal{E}_3)$.

# 4. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

## 4.1. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy pour une EDL1

**Proposition 19.** — *Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et l'EDL1 :*

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad , \quad \textit{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

*On introduit $(t_0, x_0) \in I \times E$ et le problème de Cauchy :*

$$(\mathcal{PE}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \quad , \quad \textit{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

*Alors, pour toute fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ :*

$$x \textit{ est solution de } (\mathcal{PE}) \quad \Longleftrightarrow \quad \left( \forall\, t \in I \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u) \ \mathrm{d}u \right)$$

## 4.2. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy pour un SDL1

**Proposition 20.** — *Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et le SDL1 :*

$$(\mathcal{S}) \quad X' = A(t)\, X + B(t) \quad , \quad \textit{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*On introduit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et le problème de Cauchy :*

$$(\mathcal{PS}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)\, X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right. \quad , \quad \textit{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*Alors, pour toute fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ :*

$$X \textit{ est solution de } (\mathcal{PS}) \quad \Longleftrightarrow \quad \left( \forall\, t \in I \quad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)\, X(u) + B(u) \ \mathrm{d}u \right)$$

# 5. Principe de superposition et conséquence pour l'ensemble solution

## 5.1. Cas des EDL1

**Proposition 21.** — *Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^0(I, E)^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les EDL1 :*

$$\begin{array}{cl} (\mathcal{E}, b_1) & x' = a(t) \cdot x + b_1(t) \\ (\mathcal{E}, b_2) & x' = a(t) \cdot x + b_2(t) \\ (\mathcal{E}, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) & x' = a(t) \cdot x + \lambda_1\, b_1(t) + \lambda_2\, b_2(t) \end{array} \quad , \quad \textit{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

*Alors :*

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathrm{Sol}\,(\mathcal{E}, b_1) \times \mathrm{Sol}\,(\mathcal{E}, b_2) \qquad \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \in \mathrm{Sol}\,(\mathcal{E}, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$$

**Proposition 22.** — *Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et les EDL1 :*

$$\begin{array}{cl} (\mathcal{E}) & x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ (\mathcal{EH}) & x' = a(t) \cdot x \end{array} \quad , \quad \textit{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

*Supposons qu'il existe une fonction $x_p$ solution de $(\mathcal{E})$. Alors :*

$$\mathrm{Sol}\,(\mathcal{E}) = \{ x_h + x_p \ : \ x_h \in \mathrm{Sol}\,(\mathcal{EH}) \}$$

**N.B.** Pour résoudre une EDL1 $(\mathcal{E})$, il suffit de :

(a) résoudre l'EDL1 homogène associée $(\mathcal{EH})$ ;

(b) déterminer une solution particulière de l'EDL1 $(\mathcal{E})$ .

### 5.2. Cas des SDL1

**Proposition 23.** — *Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $(B_1, B_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les SDL1 :*

$$\begin{array}{cl} (\mathcal{S}, B_1) & X' = A(t)X + B_1(t) \\ (\mathcal{S}, B_2) & X' = A(t)X + B_2(t) \\ (\mathcal{S}, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) & X' = A(t)X + \lambda_1 B_1(t) + \lambda_2 B_2(t) \end{array} \quad , \quad d'inconnue\ X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*Alors :*

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S}, B_1) \times \mathrm{Sol}(\mathcal{S}, B_2) \qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S}, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$$

**Proposition 24.** — *Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et les SDL1 :*

$$\begin{array}{cl} (\mathcal{S}) & X' = A(t)X + B(t) \\ (\mathcal{SH}) & X' = A(t)X \end{array} \quad , \quad d'inconnue\ X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*Alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \{X_h + X_p \ : \ X_h \in \mathrm{Sol}(\mathcal{SH})\}$$

**N.B.** Pour résoudre un SDL1 $(\mathcal{S})$, il suffit de :

(a) résoudre le SDL1 homogène associé $(\mathcal{SH})$ ;

(b) déterminer une solution particulière du SDL1 $(\mathcal{S})$ .

### 5.3. Cas des EDLS$n$

**Proposition 25.** — *Considérons $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les EDLS$n$ :*

$$\begin{array}{cl} (\mathcal{E}_n, b_1) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b_1(t) \\ (\mathcal{E}_n, b_2) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b_2(t) \\ (\mathcal{E}_n, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{array} \quad , \quad d'inconnue\ x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

*Alors :*

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{Sol}(\mathcal{E}_n, b_1) \times \mathrm{Sol}(\mathcal{E}_n, b_2) \qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathrm{Sol}(\mathcal{E}_n, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$$

**Proposition 26.** — *Considérons $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et les EDLS$n$ :*

$$\begin{array}{cl} (\mathcal{E}_n) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} + b(t) \\ (\mathcal{EH}_n) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)} \end{array} \quad , \quad d'inconnue\ x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

*Supposons qu'il existe une fonction $x_p$ solution de $(\mathcal{E}_n)$. Alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{E}_n) = \{x_h + x_p \ : \ x_h \in \mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_n)\}\,.$$

**N.B.** Pour résoudre une EDLS$n$ $(\mathcal{E}_n)$, il suffit de :

(a) résoudre l'EDLS$n$ homogène associée $(\mathcal{EH}_n)$ ;

(b) déterminer une solution particulière de l'EDLS$n$ $(\mathcal{E}_n)$.

# 6. Théorème de Cauchy linéaire et conséquences

## 6.1. Cas des EDL1

**Théorème 27.** — *Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$. Alors le problème de Cauchy :*

$$(\mathcal{PE}) \quad \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad , \quad d'inconnue\ x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

*admet une unique solution.*

Ce théorème est admis.

***Exercice 28.*** — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $t_0 \in I$. Soit une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que $x(t_0) = 0_E$ et pour tout $t \in I$ :

$$x'(t) = a(t)(x(t))$$

Que dire de la fonction $x$ ?

***Exercice 29.*** — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Soient deux fonctions $x_1, x_2 \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telles que, pour tout $t \in I$ :

$$x_1'(t) = a(t)(x_1(t)) + b(t) \qquad \text{et} \qquad x_2'(t) = a(t)(x_2(t)) + b(t)$$

Démontrer :

$$(\,\exists\, t \in I \quad x_1(t) = x_2(t)\,) \iff (\,\forall\, t \in I \quad x_1(t) = x_2(t)\,)$$

**Corollaire 30.** — *Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et l'EDL1 homogène :*

$$(\mathcal{EH}) \quad x' = a(t) \cdot x \quad , \quad d'inconnue\ x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

*Alors :*

1. *l'ensemble $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ ;*
2. *pour tout $t_0 \in I$, l'application :*
$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathcal{EH}) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{array} \right.$$
*est un isomorphisme de **K**-espaces vectoriels ;*
3. $\dim(\mathrm{Sol}(\mathcal{EH})) = \dim(E)$.

**Corollaire 31.** — *Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et les EDL1 :*

$$\begin{array}{lcl} (\mathcal{E}) & x' & = & a(t) \cdot x + b(t) \\ (\mathcal{EH}) & x' & = & a(t) \cdot x \end{array} \quad , \quad d'inconnue\ x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

*Alors :*

1. *l'EDL1 $(\mathcal{E})$ possède (au moins) une solution ;*
2. *si $x_p$ est une solution de $(\mathcal{E})$, alors :*
$$\mathrm{Sol}(\mathcal{E}) = x_p + \mathrm{Sol}(\mathcal{EH})$$
*est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$, dirigé par le sous-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH})$ de $\mathcal{C}^1(I, E)$, qui est de dimension $n$.*

### 6.2. Cas des SDL1

**Théorème 32.** — *Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors le problème de Cauchy :*

$$(\mathcal{PS}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*admet une unique solution.*

**Corollaire 33.** — *Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et le SDL1 homogène :*

$$(\mathcal{SH}) \quad X' = A(t)\,X \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*Alors :*

1. *l'ensemble* $\mathrm{Sol}(\mathcal{SH})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ *;*
2. *pour tout $t_0 \in I$, l'application :*
$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathcal{SH}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & X(t_0) \end{array} \right.$$
*est un isomorphisme de* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels ;*
3. $\dim(\mathrm{Sol}(\mathcal{SH})) = n$.

**Corollaire 34.** — *Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et les SDL1 :*

$$\begin{array}{cccl} (\mathcal{S}) & X' & = & A(t)\,X + B(t) \\ (\mathcal{SH}) & X' & = & A(t) \cdot X \end{array} \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

*Alors :*

1. *le SDL1 $(\mathcal{S})$ possède (au moins) une solution ;*
2. *si $X_p$ est une solution de $(\mathcal{S})$, alors :*
$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = X_p + \mathrm{Sol}(\mathcal{SH})$$
*est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, dirigé par le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Sol}(\mathcal{SH})$ *de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, qui est de dimension $n$.*

***Exercice 35.*** — On considère le SDL1 homogène :

$$(\mathcal{SH}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & 2y & - & z \\ y' & = & 2x & + & 4y & - & 2z \\ z' & = & -x & - & 2y & + & z \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}))$$

1. Soit $\lambda$ une valeur propre réelle et $V$ un vecteur propre associé. Démontrer que la fonction :
$$X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t}\,V \end{array} \right.$$
est solution de $(\mathcal{SH})$.
2. Réduire la matrice sous-jacente au système linéaire $(\mathcal{SH})$ et en déduire une base de l'espace $\mathrm{Sol}(\mathcal{SH})$ des solutions de $(\mathcal{SH})$.
3. Proposer une généralisation du résultat obtenu pour le SDL1 homogène $(\mathcal{SH})$ ?

### 6.3. Cas des EDLS$n$

**Théorème 36.** — *Considérons $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$, $t_0 \in I$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{K}$. Alors le problème de Cauchy :*

$$(\mathcal{PE}_n) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t) \\ \\ \forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{array} \right. \quad , \quad \textit{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

*admet une unique solution.*

**Corollaire 37.** — *Considérons $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et l'EDLS$n$ homogène :*

$$(\mathcal{EH}_n) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} \quad , \quad \textit{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

*Alors :*

1. *l'ensemble $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ ;*
2. *pour tout $t_0 \in I$, l'application :*

$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_n) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

   *est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels ;*
3. $\dim(\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_n)) = n$.

**Corollaire 38.** — *Considérons $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et les EDLS$n$ :*

$$\begin{array}{llll} (\mathcal{E}_n) & x^{(n)} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t) \\ (\mathcal{EH}_n) & x^{(n)} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} \end{array} \quad , \quad \textit{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

*Alors :*

1. *l'EDLS$n$ $(\mathcal{E}_n)$ possède (au moins) une solution ;*
2. *si $x_p$ est une solution de $(\mathcal{E}_n)$, alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{E}_n) = x_p + \mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_n)$$

   *est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$, dirigé par le sous-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_n)$ de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$, qui est de dimension $n$.*

***Exercice 39.*** — On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_n) \qquad x^{(n)} = x + 2025 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

1. Déterminer tous les nombres complexes $\lambda$ tels que la fonction :

$$x \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} \end{array} \right.$$

   soit solution de l'EDLS$n$ homogène $(\mathcal{EH}_n)$ associée à $(\mathcal{E}_n)$.
2. En déduire l'ensemble solution de $(\mathcal{EH}_n)$.
3. Conclure quant à l'ensemble solution de $(\mathcal{E})$.

# 7. Rappels et compléments sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

## 7.1. Définition de l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

**Définition 40. —**

*Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'exponentielle de $u$, notée $e^u$ ou $\exp(u)$, est la somme de la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ qui converge dans $\mathcal{L}(E)$, i.e. :*

$$e^u = \exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \in \mathcal{L}(E)$$

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'exponentielle de $A$, notée $e^A$ ou $\exp(A)$, est la somme de la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, i.e. :*

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

***Remarque 41.* —** Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(u)) = \exp\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$

## 7.2. Exponentielle d'une matrice diagonale

**Proposition 42. —** *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ et $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors :*

$$\exp(D) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$$

## 7.3. Exponentielle de deux matrices semblables

**Proposition 43. —** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices semblables sur $\mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P\,B\,P^{-1}$. Alors :*

$$\exp(A) = P\ \exp(B)\ P^{-1}$$

## 7.4. Spectre d'une exponentielle de matrice

**Proposition 44. —** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A)$. Alors :*

$$e^{\lambda} \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(\exp(A))$$

## 7.5. Exponentielle d'une somme de deux endomorphismes, deux matrices, qui commutent

**Proposition 45. —**

*Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors :*

$$\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$$

*Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A\,B = B\,A$. Alors :*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\,\exp(B)$$

## 7.6. Continuité de l'exponentielle

**Proposition 46. —**

*L'application :*

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & \exp(u) \end{array} \right.$$

*est continue.*

*L'application :*

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & \exp(M) \end{array} \right.$$

*est continue.*

*Éléments de démonstration.* On considère uniquement le cas matriciel et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'une norme sous-multiplicative, e.g. :

$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ M & \longmapsto & \displaystyle\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |[M]_{i,j}| \end{array} \right.$$

(a) Soient $A$ une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}\left(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\right)^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}\left(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\right)$. On dit que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $A$ si :
- $|||\, f - f_k \,|||_{\infty,A} := \sup\left\{|||\, f_k(M) - f(M)\,||| \ : \ M \in A\right\}$ est bien défini à partir d'un certain rang ;
- $|||\, f - f_k \,|||_{\infty,A} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

(b) Soient $A$ une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}^0\left(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\right)^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}\left(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\right)$. Si la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $A$, alors la fonction $f$ est continue sur $A$.

(c) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction :

$$S_k \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{M^i}{i!} \end{array} \right.$$

est polynomiale, donc continue.

(d) Soit $R > 0$ et $k \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\forall\, M \in B(0,R) \qquad |||\exp(M) - S_k(M)\,||| \leqslant \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{R^i}{i!}$$

donc :

$$|||\exp - S_k\,|||_{\infty, B(0,R)} \leqslant \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{R^i}{i!}$$

On en déduit que $|||\exp - S_k\,|||_{\infty, B(0,R)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

(e) La fonction exp est continue sur $B(0,R)$, pour tout $R > 0$. Elle est donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

□

### 7.7. Dérivation de $t \longmapsto \exp(t\,u)$, $t \longmapsto \exp(t\,A)$

**Proposition 47.** —

*Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \longmapsto & \exp(tu) \end{array} \right.$$

*est dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = u \circ f(t)$.*

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array} \right.$$

*est dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = A\,f(t)$.*

*Démonstration.*

(a) Démontrons la dérivabilité de $f$ en $t = 0$. Démontrons que $\dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} A\,f(0)$. Soit $t \in ]-1, 0[\, \cup\, ]0, 1[$.

$$\left|\left| \frac{f(t) - f(0)}{t} - A\,f(0) \right|\right| = \left|\left| \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} - I_n\right) - A \right|\right| = \left|\left| \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{k!} - A \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{k!} \right|\right|$$

On en déduit que :

$$0 \leqslant \left|\left| \frac{f(t) - f(0)}{t} - A\,f(0) \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{k!} \right|\right| \leqslant |t| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{||\,A\,||^k}{k!}$$

Par théorème d'encadrement, $\dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} A\,f(0)$.

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. Démontrons $\dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} A\,f(t)$. Soit $h \in \mathbf{R}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{\exp(hA + tA) - \exp(tA)}{h} \\ &= \frac{\exp(hA)\exp(tA) - \exp(tA)}{h} \qquad \text{[les matrices } hA \text{ et } tA \text{ commutent]} \\ &= \frac{\exp(hA) - I_n}{h}\ \exp(tA) \\ &= \frac{f(h) - f(0)}{h}\ \exp(tA) \end{aligned}$$

(c) L'application :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M\,\exp(tA) \end{array} \right.$$

est linéaire et, comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})) < \infty$, elle est continue. Comme $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} A\,f(0) = A$

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = u\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right) \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} u(A) = A\exp(tA) = A\,f(t)$$

□

## 8. SDL1 homogène à coefficients constants

### 8.1. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants à l'aide d'une exponentielle de matrice

**Théorème 48.** — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et :*

$$\left( e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

*la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on définit la fonction $X_i$ par :*

$$X_i \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA)\,e_i \end{array} \right. \qquad [\textit{le vecteur colonne } \exp(tA)\,e_i \textit{ est la } i\textit{-ème colonne de la matrice } \exp(tA)]$$

*Alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène à coefficients constants :*

$$(\mathcal{S}) \quad X' = A\,X \quad , \quad \textit{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$$

***Exercice 49.*** — Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & y \\ y' & = & z \\ z' & = & 0 \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$$

***Exercice 50.*** — Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x' & = & 2\,x + y - z \\ y' & = & 2\,y + 3z \\ z' & = & 2\,z \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$$

***Exercice 51.*** — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Caculer $\chi_A$.
2. En déduire la valeur de $\exp(tA)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$.
3. Résoudre le système différentiel :

$$X' = A\,X \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$$

### 8.2. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants dans le cas diagonalisable

**Théorème 52.** — *Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable sur $\mathbf{K}$. On note :*

- *$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de $A$ dans $\mathbf{K}$ ;*
- *pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $(V_{i,1}, \ldots, V_{i,m_i})$ une base de $E_{\lambda_i}$ ;*
- *pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $j \in ]\!]1, m_i]\!]$, $X_{i,j}$ définie par :*

$$X_{i,j} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_i t}\, V_{i,j} \end{array} \right.$$

*Alors les $m_1 + \ldots + m_r = n$ fonctions $X_{1,1}, \ldots, X_{1,m_1}, \ldots, X_{r,1}, \ldots, X_{r,m_r}$ forme une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène à coefficients constants :*

$$(\mathcal{S}) \quad X' = A\,X \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$$

***Exercice 53.*** — Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x' & = & x + y \\ y' & = & -x + 2\,y + z \\ z' & = & x + z \end{array} \right. \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$$

## 9. Méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière d'un SDL1

**Proposition 54.** — *Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. On considère les SDL1 :*

$$\begin{array}{ccccl} (\mathcal{S}) & & X' & = & A(t)\,X + B(t) \\ (\mathcal{SH}) & & X' & = & A(t)\,X \end{array} \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$$

*et une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{SH})$.*

1. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$ La fonction :*

$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \lambda_1(t)\,X_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)\,X_n(t) \end{array} \right.$$

*et solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si :*

$$\forall\, t \in I \quad \underbrace{(X_1(t)\,|\,X_2(t)\,|\,\ldots\,|\,X_n(t))}_{\text{matrice } (n,n) \text{ décrite en colonnes}} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

2. *Pour tout $t \in I$, le scalaire :*

$$W(t) := \det\left(X_1(t)\,|\,X_2(t)\,|\,\ldots\,|\,X_n(t)\right) \qquad [\textit{Wronskien de la base } (X_1, \ldots, X_n) \textit{ au temps } t]$$

*est non nul, i.e. la matrice $(X_1(t)\,|\,X_2(t)\,|\,\ldots\,|\,X_n(t))$ est inversible.*

3. *Si la fonction $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est une primitive de la fonction continue :*

$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & (X_1(t)\,|\,X_2(t)\,|\,\ldots\,|\,X_n(t))^{-1}\; B(t) \end{array} \right.$$

*alors la fonction :*

$$X_{\text{part}} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \lambda_1(t)\,X_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)\,X_n(t) \end{array} \right.$$

*est solution de $(\mathcal{S})$ et :*

$$\text{Sol}(\mathcal{S}) = X_{\text{part}} + \text{Vect}\left(X_1, \ldots, X_n\right)$$

***Exercice 55.*** — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On considère le SDL1 :

$$(\mathcal{S}) \qquad X' = AX + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \ \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$$

1. Donner une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène associé $(\mathcal{S})$.
2. Déterminer une solution particulière de $(\mathcal{S})$, an appliquant la méthode de la variation des constantes.
3. En déduire l'ensemble solution de $(\mathcal{S})$.

***Exercice 56.*** — Soit $A = (1 + \delta_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Résoudre le SDL1 :

$$(\mathcal{S}) \qquad X' = AX \quad , \ \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\right)$$

## 10. Quelques méthodes pour résoudre un SDL1

**(1) Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants.** — Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène :

$$(\mathcal{SH}) \qquad X' = AX \quad , \ \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$$

est :

$$\left( X_i \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \exp(tA)\, e_i \end{array} \right. \right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

**(2) Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants dans le cas diagonalisable.** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbf{K}$, dont les valeurs propres distinctes sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, soit $(V_{i,1}, \ldots, V_{i,m_i})$ une base du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(A)$. Une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène :

$$(\mathcal{SH}) \qquad X' = AX \quad , \ \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$$

est :

$$\left( X_{i,j} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_i t}\, V_{i,j} \end{array} \right. \right)_{1 \leqslant i \leqslant r \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant m_i}$$

**(3) Calcul d'une solution particulière d'un SDL1 par la méthode de variation des constantes.** — Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et les SDL1 :

$$\begin{array}{lccl} (\mathcal{S}) & X' & = & A(t)\, X + B(t) \\ (\mathcal{SH}) & X' & = & A(t)\, X \end{array} \quad , \ \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$$

Supposons connue une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de l'ensemble solution du SDL1 homogène $(\mathcal{SH})$, de sorte que :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{SH}) = \{\lambda_1\, X_1 + \ldots + \lambda_n\, X_n \ : \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\}$$

On recherche une solution particulière de $(\mathcal{S})$ en appliquant la méthode de variation des constantes, i.e. on détermine $n$ fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathbf{K}\right)$ telles que :

$$\forall\, t \in I \quad (X_1(t) \,|\, X_2(t) \,|\, \ldots \,|\, X_n(t)) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

et on calcule la fonction :

$$X_{\mathrm{part}} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \lambda_1(t)\, X_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)\, X_n(t) \end{array} \right.$$

que l'on sait être solution de $(\mathcal{S})$. Le principe de superposition a pour conséquence :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = X_{\mathrm{part}} + \mathrm{Sol}(\mathcal{SH}) = X_{\mathrm{part}} + \mathrm{Vect}\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & X_{\mathrm{part}}(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i\, X_i(t) \end{array} \right. \ : \ (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{K}^n \right\}$$

# 11. EDLS2

## 11.1. Wronskien d'un couple de solutions d'une EDLS2 homogène

*Notation.* — Soient $a_0, a_1 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et $(\mathcal{EH}_2)$ l'EDLS2 homogène :

$$(\mathcal{EH}_2) \quad x'' = a_0(t)\,x + a_1(t)\,x' \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2\,(I, \mathbf{K})$$

**Définition 57.** — *Le Wronskien d'un couple $(x_1, x_2)$ de solutions de $(\mathcal{EH}_2)$ est défini par :*

$$W(x_1, x_2) \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{array} \right.$$

## 11.2. Caractérisation des bases de l'ensemble solution d'une EDLS2 homogène

***Remarque 58.*** — Soit $(x_1, x_2)$ un couple de solutions de $(\mathcal{EH}_2)$. Alors $W(x_1, x_2) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$ et :

$$\forall\, t \in I \qquad W(x_1, x_2)'(t) = a_1(t)\,W(x_1, x_2)(t)$$

Autrement dit, $W(x_1, x_2)$ est solution de l'EDLS1 homogène :

$$y' = a_1(t)\,y \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1\,(I, \mathbf{K})$$

Si on fixe $t_0 \in I$, on a donc :

$$\forall\, t \in I \qquad W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0)\ \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_1(u)\ \mathrm{d}u\right) \qquad \text{[expression intégrale du Wronskien]}$$

**Proposition 59.** — *Soit $(x_1, x_2)$ un couple de solutions de $(\mathcal{EH}_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\exists\, t \in I \quad W(x_1, x_2)(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0$
2. $\forall\, t \in I \quad W(x_1, x_2)(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0$
3. $(x_1, x_2)$ *est une base de* $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_2)$.

*Démonstration.* On pose $W := W(x_1, x_2)$ pour alléger l'écriture.

- (2) $\Longrightarrow$ (1). Claire.
- (1) $\Longrightarrow$ (2). Nous raisonnons par contraposition et supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) = 0$. La fonction $W$ est donc solution du problème de Cauchy :

  $$\begin{cases} y' = a_1(t)\,y & \text{[EDLS1 homogène]} \\ y(t_0) = 0 & \text{[condition initiale]} \end{cases}$$

  La fonction nulle sur $I$ est également solution de ce problème de Cauchy. L'unicité dans le théorème de Cauchy linéaire pour les EDLS1 entraine que $W$ est la fonction nulle sur $I$.
- (1) $\Longrightarrow$ (3). Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$. La matrice $\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{pmatrix}$ est donc inversible.
  Comme nous savons que $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ de dimension 2, il suffit de démontrer que la famille $(x_1, x_2)$ de 2 solutions de $(\mathcal{EH}_2)$ est libre pour en déduire qu'elle forme une base de $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_2)$.
  Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{K}^2$ tel que $\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2$ est la fonction nulle sur $I$. En dérivant, nous obtenons :

  $$\forall\, t \in I \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  En spécialisant en $t_0$ et en utilisant l'hypothèse, il vient $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
- (3) $\Longrightarrow$ (1). Supposons que $(x_1, x_2)$ est une base de $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_2)$. Nous démontrons (1) en raisonnant par l'absurde. Nous supposons donc que, pour tout $t \in I$, $W(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = 0$.
  Fixons $t_0 \in I$. Nous observons que la fonction $x_2'(t_0)\,x_1 - x_1'(t_0)\,x_2$ est solution du problème de Cauchy :

  $$\begin{cases} x'' = a_0(t)\,x + a_1(t)\,x' & \text{[EDLS2 homogène]} \\ x(t_0) = x'(t_0) = 0 & \text{[condition initiale]} \end{cases}$$

  La fonction nulle sur $I$ est également solution de ce problème de Cauchy. L'unicité dans le théorème de Cauchy linéaire pour les EDLS2 entraine que $x_2'(t_0)\,x_1 - x_1'(t_0)\,x_2$ est la fonction nulle sur $I$. Par liberté de la famille $(x_1, x_2)$, il vient $x_1'(t_0) = x_2'(t_0) = 0$. Ce résultat valant pour un temps $t_0$ quelconque de l'intervalle $I$, les fonctions $x_1$ et $x_2$ sont constantes. La famille $(x_1, x_2)$ est donc liée, d'où une contradiction.

$\square$

### 11.3. Méthode du Wronskien (HP)

**Proposition 60.** — *Soient $x_1$ une solution de $(\mathcal{EH}_2)$ qui ne s'annule pas sur $I$ et $t_0$ un point de $I$ fixé. On définit les fonctions $W$ et $x_2$ par :*

$$W \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} a_1(u)\ \mathrm{d}u\right) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad x_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & x_1(t) \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\ \mathrm{d}u \end{array} \right.$$

*Alors $(x_1, x_2)$ est une base de $\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_2)$.*

### 11.4. Méthode de variation de la constante ou de l'abaissement de l'ordre (HP)

**Proposition 61.** — *Soit $x_1$ une solution de $(\mathcal{EH}_2)$ qui ne s'annule pas sur $I$. Pour tout $\lambda \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ la fonction :*

$$x_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda(t)\, x_1(t) \end{array} \right.$$

*est solution de $(\mathcal{EH}_2)$ si et seulement si :*

$$\forall\, t \in I \qquad \lambda''(t) = \left(a_1(t) - 2\,\frac{x_1'(t)}{x_1(t)}\right) \lambda'(t) \qquad [\lambda \text{ est solution d'une EDLS1 homogène}]$$

***Exercice 62.*** — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{EH}_2) \quad x'' - \frac{3}{t}\,x' + \frac{4}{t^2}\,x = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2\left(\,]0, +\infty[\,, \mathbf{R}\right)$$

en commençant par rechercher une solution polynomiale.

***Exercice 63.*** — On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 1 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2\left(\,]-1/2, +\infty[\,, \mathbf{R}\right)$$

et son équation homogène associée

$$(\mathcal{EH}_2) \quad (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 1 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2\left(\,]-1/2, +\infty[\,, \mathbf{R}\right)$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbf{R}$ pour que la fonction :
$$y_1 \left| \begin{array}{ccc} ]-1/2, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array} \right.$$
soit solution de $(\mathcal{EH}_2)$ sur $]-1/2, +\infty[$.
2. Résoudre $(\mathcal{EH}_2)$ sur $]-1/2, +\infty[$.
3. Résoudre $(\mathcal{E}_2)$ sur $]-1/2, +\infty[$.

***Exercice 64.*** — Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ une fonction intégrable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Considérons l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad y'' + q(t)\,y = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2\left(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}\right)$$

1. Soit $y$ une solution de $(\mathcal{E}_2)$. Supposons $y$ bornée.
   (a) Montrer que $y'$ admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Montrer que $y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $z$ une deuxième solution bornée de $(\mathcal{E}_2)$. Montrer que la fonction :
$$W \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} \end{array} \right.$$
est constante.
3. En déduire que $(\mathcal{E}_2)$ possède une solution non bornée.

### 11.5. Méthode de variation des constantes pour une EDLS2

**Proposition 65.** — *Soient $a_0, a_1, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et $(\mathcal{E}_2)$ l'EDLS2 :*

$$(\mathcal{E}_2) \quad x'' = a_0(t)\,x + a_1(t)\,x' + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2\,(I, \mathbf{K})$$

*Supposons connue une base $(x_1, x_2)$ de l'ensemble solution de :*

$$(\mathcal{EH}_2) \quad x'' = a_0(t)\,x + a_1(t)\,x' \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2\,(I, \mathbf{K})$$

*Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ :*

$$\forall\, t \in I \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \text{ est solution de } (\mathcal{S})$$

On conserve les notations de la proposition 65. Pour chercher une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E}_2)$, on calcule deux fonctions $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, K)$ telles que :

$$\forall\, t \in I \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1'(t)\,x_1(t) + \lambda_2'(t)\,x_2(t) & = & 0 \\ \lambda_1'(t)\,x_1'(t) + \lambda_2'(t)\,x_2'(t) & = & b(t) \end{array} \right.$$

La fonction $\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2$ est alors solution de $(\mathcal{E}_2)$.

*Démonstration.*

- Nous savons qu'une fonction $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ est solution de $(\mathcal{EH}_2)$ si et seulement si la fonction $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ est solution du SDL1 homogène :

$$(\mathcal{SH}) \qquad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) \end{pmatrix} X \ , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

  Nous vérifions alors sans peine que $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'ensemble $\mathrm{Sol}(\mathcal{SH})$.

- Introduisons le SDL1 :

$$(\mathcal{S}) \qquad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \ , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

  Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$. D'une part, d'après la méthode de la variation des constantes (proposition 54) :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \iff \forall\, t \in I \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

  D'autre part :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathcal{S}) & \iff \begin{pmatrix} \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \\ \lambda_1\, x_1' + \lambda_2\, x_2' \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \\
& \iff \begin{pmatrix} \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \\ \lambda_1\, x_1' + \lambda_2\, x_2' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \\ \lambda_1\, x_1' + \lambda_2\, x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\
& \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2)' & = & \lambda_1\, x_1' + \lambda_2\, x_2' \\ (\lambda_1\, x_1' + \lambda_2\, x_2')' & = & a_0\,(\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2) + a_1\,(\lambda_1\, x_1' + \lambda_2\, x_2') + b \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2)' & = & \lambda_1\, x_1' + \lambda_2\, x_2' \\ (\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2)'' & = & a_0\,(\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2) + a_1\,(\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2)' + b \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1'\, x_1 + \lambda_2'\, x_2 = 0 \qquad [\text{condition } (+)] \\ \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \text{ est solution de } (\mathcal{E}_2) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

  Nous en déduisons que :

$$\forall\, t \in I \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \text{ est solution de } (\mathcal{E}_2)$$

  en ayant mis de plus en évidence une condition $(+)$.

□

***Exercice 66.*** — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad y'' + y = \sin^2(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, , \mathbf{R})$$

***Exercice 67.*** — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad x'' - \frac{3}{t}\,x' + \frac{4}{t^2}\,x = \ln(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\,]0,+\infty[\,, \mathbf{R})$$

sachant que les fonctions :

$$x_1 \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad x_2 \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t^2\,\ln(t) \end{array} \right.$$

forment une base de l'ensemble solution de :

$$(\mathcal{EH}_2) \quad x'' - \frac{3}{t}\,x' + \frac{4}{t^2}\,x = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\,]0,+\infty[\,, \mathbf{R})$$

Nous appliquons la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(\,]0,+\infty[\,, \mathbf{R})$. Soit $t \in ]0,+\infty[$.

$$\begin{pmatrix} t^2 & t^2\,\ln(t) \\ 2\,t & t + 2\,t\,\ln(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t + 2\,t\,\ln(t) & -t^2\,\ln(t) \\ -2\,t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln^2(t)/t \\ \ln(t)/t \end{pmatrix}$$

Les fonctions :

$$\lambda_1 \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & -\dfrac{\ln^3(t)}{3} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & -\dfrac{\ln^2(t)}{2} \end{array} \right.$$

conviennent donc. Nous en déduisons que la fonction :

$$x_{\text{part}} \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & -\dfrac{t^2\,\ln^3(t)}{3}\,x_1(t) + \dfrac{\ln^2(t)}{2}\,x_2(t) = \dfrac{t^2\,\ln^3(t)}{6} \end{array} \right.$$

est solution de $(\mathcal{E}_2)$. Ainsi :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{E}_2 = x_{\text{part}} + \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & k_1\,t^2 + k_2\,t^2\,\ln(t) + \dfrac{t^2\,\ln^3(t)}{6} \end{array} \right. \ : \ (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

## 12. Une méthode générique pour résoudre une EDLS2

Soient $a_0, a_1, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et les EDLS2 :

$$\begin{array}{lcl} (\mathcal{E}_2) & x'' = & a_0(t)\,x + a_1(t)\,x' + b(t) \\ (\mathcal{EH}_2) & x'' = & a_0(t)\,x + a_1(t)\,x' \end{array} \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$$

Pour résoudre $(\mathcal{E}_2)$, on peut adopter la démarche exposée ci-dessous.

**(1) Une solution $x_1$ de $(\mathcal{EH}_2)$ qui ne s'annule pas.** — On recherche une solution $x_1$ de $(\mathcal{EH}_2)$, qui ne s'annule pas sur $I$, et qui possède une forme particulière, e.g. :
- une fonction polynomiale ;
- une fonction développable en série entière au voisinage de $0$ ;
- une fonction d'une forme soufflée dans l'énoncé.

**(2) Une deuxième solution $x_2$ de $(\mathcal{EH}_2)$.** — Une fois déterminée une fonction $x_1$ solution de $(\mathcal{EH}_2)$, qui ne s'annule pas sur $I$, on peut appliquer :
- la méthode de variation de la constante ou de l'abaissement de l'ordre, en posant :

$$x_2 = k\,x_1 \quad , \quad \text{où } k \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$$

- la méthode du Wronskien, en calculant :

$$x_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & x_1(t) \displaystyle\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\, \mathrm{d}u \end{array} \right. \quad , \text{ où } W \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \exp\left(\displaystyle\int^t a_1(u)\, \mathrm{d}u\right) \end{array} \right.$$

pour déterminer une deuxième solution $x_2$ de $(\mathcal{EH}_2)$.

**(3) Liberté de la famille $(x_1, x_2)$.**— On vérifie que le Wronskien du couple $(x_1, x_2)$ de solutions de $(\mathcal{EH}_2)$ :

$$W(x_1,x_2) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{array} \right.$$

n'est pas identiquement nul, pour obtenir la liberté de la famille $(x_1, x_2)$.

**(4) Conclusion sur l'ensemble solution de $(\mathcal{EH}_2)$.**— On applique le théorème de Cauchy linéaire pour les EDLS2 homogènes pour justifier :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_2) = \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2)$$

**(5) Une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$.**— On recherche une solution de $(\mathcal{E}_2)$ en appliquant la méthode de variations des constantes, i.e. on détermine deux fonctions $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ telles que :

$$\forall\, t \in I \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

et on calcule :

$$x_{\text{part}} := \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2$$

que l'on sait être solution de $(\mathcal{E}_2)$.

**(6) Conclusion sur l'ensemble solution de $(\mathcal{E}_2)$.**— Le principe de superposition a pour conséquence :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{E}_2) = x_{\text{part}} + \mathrm{Sol}(\mathcal{EH}_2) = x_{\text{part}} + \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t) + x_{\text{part}}(t) \end{array} \right. \ : \ (k_1, k_2) \in \mathbf{K}^2 \right\}$$

## 13. Exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires non normalisées

***Exercice 68.*** — Résoudre sur l'intervalle $\mathbf{R}$ l'équation différentielle :

$$t^2\, y' - y = 0$$

***Exercice 69.*** — Résoudre sur l'intervalle $\mathbf{R}$ l'équation différentielle :

$$(1-t)\, y' - y = t$$

***Exercice 70.*** — Soit l'équation différentielle :

$$x\,(x-1)\, y'' + 3\, x\, y' + y = 0$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbf{R}$, avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de :
$$x\,(x-1)\, y'' + 3\, x\, y' + y = 0$$
sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$ ?

***Exercice 71.*** — $a$ et $b$ étant deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2\, y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$$

On note $S^+$ l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $I = ]0, +\infty[$ et $S^-$ l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $J = ]-\infty, 0[$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel $S$ des fonctions $y$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant $(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces $S^+$ et $S^-$.
2. On note $\varphi$ l'application linéaire de $S$ vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où $f_I$ désigne la restriction de $f$ à l'intervalle $I$ et $f_J$ désigne la restriction de $f$ à l'intervalle $J$. Donner le noyau de l'application $\varphi$ et en déduire que $\dim(S) \leqslant 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où :
$$(\mathcal{E}) \quad x^2\, y'' + x\, y' = 0$$
Determiner $S^+$ et $S^-$. Determiner ensuite $S$ et donner sans détails la dimension de $S$ .
4. Dans cette question :
$$(\mathcal{E}) \quad x^2\, y'' - 6\, x\, y' + 12\, y = 0$$
Déterminer deux solutions sur $I$ de cette équation de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ ( $\alpha$ réel). En déduire $S^+$ puis $S^-$. Déterminer $S$ et donner la dimension de $S$.
5. Donner un exemple d'équation différentielle du type :
$$(\mathcal{E}) \quad x^2\, y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$$
tel que $\dim(S) = 0$ (on détaillera). On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

***Exercice 72. —*** On considère dans cette partie l'équation différentielle :
$$(\mathcal{E}_1) \qquad x^2\, y'' + a\, x\, y' + b\, y = 0$$
où $a$ et $b$ sont des constantes réelles.

1. Que dire de la structure de l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_1)$ sur $I = ]0, +\infty[$ ? Et sur $J = ]-\infty, 0[$ ?
2. Démontrer que si $y$ est une solution de $(\mathcal{E}_1)$ sur $I$, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :
$$(\mathcal{E}_2) \qquad u'' + (a-1)\, u' + b\, u = 0$$
3. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de $(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathbf{R}$. Démontrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ sur $I$.
4. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation $(\mathcal{E}_2)$ dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation $(\mathcal{E}_1)$ sur l'intervalle $I$.