Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

1. Adjoint d'un endomorphisme ... 2
1.1. Théorème de Riesz sur la représentabilité des formes linéaires sur un espace euclidien ... 2
1.2. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme ... 2
1.3. Propriété de l'adjoint ... 2
1.4. Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée ... 2
1.5. Une propriété de stabilité pour l'ajoint ... 2
2. Matrices orthogonales ... 3
2.1. Définition d'une matrice orthogonale ... 3
2.2. Caractérisation des matrices orthogonales ... 3
2.3. Matrice orthogonale versus matrice de changement de base orthonormée ... 3
2.4. Groupe orthogonal ... 4
2.5. Matrices orthogonalement semblables ... 4
2.6. Groupe spécial orthogonal ... 5
2.7. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte ... 5
2.8. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie ... 5
2.9. Forme volume sur un espace euclidien orienté ... 6
3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien ... 6
3.1. Définition d'une isométrie vectorielle ... 6
3.2. Symétrie orthogonale ... 6
3.3. Un projecteur orthogonal de E distinct de id_E n'est pas une isométrie vectorielle ... 7
3.4. Réflexion ... 7
3.5. Caractérisation des isométries vectorielles ... 7
3.6. Groupe orthogonal d'un espace euclidien ... 7
3.7. Déterminant d'une isométrie vectorielle, isométrie directe, isométrie indirecte ... 8
3.8. Groupe spécial orthogonal de E ... 8
4. Isométrie vectorielle en dimension 2 ... 9
4.1. Description des matrices orthogonales de format $(2, 2)$ ... 9
4.2. Le morphisme canonique de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$ ... 9
4.3. Classification des isométries vectorielles d'un plan orienté ... 9
4.4. Mesure d'angle orienté de deux vecteurs non nuls d'un plan euclidien orienté ... 10
5. Réduction des isométries vectorielles ... 11
5.1. Existence d'une droite ou d'un plan stable ... 11
5.2. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie ... 12
5.3. Le théorème de réduction des isométries d'un espace euclidien ... 12
5.4. Théorème de réduction des matrices orthogonales ... 13
6. Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3 ... 14
6.1. Théorème de réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3 ... 14
6.2. Interprétation géométrique d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3 ... 14
6.3. Une méthode pour étudier une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3 ... 15
6.4. Une exemple d'étude d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3 ... 15
7. Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien ... 15
7.1. Définition d'un endomorphisme autoadjoint ... 15
7.2. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint ... 15
7.3. Caractérisation des endomorphismes autoadjoints ... 16
7.4. Structure de l'ensemble des endomorphismes autoadjoints ... 16
7.5. Caractérisation des projecteurs orthogonaux ... 16
7.6. Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints ... 16
7.7. Théorème spectral pour les matrices symétriques à coefficients réels ... 18
8. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif ... 19
8.1. Définition d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif ... 19
8.2. Caractérisation spectrale d'un endomorphisme positif, défini positif ... 20
8.3. Définition d'une matrice symétrique positive, définie positive ... 20
8.4. Endomorphismes autoadjoints positifs, déf. positifs vs. matrices symétriques positives, déf. positives ... 20
8.5. Caractérisation spectrale des matrices symétriques positives, définies positives ... 20

1. Adjoint d'un endomorphisme

Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

1.1. Théorème de Riesz sur la représentabilité des formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème 1. — *L'application :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \langle x , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ y & \longmapsto & \langle x , y \rangle \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels.*

Remarque 2. — Soit f une forme linéaire sur E. D'après le théorème 1 :

$$\exists ! \, x \in E \quad \forall y \in E \quad f(y) = \langle x , y \rangle$$

On dit que le vecteur x de E représente la forme linéaire f.

1.2. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme

Proposition-Définition 3. — *Soit u un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé adjoint de u, tel que :*

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle u(x) , y \rangle = \langle x , u^*(y) \rangle \qquad [\textit{propriété caractéristique de l'adjoint}]$$

1.3. Propriété de l'adjoint

Proposition 4. — *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.*

1. $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$ $\quad$ [*linéarité de l'adjonction*]
2. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ $\quad$ [*adjoint d'une composée*]
3. $(u^*)^* = u$ $\quad$ [*involutivité de l'adjonction*]

1.4. Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée

Proposition 5. — *Soit u un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$$

Exercice 6. — On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, 4x-3y+5z, -x+7y-2z). \end{array} \right.$$

Calculer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $u^*(x,y,z)$.

1.5. Une propriété de stabilité pour l'ajoint

Proposition 7. — *Soient u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

$$F \text{ est stable par } u \quad \Longrightarrow \quad F^\perp \text{ est stable par } u^*$$

2. Matrices orthogonales

Notation. — Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

2.1. Définition d'une matrice orthogonale

Définition 8. — *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite orthogonale si :*

$$A^\top A = I_n$$

Remarque 9. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. La matrice A est orthogonale si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = A^\top$.
2. Si A est une matrice orthogonale, alors la matrice $A^{-1} = A^\top$ est orthogonale.

Exemple 10. — Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Exemple 11. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et u_σ l'unique endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \qquad u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

Démontrer que la matrice $P_\sigma := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_\sigma)$ est orthogonale.

2.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Rappel 12. — Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est défini par :

$$\forall\,(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad \langle\, X\,,\, Y\,\rangle = X^\top Y$$

Le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ est défini par :

$$\forall\,(x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \qquad \langle\, x\,,\, y\,\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$$

Proposition 13. — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont notées $C_1,\dots,C_n$ et les lignes $L_1,\dots,L_n$.*

1. *La matrice A est orthogonale si et seulement si $(C_1,\dots,C_n)$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ usuel.*
2. *La matrice A est orthogonale si et seulement si $(L_1,\dots,L_n)$ est une base orthonormée l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ usuel.*

Exercice 14. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ muni de sa base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ et du produit scalaire usuel $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale. On note $C_1,\dots,C_n$ les vecteurs colonnes de A et on pose $u := \sum_{i=1}^n e_i$ et $v := \sum_{i=1}^n C_i$.

1. Calculer $\langle\, u\,,\, v\,\rangle$ et en déduire que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leqslant n$.
2. L'inégalité précédente est-elle optimale ?

2.3. Matrice orthogonale versus matrice de changement de base orthonormée

Proposition 15. — *Soient $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.*

1. *Si $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$ est une base orthonormée de E, alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ est orthogonale.*
2. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice orthogonale, alors l'unique base $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$ de E tel que $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = A$ est une base orthonormée de E.*

Exercice 16. — Soient $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, $u_1 := (0,1,1)$, $u_2 := (1,0,1)$ et $u_3 := (1,1,0)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} := (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer la base $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}^3$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$.
3. Expliciter la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{C}}$. Quelle propriété remarquable possède-t-elle ?

2.4. Groupe orthogonal

Proposition 17. — *L'ensemble :*

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A^\top A = I_n\right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$*, appelé groupe orthogonal.*

Exemple 18. — Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, les matrices :

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

appartiennent à $\mathbf{O}_2(\mathbf{R})$.

Exemple 19. —

1. Si $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^*$, $A_1 \in \mathbf{O}_{n_1}(\mathbf{R})$ et $A_2 \in \mathbf{O}_{n_2}(\mathbf{R})$, alors $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_{n_1+n_2}(\mathbf{R})$.
2. Plus généralement, si $n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbf{N}^*$, $A_1 \in \mathbf{O}_{n_1}(\mathbf{R}), A_2 \in \mathbf{O}_{n_2}(\mathbf{R}), \ldots, A_p \in \mathbf{O}_{n_p}(\mathbf{R})$, alors :
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_{n_1+n_2+\ldots+n_p}(\mathbf{R})$$
3. En particulier, si $(\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbf{R}^p$, alors la matrice :
$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$
est orthogonale

Exercice 20. — Soient $M \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et λ une valeur propre complexe de M. Démontrer que $|\lambda| = 1$.

Indication : on pourra introduire un vecteur propre $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ de M associé à la valeur propre λ et calculer le nombre réel :

$$\left(\overline{M\,Z}\right)^\top \, M\,Z$$

de deux manières.

Exercice 21. — Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2.5. Matrices orthogonalement semblables

Définition 22. — *Deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont dites orthogonalement semblables si :*

$$\exists\, P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \qquad A = P\,B\,P^\top$$

Remarque 23. — Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont orthogonalement semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de E dans deux bases orthonormées.

Remarque 24. — La relation « être orthogonalement semblables » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2.6. Groupe spécial orthogonal

Proposition 25. — *L'ensemble :*

$$\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \ : \ \det(A) = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}), \times)$, *appelé groupe spécial orthogonal.*

Exemple 26. — Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, les matrices :

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

appartiennent à $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 27. — Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2.7. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte

Proposition 28. — *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. *Alors*

$$A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \quad \Longrightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$$

La réciproque de l'implication de la proposition 28 est fausse si $n \geqslant 2$. La matrice $\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{2}, 2, 1, \ldots, 1\right)$ donne un contre-exemple.

Définition 29. — *Soit* $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

1. *La matrice A est dite positive ou directe si* $\det(A) = 1$.
2. *La matrice A est dite négative ou indirecte si* $\det(A) = -1$.

Exercice 30. — Soit μ l'application définie par :

$$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & \mathrm{diag}\,(-1, 1, \ldots, 1)\ A \end{array} \right.$$

1. Justifier que l'application μ est bien définie.
2. Démontrer que μ induit une bijection de $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$.
3. Démontrer que μ induit une bijection de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$.

2.8. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Notation. — Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Lemme 31. — *On définit la relation $\sim$ sur l'ensemble des bases de E en posant, pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E :*

$$\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E, qui comporte deux classes d'équivalence.

Définition 32. — *Une orientation de E est le choix d'une des deux classes d'équivalence pour la relation $\sim$ sur l'ensemble des bases de E définie dans le lemme 31.*

N.B. En pratique, on oriente E en fixant une base $\mathcal{B}$ de E. L'orientation de E est alors donnée par la classe de $\mathcal{B}$ pour la relation $\sim$ sur l'ensemble des bases de E.

Définition 33. — *Supposons l'espace E orienté par le choix d'une base $\mathcal{B}_0$.*

1. *Une base $\mathcal{B}$ de E est dite directe si :*
$$\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \det\left(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}\right) > 0$$
i.e. si $\mathcal{B}$ définit la même orientation de E.
2. *Une base $\mathcal{B}$ de E est dite indirecte si :*
$$\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \det\left(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}\right) < 0$$
i.e. si $\mathcal{B}$ définit l'autre orientation de E.

2.9. Forme volume sur un espace euclidien orienté

Proposition 34. — *Supposons ici que E est muni d'un produit scalaire $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ de sorte que $(E, \langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle)$ est un espace euclidien. Si deux bases orthonormées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E définissent la même orientation de E, alors :*
$$\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in E^n \qquad \det_{\mathcal{B}_1}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}_2}(x_1, \ldots, x_n)$$

Démonstration. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. D'après le cours de MP2I :
$$\det_{\mathcal{B}_1}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\ \det_{\mathcal{B}_2}(x_1, \ldots, x_n) = \det\left(P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right)\ \det_{\mathcal{B}_2}(x_1, \ldots, x_n)$$
Le matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ est orthogonale et positive. Son déterminant vaut donc 1.

□

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

3.1. Définition d'une isométrie vectorielle

Définition 35. — *Un endomorphisme u de E est appelé isométrie vectorielle de E (ou automorphisme orthogonal de E) si :*
$$\forall\, x \in E \qquad ||\, u(x)\, || = ||\, x\, || \qquad [u \text{ préserve la norme}]$$

Remarque 36. — Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.

3.2. Symétrie orthogonale

Définition 37. — *Une symétrie s de E, i.e. un endomorphisme s de E tel que $s^2 = \mathrm{id}_E$, est appelée symétrie orthogonale si :*
$$\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) \perp \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$$

Proposition 38. — *Si s est une symétrie orthogonale de E, alors s est une isométrie vectorielle de E.*

Exercice 39. — Soit F un sous-espace vectoriel de E. On considère la symétrie s_F par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$ définie par :
$$s \left| \begin{array}{ccc} E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_{F^\perp} & \longmapsto & s(x) = x_F - x_{F^\perp} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que s_F est une symétrie orthogonale.
2. Justifier que s_F est une isométrie vectorielle.
3. Démontrer que $s_F = 2\, p_F - \mathrm{id}_E$, où p_F est la projection orthogonale de E sur F.
4. Déduire du résultat de la question 3 une autre démonstration du résultat de la question 2.

3.3. Un projecteur orthogonal de E distinct de id_E n'est pas une isométrie vectorielle

Rappel 40. — Un projecteur p de E, i.e. un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$, est appelé projecteur orthogonal si :

$$\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$$

Si p est un projecteur orthogonal de E, distinct de id_E, alors p n'est pas une isométrie vectorielle de E. En effet, une telle projection orthogonale n'est pas injective.

3.4. Réflexion

Définition 41. — *Soient H un hyperplan de E. La symétrie orthogonale r_H de E par rapport à H est appelée réflexion de E par rapport à H.*

Proposition 42. — *Soient H un hyperplan de E et a un vecteur unitaire de la droite $H^\perp$. La réflexion de E par rapport à H, qui s'écrit :*

$$r_H \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & r_H(x) = x - 2\,\langle\, x\,,\, a\,\rangle\, a \end{array} \right.$$

est une isométrie vectorielle.

3.5. Caractérisation des isométries vectorielles

Rappel 43. — Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\langle\, x\,,\, y\,\rangle = \frac{1}{4}\left(||\, x+y\,||^2 - ||\, x-y\,||^2\right) \qquad \text{[identité de polarisation]}$$

Théorème 44. — *Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est une isométrie vectorielle.*
2. $\forall\,(x, y) \in E^2 \quad \langle\, u(x)\,,\, u(y)\,\rangle = \langle\, x\,,\, y\,\rangle$ $\qquad$ [*u préserve le produit scalaire*]
3. *Pour toute BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E.*
4. *Il existe une BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E.*
5. *u est un automorphisme de E et $u^{-1} = u^*$.*

Exercice 45. — Soit $f\colon E \longrightarrow E$ une application (que l'on ne suppose pas linéaire).

1. On suppose que :

$$\forall\,(x, y) \in E^2 \quad \langle\, f(x)\,,\, f(y)\,\rangle = \langle\, x\,,\, y\,\rangle \qquad [f \text{ préserve le produit scalaire}]$$

Démontrer que l'application f est linéaire.

2. On suppose que :

$$\forall\, x \in E \quad ||\, f(x)\,|| = ||\, x\,|| \qquad [f \text{ préserve la norme}]$$

Démontrer qu'il existe un point a de E et une isométrie vectorielle u de E tels que :

$$\forall\, x \in E \qquad f(x) = a + u(x) \qquad [\text{donc l'application } f \text{ est affine}]$$

3.6. Groupe orthogonal d'un espace euclidien

Proposition 46. — *L'ensemble :*

$$\mathbf{O}(E) := \{u \in \mathcal{L}\,(E)\ :\ u \text{ est une isométrie vectorielle}\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal de E.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. L'application :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{GL}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}), \times) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes. Donc :

$$\mathbf{O}(E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,)^{-1}(\mathbf{O}_n(\mathbf{R})) \qquad \text{[cf. théorème 44]}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}(E), \circ)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,)$ induit un isomorphisme du groupe $(\mathbf{O}(E), \circ)$ sur le groupe $(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}), \times)$. □

3.7. Déterminant d'une isométrie vectorielle, isométrie directe, isométrie indirecte

Proposition 47. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$u \in \mathbf{O}(E) \quad \Longrightarrow \quad \det(u) \in \{-1, 1\}$$

Un endomorphisme de E dont le déterminant vaut -1 ou 1 n'est pas nécessairement une isométrie vectorielle. En effet, considérons $\mathbf{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel et l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, y) \end{array} \right.$$

Sa matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont $\det(u) = 1$. Cependant, u n'est pas une isométrie vectorielle puisque $||\, e_2 \,|| = 1$ et $||\, u(e_2) \,|| = ||\, e_1 + e_2 \,|| = \sqrt{2}$.

Définition 48. — *Soit $u \in \mathbf{O}(E)$.*

1. *On dit que l'isométrie vectorielle E est directe si* $\det(u) = 1$.
2. *On dit que l'isométrie vectorielle E est indirecte si* $\det(u) = -1$.

Exercice 49. — On munit $\mathbf{R}^2$ de son produit scalaire usuel et on définit les applications u et v par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x - \frac{1}{2}\, y \,,\ \frac{1}{2}\, x + \frac{\sqrt{3}}{2}\, y \right) \end{array} \right. \qquad\qquad v \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (-y \,,\ -x) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que u et v sont des isométries vectorielles.
2. Préciser la nature géométrique de u et son caractère direct ou indirect.
3. Préciser la nature géométrique de v et son caractère direct ou indirect.

3.8. Groupe spécial orthogonal de E

Proposition 50. — *L'ensemble :*

$$\mathbf{SO}(E) := \{u \in \mathbf{O}(E) \ :\ \det(u) = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{O}(E), \circ)$, appelé groupe spécial orthogonal de E.

Remarque 51. — Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{SO}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}), \times) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

est bien définie et est un isomorphisme de groupes.

4. Isométrie vectorielle en dimension 2

4.1. Description des matrices orthogonales de format $(2,2)$

Théorème 52. — *L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ orthogonales se décompose comme suit :*

$$\mathbf{O}_2(\mathbf{R}) = \underbrace{\left\{ R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \ : \ \theta \in \mathbf{R} \right\}}_{\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})} \bigsqcup \underbrace{\left\{ S(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \ : \ \theta \in \mathbf{R} \right\}}_{\mathbf{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})}$$

Remarque 53. — Le groupe $(\mathbf{O}_2(\mathbf{R}), \times)$ n'est pas abélien. En effet, $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R})$ et :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 54. — Soit $M \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$. Démontrer que M est orthogonalement semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2. Le morphisme canonique de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$

Proposition 55. — *L'application R définie par :*

$$R \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto & R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes, qui est surjectif et de noyau $2\pi\mathbf{Z}$.

Corollaire 56. — *Les groupes $(\mathbf{U}, \times)$ et $(\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$ sont isomorphes.*

Éléments de démonstration. On vérifie que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{U}, \times) & \longrightarrow & (\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}), \times) \\ z & \longmapsto & R(\arg(z)) := \begin{pmatrix} \cos(\arg(z)) & -\sin(\arg(z)) \\ \sin(\arg(z)) & \cos(\arg(z)) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle est un isomorphisme de groupes. □

Corollaire 57. — *Le groupe $(\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$ est abélien.*

4.3. Classification des isométries vectorielles d'un plan orienté

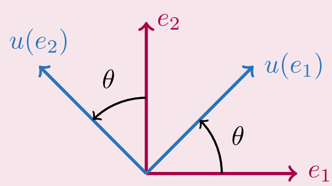
Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ désigne un plan euclidien, i.e. un espace euclidien de dimension 2. On le munit d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, qui l'oriente.

Lemme 58. — *Soit u une isométrie vectorielle directe du plan euclidien orienté E.*

Il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que :

- $u(e_1) = \cos(\theta)\, e_1 + \sin(\theta)\, e_2$
- $u(e_2) = -\sin(\theta)\, e_1 + \cos(\theta)\, e_2$

L'endomorphisme u est donc la rotation d'angle θ du plan E.



Démonstration. Comme $u \in \mathbf{SO}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$. D'après la proposition 55, il existe donc un réel θ, unique modulo 2π, tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Par suite, $u(e_1) = \cos(\theta)\, e_1 + \sin(\theta)\, e_2$ et $u(e_2) = -\sin(\theta)\, e_1 + \cos(\theta)\, e_2$.

□

Lemme 59. — *Soit u une isométrie vectorielle indirecte du plan euclidien E. Alors u est une réflexion. Il existe donc une base orthonormée $\mathcal{C}$ de E telle que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Comme $u \in \mathbf{O}(E) \setminus \mathbf{SO}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$. D'après la proposition 52, il existe donc un réel θ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de u est donc $\chi_u = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Comme χ_u est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, l'endomorphisme u est donc diagonalisable. Nous en déduisons que $\mathrm{Spec}(u) = \{-1, 1\}$ et $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$. On calcule :

$$E_1(u) = \mathrm{Vect}\left((\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))\right) \qquad \text{et} \qquad E_{-1}(u) = \mathrm{Vect}\left((\sin(\theta/2), -\cos(\theta/2))\right)$$

L'endomorphisme u est la réflexion du plan euclidien E par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\left((\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))\right)$. La base $\mathcal{C} := ((\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)), (\sin(\theta/2), -\cos(\theta/2)))$ est orthonormée et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Théorème 60. — *Soit u un endomorphisme du plan euclidien orienté E.*

1. *Si u est une isométrie vectorielle directe, alors u est une rotation.*
2. *Si u est une isométrie vectorielle indirecte, alors u est une réflexion.*

Exercice 61. — Soit ρ une rotation du plan euclidien orienté E. Démontrer qu'il existe deux réflexions orthogonales r_1 et r_2 de E telles que $u = r_1 \circ r_2$.

4.4. Mesure d'angle orienté de deux vecteurs non nuls d'un plan euclidien orienté

Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle)$ désigne un plan euclidien, i.e. un espace euclidien de dimension 2. On le munit d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, qui l'oriente.

Lemme 62. — *Soit x un vecteur unitaire du plan euclidien orienté E. Alors il existe un unique vecteur y de E tel que (x, y) est une base orthonormée directe de E.*

Démonstration. La droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(x)^{\perp}$ possède deux vecteurs unitaires, opposés l'un de l'autre. Si y est l'un d'eux, alors les deux seules bases orthonormées de E comportant x comme premier vecteur sont (x, y) et $(x, -y)$. Comme :

$$\det_{\mathcal{B}}(x, -y) = -\det_{\mathcal{B}}(x, y)$$

une et une seule d'entre elles est directe.

□

Définition 63. — *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, qui l'oriente, et x_1, x_2 deux vecteurs non nuls de E. Soient y_1 l'unique vecteur de E telle que $\mathcal{B}_1 := \left(\dfrac{x_1}{||\,x_1\,||}, y_1\right)$ est une base orthonormée directe de E et y_2 l'unique vecteur de E telle que $\mathcal{B}_2 := \left(\dfrac{x_2}{||\,x_2\,||}, y_2\right)$ est une base orthonormée directe de E. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ est orthogonale et positive, donc il existe un réel θ tel que :*

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \left[\text{en particulier } \frac{x_2}{||\,x_2\,||} = \cos(\theta)\,\frac{x_1}{||\,x_1\,||} + \sin(\theta)\,y_1\right]$$

Ce nombre réel θ, unique modulo 2π, est appelé mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs (x_1, x_2) et on note $\widehat{(x_1, x_2)} = \theta \quad [2\pi]$.

Exercice 64. — L'objet de cet exercice est d'établir les principales propriétés de la notion de mesure d'angle orienté, définie précédemment.

1. Soit x un vecteur non nul de E. Justifier que $\widehat{(x, x)} = 0 \quad [2\pi]$.
2. Soit x un vecteur non nul de E. Justifier que $\widehat{(x, -x)} = \pi \quad [2\pi]$.
3. Soient x, y, z trois vecteurs non nuls de E. Démontrer que $\widehat{(x, y)} + \widehat{(y, z)} = \widehat{(x, z)} \quad [2\pi]$.

5. Réduction des isométries vectorielles

5.1. Existence d'une droite ou d'un plan stable

Théorème 65. — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 3$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2 de E qui est stable par u.*

Démonstration.

- *Cas où u possède une valeur propre réelle.* — Supposons que u possède une valeur propre réelle λ. Si x est un vecteur propre de u, alors la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.
- *Cas où u ne possède aucune valeur propre réelle.* — Supposons que u ne possède aucune valeur propre réelle.
  - La décomposition de χ_u en produit d'irréductibles unitaires dans $\mathbf{R}[X]$ est donc de la forme :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{r} \left(X^2 + a_k\,X + b_k\right)^{m_k}$$

  où $(a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)$ sont des couples de réels distincts tels que $a_1^2 - 4\,b_1 < 0\,,\ \ldots\,,\ a_r^2 - 4\,b_r < 0$ et $m_1, \ldots, m_r$ sont des entiers naturels non nuls.
  - D'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\chi_u(u) = \left(u^2 + a_1\,u + b_1\ \mathrm{id}_E\right)^{m_1} \circ \left(u^2 + a_2\,u + b_2\ \mathrm{id}_E\right)^{m_2} \circ \ldots \circ \left(u^2 + a_r\,u + b_r\ \mathrm{id}_E\right)^{m_r} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

  - Nous démontrons que $\mathrm{Ker}\left(u^2 + a_1\,u + b_1\ \mathrm{id}_E\right) \neq \{0_E\}$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\mathrm{Ker}\left(u^2 + a_1\,u + b_1\ \mathrm{id}_E\right) = \{0_E\}$. Comme E est de dimension finie, $u^2 + a_1\,u + b_1\ \mathrm{id}_E$ est un isomorphisme de E. Par suite :

$$\left(u^2 + a_2\,u + b_2\ \mathrm{id}_E\right)^{m_2} \circ \ldots \circ \left(u^2 + a_r\,u + b_r\ \mathrm{id}_E\right)^{m_r} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

  donc le polynôme $\displaystyle\prod_{k=2}^{r} \left(X^2 + a_k\,X + b_k\right)^{m_k}$ annule u.

  Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, que nous considérons comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, bien qu'elle soit à coefficients réels. Comme $\chi_u = \chi_M$, les racines complexes :

$$\frac{-a_1 - i\,\sqrt{4\,b_1 - a_1^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-a_1 + i\,\sqrt{4\,b_1 - a_1^2}}{2}$$

  de $X^2 + a_1\,X + b_1$ sont des valeurs propres complexes de M. Elles sont donc racines de tout polynôme annulateur à coefficients complexes de M, en particulier du polynôme $\displaystyle\prod_{k=2}^{r} \left(X^2 + a_k\,X + b_k\right)^{m_k}$. Contradiction.

— Soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\left(u^2 + a_1\, u + b_1\, \mathrm{id}_E\right)$. Comme :

$$u(x) \in \mathrm{Vect}\,(x, u(x)) \qquad \text{et} \qquad u(u(x)) = u^2(x) = -b_1\, x - a_1\, u(x) \in \mathrm{Vect}\,(x, u(x))$$

le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(x, u(x))$ est stable par u. Il nous reste à démontrer que la famille $(x, u(x))$ est libre, pour conclure à l'existence d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E, qui est stable par u.

— Si la famille $(x, u(x))$ était liée, alors, comme $x \neq 0_E$, il existerait $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u(x) = \lambda\, x$. Le nombre réel λ serait donc une valeur propre réelle de u, ce qui n'est pas.

□

Dans le théorème 65, l'hypothèse « E est de dimension finie » est essentielle, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 66. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & X\,P \end{array} \right.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Le sous-espace vectoriel F est stable par u.

(b) Il existe un polynôme $A \in \mathbf{K}[X]$ tel que $F = A\,\mathbf{K}[X]$.

Il n'existe donc aucun sous-espace de $\mathbf{K}[X]$ de dimension finie stable par u autre que $\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$.

5.2. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie

Théorème 67. — *Soient $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $u \in \mathbf{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.*

5.3. Le théorème de réduction des isométries d'un espace euclidien

Théorème 68. — *$(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathbf{O}(E)$. Il existe :*

(a) *une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E*

(b) *des nombres réels $\theta_1, \ldots, \theta_r$*

tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

où, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence forte sur $n \geqslant 1$, la dimension de l'espace euclidien ambiant.

— Initialisation à $n = 1$. Soit E un espace euclidien de dimension 1 et u une isométrie vectorielle de E. Si e_1 est un vecteur unitaire de E, alors $u(e_1) \in E = \mathrm{Vect}\,(e_1)$. Il existe donc un réel λ tel que $u(e_1) = \lambda\, e_1$. Comme u est une isométrie, nécessairement $|\lambda| = 1$. Ainsi $\mathrm{Mat}_{(e_1)}(u) = (\pm 1)$. Le résultat est démontré pour $n = 1$.

— Initialisation à $n = 2$. Soit E un plan euclidien et u une isométrie vectorielle de E.

. Si u est une isométrie directe du plan et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée du plan E alors, d'après le lemme 58, il existe un réel θ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$$

. Si u est une isométrie indirecte du plan alors, d'après le lemme 59, il existe une base orthonormée $\mathcal{C}$ du plan E tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons établi le résultat pour $n = 2$.

— Hérédité. Soit un entier $n \geqslant 2$ tel que le résultat soit établi pour tous les espaces euclidiens de dimension $1, 2, \dots, n$. Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$ et u une isométrie vectorielle de E.

. D'après le théorème 65, il existe un sous-espace vectoriel F de E, qui est de dimension 1 ou 2 et stable par u. L'endomorphisme u_F de l'espace vectoriel F est une isométrie vectorielle de F (équipé du produit scalaire induit par celui de E). D'après l'initialisation à $n = 1$ et $n = 2$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_F$ de F telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) \in \left\{ (\pm 1), R(\theta), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad [\text{avec } \theta \in \mathbf{R}]$$

. D'après le théorème 67, le sous-espace vectoriel $F^\perp$ de E, qui est de dimension n ou $n-1$, est stable par u. L'endomorphisme $u_{F^\perp}$ de l'espace vectoriel $F^\perp$ est une isométrie vectorielle de $F^\perp$ (équipé du produit scalaire induit par celui de E). D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_{F^\perp}$ de $F^\perp$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad [\text{avec } \theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbf{R}]$$

Comme $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, la base $\mathcal{B} := \mathcal{B}_F \# \mathcal{B}_{F^\perp}$ de E est orthonormée. Comme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp}) \end{pmatrix}$$

quitte à permuter les vecteurs de la base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ a la forme voulue.

□

5.4. Théorème de réduction des matrices orthogonales

Corollaire 69. — *Soit $M \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Alors :*

$$\exists\, P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \quad \exists\, \theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbf{R} \qquad M = P \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} P^\top$$

où, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Démonstration. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire usuel et on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Si u est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right.$$

alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = M \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Comme la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est orthonormée, l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est une isométrie vectorielle. D'après le théorème 68, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad [\text{avec } \theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbf{R}]$$

Par théorème de changement de base :

$$(\star) \qquad M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\ \left(P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}\right)^{-1}$$

Comme les bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées, la matrice $P := P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}$ est orthogonale. L'égalité $(\star)$ se réécrit donc :

$$M = P \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} P^\top$$

□

Exercice 70. — Soit $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

1. Déterminer condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
3. Démontrer que les valeurs propres complexes de A sont de module 1.

6. Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3

6.1. Théorème de réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3

Théorème 71. — *Soient $(E, \langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et u une isométrie vectorielle directe de E. Alors il existe une base orthonormale (f_1, f_2, f_3) de E et un nombre réel θ tels que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2. Interprétation géométrique d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3

On considère le contexte donné par le théorème 71 et on donne une interprétation géométrique de u.

(1) **L'axe de rotation $\mathrm{Vect}(f_3)$, fixé par u.** Le vecteur f_3 est un vecteur propre pour u, associé à la valeur propre 1. Nous en déduisons $\mathrm{Vect}(f_3) \subset E_1(u)$, i.e. :

$$\forall\, x \in \mathrm{Vect}(f_3) \qquad u(x) = x$$

Les vecteurs de la droite $\mathrm{Vect}(f_3)$ sont fixés par l'isométrie vectorielle u.

(2) **Le plan orthogonal à la droite $\mathrm{Vect}(f_3)$ est $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.** Comme f_1, f_2 sont orthogonaux à f_3, $f_1 \in \mathrm{Vect}(f_3)^\perp$ et $f_2 \in \mathrm{Vect}(f_3)^\perp$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(f_1, f_2) \subset \mathrm{Vect}(f_3)^\perp$. Par dimensions finies égales :

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(f_3)^\perp$$

(3) **Le plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ est stable par u et l'endomorphisme induit sur ce plan est la rotation d'angle θ.** La famille orthonormale (f_1, f_2) est une base orthonormée du plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, qui l'oriente. On sait que :

$$u(f_1) = \cos(\theta) f_1 + \sin(\theta) f_2 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2) \quad \text{et} \quad u(f_2) = -\cos(\theta) f_1 + \cos(\theta) f_1 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$

On en déduit que le plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ est stable par u De plus :

$$\mathrm{Mat}_{(f_1, f_2)}\left(u_{|\ \mathrm{Vect}(f_1, f_2)}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} =: R(\theta)$$

Donc $u_{|\ \mathrm{Vect}(f_1, f_2)}$ est la rotation plane d'angle θ du plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ orienté par (f_1, f_2).

L'endomorphisme u est la rotation axiale d'axe $\mathrm{Vect}(f_3)$ et d'angle θ, pour l'orientation du plan $\mathrm{Vect}(f_3)^\perp$ fournie par (f_1, f_2).

6.3. Une méthode pour étudier une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3

Soit u une isométrie directe d'un espace vectoriel euclidien $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ de dimension 3, que l'on suppose distincte de l'identité. Pour déterminer ses éléments caractéristiques, on peut procéder comme suit.

(1) Recherche d'un vecteur propre pour la valeur propre 1. On commence par déterminer un vecteur propre unitaire pour la valeur propre 1, que l'on note f_3. La droite $\mathrm{Vect}\,(f_3)$ est l'axe de la rotation.

(2) Détermination d'une base orthonormée plan orthogonal à la droite $\mathrm{Vect}\,(f_3)$. On détermine le plan orthogonal à la droite $\mathrm{Vect}\,(f_3)$, puis une base orthonormée (f_1, f_2) de ce plan.

(3) Calcul de l'angle de la rotation. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2) = \mathrm{Vect}\,(f_3)^{\perp}$ est stable par u (théorème 67). L'endomorphisme $u_{|\ \mathrm{Vect}(f_1,f_2)}$ de $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ est une isométrie directe du plan $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ (équipé du produit scalaire induit par $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$). Il existe donc un réel θ, unique modulo 2π, tel que :

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2)}\left(u_{|\ \mathrm{Vect}(f_1,f_2)}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(4) Conclusion. L'endomorphisme u est la rotation axiale d'axe $\mathrm{Vect}\,(f_3)$ et d'angle θ, pour l'orientation du plan $\mathrm{Vect}\,(f_3)^{\perp}$ fournie par (f_1, f_2).

6.4. Une exemple d'étude d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3

Exercice 72. — On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que u est une isométrie vectorielle directe de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer un vecteur unitaire f_3 de l'axe de la rotation u.
3. Déterminer deux vecteurs f_1 et f_2 tels que (f_1, f_2) est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(f_3)^{\perp}$.
4. Le plan $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ est orienté par la base (f_1, f_2). Quel est l'angle de la rotation u ?

7. Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

7.1. Définition d'un endomorphisme autoadjoint

Définition 73. — *Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint (ou symétrique) si $u = u^*$, i.e. si :*

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad \langle\, u(x)\,,\, y \,\rangle = \langle\, x\,,\, u(y) \,\rangle$$

Exercice 74. — On suppose ici que $n = \dim(E) \geqslant 3$ et on fixe deux vecteurs a, b de E qui sont non colinéaires. On définit l'endomorphisme u de E par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle\, x\,,\, a \,\rangle\, b + \langle\, x\,,\, b \,\rangle\, a \end{array} \right.$$

1. Démontrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\,(u)$, puis $\mathrm{Ker}\,(u)$.
3. Démontrer que u est diagonalisable.
4. Déterminer les éléments propres de u.

7.2. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint

Proposition 75. — *Soient u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u.*

7.3. Caractérisation des endomorphismes autoadjoints

Théorème 76. — *Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est un endomorphisme autoadjoint.*
2. *Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.*
3. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.*

Exemple 77. — On munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel et on note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. L'endomorphisme :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3\,x - y + 2\,z\,,\, -x + 5\,y - 3\,z\,,\, 2\,x - 3\,y - z) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbf{R}^3$. En effet, $\mathcal{B}_c$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbf{R})$$

7.4. Structure de l'ensemble des endomorphismes autoadjoints

Proposition 78. — *L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E, défini par :*

$$\mathcal{S}(E) := \{u \in \mathcal{L}(E) \ : \ u = u^*\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, dont la dimension est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. L'application :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Donc :

$$\mathcal{S}(E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,)^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbf{R})) \qquad \text{[cf. théorème 76]}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\,\cdot\,)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Ainsi $\dim(\mathcal{S}(E))$ égale $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}))$, que l'on sait valoir $\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

7.5. Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Rappel 79. — Un projecteur p de E, i.e. un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$, est appelé projecteur orthogonal si :

$$\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$$

Proposition 80. — *Soit p un projecteur de E. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.*

7.6. Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints

Proposition 81. — *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint de E est scindé sur $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Soient u un endomorphisme autoadjoint de E.

- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, il existe des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\chi_u = \chi_M = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

  Pour démontrer le résultat, il suffit de prouver donc de démontrer que toutes les valeurs propres complexes de M sont réelles.

- Soient λ une valeur propre complexe de M et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de M associé à λ. Nous calculons la matrice $\overline{Z}^\top M\, Z$ de format $(1,1)$, identifiée à un nombre complexe, de deux manières. D'une part :

$$\overline{Z}^\top M\, Z = \overline{Z}^\top \lambda\, Z = \lambda\, \overline{Z}^\top Z = \lambda \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$$

D'autre part :

$$\overline{Z}^\top M\, Z = \left(\overline{Z}^\top M\, Z\right)^\top = Z^\top M^\top \overline{Z} = Z^\top M\, \overline{Z} = Z^\top \overline{M}\, \overline{Z} = Z^\top \overline{M\, Z} = Z^\top \overline{\lambda Z} = Z^\top \overline{\lambda}\, \overline{Z} = \overline{\lambda}\, Z^\top \overline{Z} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$$

Nous en déduisons que $\lambda \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$. Comme $\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \neq 0$, $\lambda = \overline{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbf{R}$.

□

Théorème 82. — *Soit u un endomorphisme de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'endomorphisme u est autoadjoint.*
2. *E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u, i.e. $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)}} E_\lambda(u)$.*
3. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

Démonstration.

- (2) $\Longrightarrow$ (3). Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et supposons que :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_r}(u)$$

Introduisons, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, une base orthonormée $\mathcal{B}_k$ de $E_{\lambda_k}(u)$. Alors $\mathcal{B}_1 \# \ldots \# B_r$ est une base orthonormée de E, formée de vecteurs propres pour u. La matrice $\mathrm{Mat}_B(u)$ est donc diagonale.

- (3) $\Longrightarrow$ (2). Supposons qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u)$ est diagonale et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Quitte à permuter les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, nous pouvons supposer que :
  - $e_1, \ldots, e_{n_1}$ sont des vecteurs propres de u pour la valeur propre λ_1
  - $e_{n_1+2}, \ldots, e_{n_1+n_2}$ sont des vecteurs propres de u pour la valeur propre λ_2
  - $\ldots$
  - $e_{n_1+\ldots+n_{r-1}}, \ldots, e_{n_1+\ldots+n_{r-1}+n_r} = e_n$ sont des vecteurs propres de u pour la valeur propre λ_r.

  Alors :
  - $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{n_1}) \subset E_{\lambda_1}(u)$
  - $\mathrm{Vect}\,(e_{n_1+2}, \ldots, e_{n_1+n_2}) \subset E_{\lambda_2}(u)$
  - $\ldots$
  - $\mathrm{Vect}\left(e_{n_1+\ldots+n_{r-1}}, \ldots, e_{n_1+\ldots+n_{r-1}+n_r} = e_n\right) \subset E_{\lambda_r}(u)$

  Comme l'endomorphisme u est diagonalisable, $\sum_{k=1}^{r} \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{r} \underbrace{\dim(E_{\lambda_k}(u)) - n_k}_{\geqslant 0} = \sum_{k=1}^{r} \dim(E_{\lambda_k}(u)) - \sum_{k=1}^{r} n_k = 0$$

  Nous en déduisons que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $\dim(E_{\lambda_k}(u)) = n_k$. Par suite :
  - $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{n_1}) = E_{\lambda_1}(u)$
  - $\mathrm{Vect}\,(e_{n_1+2}, \ldots, e_{n_1+n_2}) = E_{\lambda_2}(u)$
  - $\ldots$
  - $\mathrm{Vect}\left(e_{n_1+\ldots+n_{r-1}}, \ldots, e_{n_1+\ldots+n_{r-1}+n_r} = e_n\right) = E_{\lambda_r}(u)$

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E :

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_{n_1}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Vect}(e_{n_1+2},\ldots,e_{n_1+n_2}) \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Vect}\left(e_{n_1+\ldots+n_{r-1}},\ldots,e_{n_1+\ldots+n_{r-1}+n_r}=e_n\right) \\ &= E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_r}(u) \end{aligned}$$

- (3) $\Longrightarrow$ (1). Supposons qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ de E et des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Soient x,y des vecteurs de E, dont nous notons $\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ les coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$. Comme la base $\mathcal{B}$ de E est orthonormée :

  — $\langle\, u(x)\,,\, y\,\rangle = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x))^\top \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x))^\top \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1\, x_1\\ \vdots\\ \lambda_n\, x_n\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\, y_k$

  — $\langle\, x\,,\, u(y)\,\rangle = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^\top \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(y)) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^\top \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \lambda_1\, y_1\\ \vdots\\ \lambda_n\, y_n\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\, y_k$

  Ainsi $\langle\, u(x)\,,\, y\,\rangle = \langle\, x\,,\, u(y)\,\rangle$. L'endomorphisme u est donc autoadjoint.
- (1) $\Longrightarrow$ (3). Nous démontrons par récurrence sur $n\in\mathbf{N}^*$ que :

  $\mathcal{P}(n)$: « Pour tout espace euclidien E de dimension n, pour tout endomorphisme autoadjoint u de E, il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u. »

  — Initialisation. Soit E un espace euclidien de dimension 1 et u un endomorphisme (nécessairement) autoadjoint de E. Si e_1 est un vecteur unitaire de E, alors $u(e_1)\in E=\operatorname{Vect}(e_1)$, donc e_1 est un vecteur propre pour u. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est établie.

  — Hérédité. Soit $n\in\mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$ et u un endomorphisme autoadjoint de E. D'après la proposition 81, u possède une valeur propre (réelle) λ. Soit e_1 un vecteur propre unitaire de u associé à la valeur propre λ. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(e_1)$ est stable par u. Donc le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(e_1)^\perp$ est également stable par u (cf. proposition 75). L'endomorphisme $u_{\operatorname{Vect}(e_1)^\perp}$ de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}(e_1)^\perp$, muni du produit scalaire induit par celui de E, est autoadjoint. Comme $\dim\left(\operatorname{Vect}(e_1)^\perp\right)=n$, l'hypothèse de récurrence nous livre une base orthonormée $(e_2,\ldots,e_{n+1})$ de $\operatorname{Vect}(e_1)^\perp$ formée de vecteurs propres pour $u_{\operatorname{Vect}(e_1)^\perp}$, donc pour u. Comme $E=\operatorname{Vect}(e_1)\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Vect}(e_1)^\perp$, la famille $\mathcal{B}:=(e_1,e_2,\ldots,e_{n+1})$ est une base orthonormée de E. Par construction, chacun des vecteurs de $\mathcal{B}$ est un vecteur propre pour u. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est démontrée.

$\square$

7.7. Théorème spectral pour les matrices symétriques à coefficients réels

Corollaire 83. — *Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
1. *La matrice M est symétrique.*
2. *M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, i.e. :*

$$\exists\, P\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \qquad \exists\, \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{R} \qquad M=P\ \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\ P^\top$$

D'après le théorème 83, toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Le fait que les coefficients de la matrice soient réels est fondamental dans le théorème 83. Par exemple, la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$$

est symétrique, mais n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, comme son polynôme caractéristique est X^2, son polynôme minimal serait X. Aussi la matrice M serait-elle nulle.

Démonstration.

- (1) $\Longrightarrow$ (2). On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire usuel et on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Supposons $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et introduisons l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right.$$

  alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Comme la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est orthonormée, l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est autoadjoint. D'après le théorème 82, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\ P^\top \qquad [\text{avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}]$$

  Par théorème de changement de base :

$$(\star) \qquad M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\ \left(P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}\right)^{-1}$$

  Comme les bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées, la matrice $P := P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}$ est orthogonale. L'égalité $(\star)$ se réécrit donc :

$$M = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\ P^\top$$

- (2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et des nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$M = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\ P^\top$$

  Nous calculons :

$$M^\top = \left(P^\top\right)^\top\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top\ P^\top = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\ P^\top = M$$

  La matrice M est donc symétrique.

□

Exercice 84. — Étudier la réduction de la matrice $A := \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Exercice 85. — Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 86. — Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. Démontrer que $M^2 = I_n$.

8. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif

Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

8.1. Définition d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif

Définition 87. — *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.*

1. *On dit que u est positif si :*

$$\forall x \in E \qquad \langle u(x)\ ,\ x \rangle \geqslant 0$$

2. *On dit que u est défini positif si*

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad \langle u(x)\ ,\ x \rangle > 0$$

Notation. — L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs est noté $\mathcal{S}^+(E)$, i.e. :

$$\mathcal{S}^+(E) := \{u \in \mathcal{S}(E)\ :\ u \text{ est positif}\}$$

et l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$, i.e. :

$$\mathcal{S}^{++}(E) := \{u \in \mathcal{S}(E)\ :\ u \text{ est défini positif}\}$$

8.2. Caractérisation spectrale d'un endomorphisme positif, défini positif

Théorème 88. — *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.*

1. $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \operatorname{Spec}(u) \subset \mathbf{R}_+$
2. $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \operatorname{Spec}(u) \subset \mathbf{R}_+^*$

Exercice 89. — Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Démontrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$.

8.3. Définition d'une matrice symétrique positive, définie positive

Notation. — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Définition 90. — *Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.*

1. *On dit que A est positive si :*
$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^\top M\, X \geqslant 0$$
2. *On dit que A est définie positive si :*
$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right\} \qquad X^\top M\, X > 0$$

Notation. — L'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ qui sont positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, i.e. :
$$\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \ : \ A \text{ est positive}\}$$
et l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ qui sont définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, i.e. :
$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \ : \ A \text{ est définie positive}\}$$

Exercice 91. — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. On pose $M := \max\{a_{i,i} \ : \ i \in [\![1,n]\!]\}$. Démontrer que :
$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad |a_{i,j}| \leqslant M$$

8.4. Endomorphismes autoadjoints positifs, déf. positifs vs. matrices symétriques positives, déf. positives

Théorème 92. — *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme autoadjoint de E.*

1. $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$
2. $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$

8.5. Caractérisation spectrale des matrices symétriques positives, définies positives

Théorème 93. — *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.*

1. $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \iff \operatorname{Spec}(A) \subset \mathbf{R}_+$
2. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \iff \operatorname{Spec}(A) \subset \mathbf{R}_+^*$

Exercice 94. — Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Démontrer que $\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \dfrac{\operatorname{tr}(A)}{n}$.

Exercice 95. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et des réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :
$$A^\top A = P \ \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ P^\top$$