Lemme de Riemann-Lesbegue :

Q15. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $a=a_0<\dots<a_p=b$ une subdivision adaptée à φ.

On note c_ℓ la valeur de φ sur $]a_\ell, a_{\ell+1}[$, $\ell \in [\![0, n-1]\!]$

$$0 \leq \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,dt\right| \leq \sum_{\ell=0}^{p-1} |c_\ell| \frac{|\cos(na_\ell)-\cos(na_{\ell+1})|}{n}$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{2|c_\ell|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut par théorème d'encadrement.

Q16. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.

Le théorème de Heine affirme que f est UC sur $[a,b]$.

$\exists \alpha \in]0, \frac{b-a}{2}[$ $\forall (x,y) \in [a,b]^2$ $|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

Comme $\frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\alpha > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \frac{b-a}{N} < \alpha$$

où on pose $N = \left\lfloor \frac{b-a}{\alpha} \right\rfloor + 1$

Posons $\forall \ell \in [\![0, N]\!]$ $a_\ell = a + \frac{\ell}{N}(b-a)$

On pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_\ell) & \text{si } a_\ell \leq x < a_{\ell+1} \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Pour tout $x \in [a,b]$ $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $x \in [a_\ell, a_{\ell+1}[$ où $\ell \in [\![0, N-1]\!]$

$$|f(x)-\varphi(x)| = |f(x)-f(a_\ell)| \leq \varepsilon$$

car $|x-a_\ell| \leq \frac{b-a}{N} \leq \alpha$

en b on a : $|f(b)-\varphi(b)| = 0 \leq \varepsilon$.

Par passage au max sur $x \in [a,b]$

$$\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Q17. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$

D'après Q16, $\exists \varphi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ tq $\|f-\varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.

D'après Q15, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(t)\sin(nt)\,dt\right| \leq \varepsilon$.

Soit $n \geq N$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(t)\right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(t)-\varphi_\varepsilon(t)|}_{\leq \varepsilon}\underbrace{|\sin(nt)|}_{\leq 1} dt$$

$$+\underbrace{\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(t)\sin(nt)\,dt\right|}_{\leq \varepsilon} \leq \varepsilon(b-a)+\varepsilon$$

Q18. Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[, \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon>0$.

$\int_b^{+\infty} |f| \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$.

Donc $\exists \beta>0 \quad \forall b \geq \beta \quad \int_\beta^{+\infty} |f| \leq \varepsilon$.

$\int_0^b f(t)\sin(t\,n)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad$ (Q17)

$\exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N \quad \left|\int_0^\beta f(t)\sin(nt)\,dt\right| \leq \varepsilon$.

Soit $n\geq N$

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)\sin(nt)\right| \leq \left|\int_0^b f(t)\sin(nt)\,dt\right| + \int_b^{+\infty}|f| \leq 2\varepsilon.$$