Intégrale de Dirichlet :

Q6. $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$

- $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0
- Les fonctions $u : t \to \frac{1}{t}$, $v : t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.

$u(t)\,v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car cos est bornée

Donc $[u(t)\,v(t)]_1^{+\infty}$ existe

Par intégration par parties :

$$\int_1^{+\infty} f \text{ a même nature que } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Or $\frac{\cos(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ par le critère de Riemann $(2>1)$

Donc $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (théorème de comparaison

Donc f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge.

Q7. $u : t \mapsto \frac{1}{t}$, $v : t \mapsto 1-\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

$u(t)\,v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$$u(t)\,v(t) = \frac{1-\cos(t)}{t} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1-(1+o(t))}{t} \underset{t\to 0^+}{=} o(1) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

Donc $[u(t)\,v(t)]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

Par le théorème d'intégration par parties on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt \text{ converge car } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge}$$

Et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt.$$

si $t \in \mathbb{R}$ $\quad 1-\cos\left(2 \times \frac{t}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2} dt$$

$$\underset{u=\frac{t}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2} (2du).$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du.$

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$

$g_n : t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

et prolongeable par continuité en 0^+ en posant
$g_n(0) = 2n+1$ car $g_n(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{(2n+1)t}{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 2n+1.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ I_n existe

Analogue pour J_n

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+2)t) \; dt$$

$$= 0$$

Donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Q10. $\cdot$ $u : t \mapsto \varphi(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{\cos(nt)}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$\cdot$ φ est $\mathcal{C}^0$ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc φ est bornée (théorème des bornes atteintes).

Par intégration par parties.

$$\circledast = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin(t) \, dt = \left[-\frac{\varphi(t)\cos(nt)}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \cos(nt) dt$$

$$\text{Donc} \quad |\circledast| \underset{\uparrow}{\leq} \underbrace{\frac{|\varphi(\frac{\pi}{2})|}{n} + \frac{|\varphi(0)|}{n} + \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \|\varphi'\|_\infty}_{\underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right).}$$

(croissance de $\int$ et $\leq D$ pour $\int$).

D'où le résultat

Q11.h: $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{\sin(t)-t}{t\sin(t)} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{-\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^2+o(t^3)}$

$$\underset{t\to 0^+}{=} \frac{-t/6+o(t)}{1+o(t)}$$

$$\underset{t\to 0^+}{=} \left(-\frac{t}{6}+o(t)\right)\underbrace{\frac{1}{1+o(t)}}_{1-o(t)} \quad \left(\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+o(u)\right)$$

$$\underset{t\to 0^+}{=} -\frac{t}{6}+o(t).$$

Plus court et moins général :

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} -\frac{t}{6}$$

Donc $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \underset{t\to 0^+}{=} -\frac{t}{6}+o(t).$

Ainsi h est prolongeable par continuité en posant $h(0)=0$

Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et $h'(0)=-\frac{1}{6}$

h est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]$

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{-\sin^2(t)+t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)}.$$

$$-\sin^2(t)+t^2\cos(t) \underset{t\to 0^+}{=} -\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)^2 + t^2\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$

$$= -\left(t^2-\frac{t^4}{3}\right)+t^2-\frac{t^4}{2}+o(t^4) \sim -\frac{t^4}{6}$$

Comme $t^2\sin^2(t) \underset{0^+}{\sim} t^4$, $h'(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{6} \longrightarrow -\frac{1}{6}$

Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \underbrace{\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right)}_{-h(t)} dt$$

Comme $-\hat{h}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (Q11)

Par Q10 donne $I_n - J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Q13. $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$

$$\underset{u=(2n+1)t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2n+1}} \frac{du}{2n+1}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

Par Q6.

$$J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} I.$$

Q14. $J_n = \underbrace{J_n - I_n}_{\substack{n \to +\infty \\ \downarrow (Q12) \\ 0}} + \underbrace{I_n}_{= \frac{\pi}{2} \text{ (Q9)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Par unicité de la limite + Q13 : $I = \frac{\pi}{2}$