CCINP
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI
MATHEMATIQUES 1
Corrigé

EXERCICE I

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $[X = k] = [X > k-1] \setminus [X > k]$ donc
$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(P(X > k-1) - P(X > k)) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) & \\ & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X > j) - \sum_{k=0}^{n} kP(X > k) & [j = k-1] \text{ dans la première somme} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n) & \end{array}$$
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X > k)$. La suite (S_n) est une suite croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} kP(X = k) + (n+1)P(X > n+1)$$
Or la var X est à valeurs positives et admet une espérance donc $P(X > n+1) \leq \dfrac{1}{n+1}E(X)$.
On a donc $S_n \leq 2E(X)$.
La suite (S_n) est croissante majorée donc elle converge. De plus, la suite $(P(X > k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} P(X > k) \geq nP(S > 2n) \geq 0$$
Or $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par théorème d'encadrement, $nP(S > 2n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $2nP(S > 2n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
De plus, $P(S > 2n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0 \leq (2n+1)P(S > 2n+1) \leq 2nP(S > 2n) + P(S > 2n+1)$.
Or $2nP(S > 2n) + P(S > 2n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)P(S > 2n+1) = 0$.
On peut donc conclure que $nP(S > n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on obtient

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X>k)}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note pour tout $1\leq k\leq p$, X_k la variable aléatoire donnant le numéro tiré au k-ième tirage. Les tirages étant réalisés au hasard, X_k suit une loi uniforme de paramètre n. De plus, les variables aléatoires $(X_k)_{1\leq k\leq p}$ sont mutuellement indépendantes. Enfin

$$X=\max(X_1,\ldots,X_p)$$

Pour tout k, $(X\leq k)=\bigcap_{i=1}^{p}[X_i\leq k]$. Les événements $([X_i\leq k])_{1\leq i\leq p}$ sont mutuellement indépendants. On obtient alors

$$P(X\leq k)=\prod_{i=1}^{p}P(X_i\leq k)=\prod_{i=1}^{p}\frac{\min(k,n)}{n}=\left(\frac{\min(k,n)}{n}\right)^p$$

Car $X_i\hookrightarrow\mathcal{U}(n)$.

On en déduit que $X(\Omega)=[\![\,1\,;\,n\,]\!]$ et pour tout $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, en considérant que $P(X\leq 0)=0=\left(\frac{0}{n}\right)^p$

$$P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1)=\frac{k^p-(k-1)^p}{n^p}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme de Riemann dans la formule $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ associée à la fonction $f:x\mapsto x^p$ continue sur $[0,1]$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 t^p\mathrm{d}t=\frac{1}{p+1}$$

En appliquant la question 1 à la variable aléatoire finie X à valeur dans $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on obtient

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)=\sum_{k=0}n-1(1-P(X\leq k))=n-\sum_{k=0}n-1\left(\frac{k}{n}\right)^p=n\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)$$

Or, $1-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-\frac{1}{p+1}=\frac{p}{p+1}$, d'où

$$\boxed{E(X)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\frac{p}{p+1}}$$

EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 1$$
$$(H) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 0$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur l et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

4. Sur I, l'équation différentielle (H) se normalise en une équation différentielle scalaire homogène du deuxième ordre :
$$y'' + 4\frac{1}{x}y' + \frac{(2-x^2)}{x^2}y = 0$$
avec les fonctions $a : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $b : x \mapsto \dfrac{2-x^2}{x^2}$ qui sont continues sur $]0; +\infty[$. On en déduit que $S_I(H)$ est un espace vectoriel de dimension 2.
5. On raisonne par analyse-synthèse.
   - On suppose qu'il existe une fonction f de (E) développable en série entière. On note R son rayon de convergence. On note pour tout $x \in]-R; R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors, pour tout $x \in]-R; R[$,
$$x^2 f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1)x^n$$
$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n x^n$$
On a alors pour tout $x \in]-R, R[$,
$$x^2 f''(x) + 4xf'(x) + (2-x^2)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(n^2 - n + 4n + 2)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n$$
Or f est solution de (E) on a donc pour tout $x \in]-R, R[$,
$$2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_n(n+1)(n+2) - a_{n-2}\right) x^n = 1$$
Par unicité des coefficients, il vient
$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-2} \end{cases}$$
Par une récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = \dfrac{1}{(2n+1)2(n+1)} a_{2(n-1)}$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \dfrac{1}{(2n+2)!}$.
     - La propriété est immédiate au rang 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $a_{2n} = \dfrac{1}{(2n+2)!}$. Alors,

$$a_{2n+2} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} a_{2n} = \frac{1}{(2n+4)!}$$

- Par principe de récurrence la propriété est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

On obtient alors que pour tout $x \in]-R;R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n}$.

De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$\left| \frac{\dfrac{1}{(2n+4)!} x^{2n+2}}{\dfrac{1}{(2n+2)!} x^{2n}} \right| = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+4)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Le rayon de convergence de f est donc $+\infty$.
Sous réserve d'existence, l'unicité est montrée.

- Synthèse : On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n}$. D'après la phase d'analyse, f est définie sur $\mathbb{R}$ et admet un développement en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus, en reprenant les calculs sur les coefficients précédents, f est solution de (E). On en déduit qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x > 0$, $\mathrm{ch}(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n}$. Alors,

$$\frac{\mathrm{ch}\, x - 1}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n} = f(x)$$

6. La fonction f de la question 5 est dans $S_I(E)$ donc $w = f - g \in S_I(H)$. Pour tout $x > 0$, $w(x) = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{x^2}$. Les fonctions $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ forment une famille libre de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. La famille (w, h) est donc une famille libre de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et une famille libre de $S_I(H)$. Or $S_I(H)$ est de dimension 2 donc la famille (x, h) est une base de $S_I(H)$. On en déduit

$$\boxed{S_I(E) = \left\{ g + \lambda w + \mu h,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

7. On commence par déterminer l'ensemble $S_{]-\infty;0[}(H)$.
Soit f_1 une solution de $S_{]-\infty;0[}(H)$. On pose pour tout $x > 0$, $f_2(x) = f_1(-x)$. Alors f_2 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f_2'(x) = -f_1'(-x) \qquad f_2''(x) = f_1''(-x)$$

$$\text{Et} \quad x^2 f_2''(x) + 4x f_2'(x) + (2 - x^2) f_2(x) = (-x)^2 f_1''(-x) + 4(-x) f_1'(-x) + (2 - (-x)^2) f_1(-x) = 0$$

car $f_1 \in S_{]-\infty;0[}(H)$. Donc $f_2 \in S_I(H)$.
De même on montre que si $f_2 \in S_I(H)$, alors la fonction $f_1 : x < 0 \mapsto f_2(-x) \in S_{]-\infty;0[}(H)$.

Donc $\boxed{f_1 \in S_{]-\infty;0[}(H) \longleftrightarrow\ x \mapsto f_1(-x) \in S_I(H)}$.

On détermine maintenant $S_{\mathbb{R}}(H)$. Soit $\rho \in S_{\mathbb{R}}(H)$. Alors, $\rho_{|]-\infty;0[} \in S_{]-\infty;0[}(H)$ et $\rho_{|]0;+\infty[} \in S_{]0;+\infty[}(H)$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall x > 0 \quad \rho(x) = \frac{\lambda_1 \operatorname{ch}(x) + \mu_1 \operatorname{sh}(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \forall x < 0 \quad \rho(x) = \frac{\lambda_2 \operatorname{ch}(x) + \mu_2 \operatorname{sh}(x)}{x^2}$$

Or, au voisinage de 0, $\operatorname{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\operatorname{sh}(x) = x + o(x^2)$. De plus, ρ est continue en 0 donc admet une limite à gauche et à droite en 0. On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$ donc $\rho = \overline{0}$.

D'où $S_{\mathbb{R}}(H) = \left\{\overline{0}\right\}$ et $S_{\mathbb{R}}(H)$ et de dimension nulle.

PROBLÈME

8. La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. D'après les propriétés sur les familles sommables à termes positifs, on a

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}S + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que $\dfrac{3}{4}S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, d'où

$$S = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I

9. On note, pour tout entier naturel n, $f_n : x \mapsto (\sin x)^{n+1}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = (n+1)(\sin x)^n \cos x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} \sin x$. Les fonctions f_n et $-\cos$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a par. intégrations par parties,

$$W_{n+2} = [f_n(-\cos)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos^2 x = (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right)$$

Alors, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, d'où $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

- $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 = \frac{2^{2\cdot 0} 0!}{1!}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

  Alors, $W_{2(n+1)+1} = W_{2n+1+2} = \dfrac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n+1}(n+1)!n!}{(2n+3)(2n+1)!}$. D'où

  $$W_{2n+3} = \frac{2^{2n+1}(n+1)!(n!)(2n+2)}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

  La propriété est vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$.

10. Pour tout $t \in]-1;1[$,

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(-1/2-i)}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n$$

Alors, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

Par intégration de ce DSE, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arcsin} 0 = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

D'où $\operatorname{Arcsin} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$.

11. Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$ d'où

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$$

12. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $g_n : x \mapsto \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

- La série $\sum g_n$ converge simplement sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et sa somme est la fonction $w : x \mapsto x$ qui est continue par morceaux sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur le segment $[0;\frac{\pi}{2}]$ donc intégrable sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| = g_n$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_n| = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} \mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or, $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$ et la série de terme général $1/n^2$ est une série de Riemann convergente. Par théorème de comparaison, la série de terme général $1/(2n+1)^2$ converge. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_n| < +\infty$$

Par théorème d'interversion série-intégrale, on en déduit que w est intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, que la série $\sum \int_0^{\pi/2} g_n$ converge et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin x)^{2n+1}\mathrm{d}x$$

13. Avec le résultat de la question précédente, on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$. Avec la question 8, on conclut

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Partie II

14. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $x^2 \in]-1; 1[$, d'où

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

Alors, pour tout $x \in]0, 1[$ $\dfrac{\ln x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^{2n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0, 1[$, $h_n(x) = -\ln(x)x^{2n}$.

- La série $\sum h_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme est la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ qui est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est continue sur $]0, 1]$. De plus, au voisinage de 0, par croissances comparées, $h_n(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0; 1]$. Par théorème de comparaison, la fonction h_n est intégrable sur $]0, 1[$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|h_n| = h_n$ sur $]0;1[$ et

$$\int_0^1 |h_n| = -\int_0^1 x^{2n} \ln x \mathrm{d}x$$

Les fonctions ln et $x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ et par théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x)\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0$. Par théorème d'intégration par parties, comme h_n est intégrable sur $]0;1[$, on obtient

$$\int_0^1 |h_n| = -\int_0^1 x^{2n} \ln x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

De même qu'à la question 12, on a convergence de la série de terme général $1/(2n+1)^2$ converge. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |h_n| < +\infty$$

Par théorème d'interversion série-intégrale, on en déduit que h est intégrable sur $]0,1[$, que la série $\sum \int_0^1 h_n$ converge et

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 h_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

15. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\rho(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$.
   - Pour tout $x \in [0;+\infty[$, la fonction $t \mapsto \rho(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   - Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \rho(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   - Pour tout $x \in [0,+\infty[$, pour tout $t \in [0,+\infty[$,

   $$|\rho(x,t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$$

   Or, la fonction $f \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{\pi}{2(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. Par théorème de comparaison, la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ et donc sur $[0;+\infty[$.

   On en conclut que la fonction $f : x \in [0;+\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \rho(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

16. On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
   - D'après la question précédente, on a déjà que pour tout $x \in]0,1]$, la fonction $t \mapsto \rho(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
   - Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \rho(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0;1]$ et

   $$\forall t \in [0,+\infty[\ \forall x \in]0;1] \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}$$

- De plus, pour tout $t \in [0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0;1]$, pour tout $x \in]0;1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
  Enfin, pour tout $t \in [0;+\infty[$, pour tout $\alpha \in]0;1]$, pour tout $x \in [\alpha;1]$,

$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{(1+(\alpha t)^2)(1+t^2)}$$

  Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+(\alpha t)^2)(1+t^2)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et

$$\frac{t}{(1+(\alpha t)^2)(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2 t^3}$$

  Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\alpha^2 t^3}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc par théorème de comparaison, il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+(\alpha t)^2)(1+t^2)}$ qui est donc intégrable sur $[0;+\infty[$.

On peut donc conclure que la fonction f est de classe C^1 sur tout intervalle $[\alpha;1]$ avec $0 < \alpha \leq 1$ donc sur]0,1] et pour tout $x \in]0;1]$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)\mathrm{d}t}$$

17. Pour tout $t \geq 0$ et $x \in]0;1[$,

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2} = \frac{t+t^3x^2-x^2t-x^2t^3}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = (1-x^2)\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

On a pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^A \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t &= \frac{1}{1-x^2}\textstyle\int_0^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1-x^2}\left(\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^A - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_0^A\right) \\
&= \frac{1}{2(1-x^2)}\left(\ln(1+A^2) - \ln(1+x^2A^2)\right) \\
&= \frac{1}{2(1-x^2)}\left(-2\ln(x) + \ln(1+A^{-2}) - \ln(1+x^{-2}A^{-2})\right)
\end{aligned}$$

Or, $\ln(1+A^{-2}) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+x^{-2}A^{-2}) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$. On en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$

$$\boxed{f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{\ln x}{x^2-1}}$$

18. On a $f(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ donc

$$f(1) = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\mathrm{Arctan}^2(t) - \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}^2(0) = \frac{\pi^2}{8}$$

Soit $x \in]0;1[$. f est de classe C^1 sur $]x;1[$. On a donc

$$f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathrm{d}t$$

Or f est continue en 0 et la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2 - 1}$ est intégrable sur $]0;1]$ d'après la question 14. On en déduit en faisant tendre x vers 0 dans l'égalité précédente que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathrm{d}t = f(1) - f(0)$$

Or, $f(0) = 0$ et avec le résultat de la question 14, on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}}$$

Avec la question préliminaire 8, on conclut $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

FIN