CONCOURS COMMUN INP

# ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

# MATHÉMATIQUES 1

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

# EXERCICE I

$X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

**Q1.** Exprimer, pour $k$ non nul, $P(X=k)$ en fonction de $P(X>k-1)$ et de $P(X>k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.

Démontrer le résultat de cours : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

**Q2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue, de façon équiprobable, $p$ tirages successifs avec remise et on note $X$ le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel $k$, $P(X \leq k)$, puis donner la loi de $X$.

**Q3.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la **Q1**., déterminer un équivalent pour $n$ au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

# EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$(E)$ : $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$

$(H)$ : $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0$

On note $I = ]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ sur $I$ et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation $(H)$ sur $I$.

**Q4.** Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

**Q5.** Démontrer qu'il existe une unique solution $f$ de $(E)$ sur $I$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\mathrm{ch}\,x - 1}{x^2}$.

**Q6.** On note pour $x \in I$, $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.

Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

**Q7.** Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$) ?

# PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

**Q8.** Question préliminaire

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ?

## Partie I

**Q9.** On note, pour tout entier naturel $n$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$, puis déterminer une relation entre $W_{n+2}$ et $W_n$.

En déduire, pour tout entier naturel $n$, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

**Q10.** Déterminer sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

**Q11.** En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

**Q12.** Justifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \mathrm{d}x$.

**Q13.** En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

## Partie II

**Q14.** Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

**Q15.** On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que la fonction *f* est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

**Q16.** Établir que cette fonction *f* est de classe $C^1$ sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

**Q17.** Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in ]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

**Q18.** Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**FIN**

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1089 – D'après documents fournis