Mines MP1 2018
Un corrigé

1 Préliminaires

1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=m}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &\leq (m-1)\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}(X=k) + n\sum_{k=m}^{n} \mathbb{P}(X=k)\end{aligned}$$

La première somme est ≤ 1 (la somme de TOUS les $\mathbb{P}(X=k)$ vaut 1, celle-ci est inférieure puisqu'elle a moins de termes et que les termes enlevés sont ≥ 0). La seconde somme vaut $\mathbb{P}(X \geq m)$.

$$\boxed{\text{Si } X(\Omega) \subset \{1,\dots,n\} \text{ et } m \in \{1,\dots,n\},\ \mathbb{E}(X) \leq m-1+n\mathbb{P}(X\geq m)}$$

2. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a

$$\forall k \geq 2,\ \forall x \in [k-1,k],\ \ln(x) \leq \ln(k)$$

En intégrant ces inégalités, on a donc

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \ln(x)\ dx \leq \ln(k)$$

En sommant ces inégalités (et comme $\ln(1)=0$)

$$\forall n \geq 2,\ \int_{1}^{n} \ln(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

Comme $x \mapsto x\ln(x)-x$ est une primitive de ln, on a ainsi

$$\forall n \geq 2,\ [x\ln(x)-x]_1^n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

On en déduit (on vérifie que c'est encore vrai si $n=1$) que

$$\boxed{n\ln(n)-n+1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k)}$$

Par propriété de morphisme du logarithme, ceci s'écrit

$$\ln(n^n)-n+1 \leq \ln(n!)$$

Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$n^n e^{-n} e \leq n!$$

Et enfin, comme $1 \leq e$, on conclut que

$$\boxed{\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!}$$

2 Le lemme de sous-additivité de Fekete

3. Comme u est bornée, il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leq M$. Ainsi, U_n est une partie non vide et bornée (incluse dans $[-M, M]$). Elle admet des bornes supérieure et inférieure et $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont bien définies.
Comme $U_{n+1} \subset U_n$, $\inf(U_n) \leq \inf(U_{n+1}) \leq \sup(U_{n+1}) \leq \sup(U_n)$. Ainsi $\underline{u}$ croît et $\overline{u}$ décroît.
Ces suites étant bornées (incluses dans $[-M, M]$) elles convergent par théorème de limite monotone.

$$\boxed{\overline{u} \text{ et } \underline{u} \text{ sont monotones et convergentes}}$$

4. On a $\overline{u}$ qui est décroissante et plus grande que u ($\overline{u}_n = \sup(U_n) \geq u_n$ car $u_n \in U_n$).
Soit v une suite ayant ces deux propriétés. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq n,\ u_k \leq v_k \leq v_n$$

Par passage au sup (sur k), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{u}_n \leq v_n$$

et ainsi $u \preceq v$. On a alors montré que

$$\boxed{\overline{u} \text{ est la plus petite suite (au sens de } \preceq\text{) qui est décroissante et plus grande que } u}$$

On a $\underline{u}$ qui est croissante et plus petite que u ($\underline{u}_n = \inf(U_n) \leq u_n$ car $u_n \in U_n$).
Soit v une suite ayant ces deux propriétés. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq n,\ v_n \leq v_k \leq u_k$$

Par passage à la borne inférieure (sur k), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq \underline{u}_n$$

et ainsi $v \preceq u$. On a alors montré que

$$\boxed{\underline{u} \text{ est la plus grande suite (au sens de } \preceq\text{) qui est croissante et plus petite que } u}$$

5. Si $u \preceq v$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq n,\ u_k \leq v_k \leq \overline{v}_n$$

et en passant à la borne supérieure (en k)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{u}_n \leq \overline{v}_n$$

Par théorème de comparaison, on a donc

$$\boxed{\lim \overline{u} \leq \lim \overline{v}}$$

6. Avec les inégalités de la question 3, les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes ssi leur différence tend vers 0, c'est-à-dire si elles ont même limite.
Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n$$

Si les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ ont même limite, alors par théorème d'encadrement, la suite u converge et a même limite que $\overline{u}$ et $\underline{u}$.
Réciproquement, supposons que u converge et notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un rang p tel que

$$\forall k \geq p,\ \ell - \varepsilon \leq u_k \leq \ell + \varepsilon$$

En passant à la borne supérieure ou inférieure pour $k \geq n$ (n donné plus grand que p) on a donc

$$\forall n \geq p,\ \ell - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \ell + \varepsilon$$

Ainsi, $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont convergentes de limite ℓ.

$$\boxed{\overline{u} \text{ et } \underline{u} \text{ sont adjacentes si et seulement si } u \text{ converge}}$$

Dans ce cas, avec ce qui précède

$$\lim u = \lim \overline{u} = \lim \underline{u}$$

7. On montre par récurrence sur k que la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{kn} \leq k u_n$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : c'est immédiatement vrai si $k = 1$ (on a même égalité).
- Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $k \geq 1$. Avec la sous-additivité,

$$u_{(k+1)n} = u_{kn+n} = u_{kn} + u_n$$

et avec le résultat au rang k, $u_{(k+1)n} \leq k u_n + u_n = (k+1)u_n$ ce qui prouve le résultat au rang $k+1$.

Ici, on a $m = qn + r$ avec $q \geq 2$ (car $m \geq 2n$) et $r \in \{0, \dots, n-1\}$. On écrit alors $m = (q-1)n + r + n$ et comme $q - 1 \geq 1$, on va pouvoir utiliser le premier résultat. En effet, avec la sous-additivité

$$u_m \leq u_{(q-1)n} + u_{n+r} \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{m} &\leq \frac{q-1}{m} u_n + \frac{u_{n+r}}{m} \\ &\leq \frac{n(q-1)}{m} \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \end{aligned}$$

On remarque alors que $m - n - r = (q-1)n$ pour conclure que

$$\boxed{\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}}$$

8. La question précédente avec $n = 1$ donne (touts les u_k sont positifs et on peut multiplier les inégalités)

$$\forall m \geq 2,\ \frac{u_m}{m} \leq \frac{m-1-r}{m} u_1 + \frac{u_1}{m} \leq 2u_1$$

En particulier, la suite (u_n/n) est majorée. Mais comme u est positive, cette suite (u_n/n) est aussi minorée (par 0). $\boxed{\text{C'est donc une suite bornée}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons v_m le terme du membre de droite dans la question précédente. On a

$$\forall m \geq 2n,\ \frac{u_m}{m} \leq v_m$$

Avec la question 5 (il suffit d'en reprendre la preuve pour voir qu'il n'est pas gênant que l'on ait une suite plus grande que l'autre seulement à partir d'un certain rang) on en déduit que

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \overline{\lim_{m \to +\infty}} v_m$$

n étant fixé, le terme $\frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}$ est de limite nulle quand $m \to +\infty$.
Comme $|n - r| \leq 2n$, on a $\frac{n+r}{m} \to 0$ quand $m \to +\infty$.
Ainsi, (v_m) est convergente de limite u_n/n. Avec la question 6, $\overline{\lim_{m \to +\infty}} v_m = u_n/n$.
On a donc finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}}$$

9. Posons $w_n = u_n/n$ et $\ell = \overline{\lim_{n\to+\infty}} w_n$. La question précédente donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ell \leq w_n$$

On en déduit comme en question 5 que

$$\ell \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} w_n$$

On a donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} w_n \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} w_n$$

Comme on sait que l'inégalité inverse est toujours vraie (voir question 3), on a une égalité. Avec la question 6,

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$$

3 Une application probabiliste

10. Quand on fait la moyenne de quantités $< x$, on obtient un nombre $< x$. Ainsi

$$\bigcap_{k=1}^{n} (X_k < x) \subset (Y_n < x)$$

En passant aux probabilités et par indépendance des X_k,

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k < x) \leq \mathbb{P}(Y_n < x)$$

Si $\mathbb{P}(X_1 < x) = 1$ alors comme les X_k ont toutes même loi, $\mathbb{P}(X_k < x) = 1$ pour tout k et donc $\mathbb{P}(Y_n < x) \geq 1$. Et comme $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, cette inégalité est une égalité.

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{P}(X_1 < x) = 1, \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(Y_n < x) = 1}$$

Quand on fait la moyenne de quantités $\geq x$, on obtient un nombre $\geq x$. Ainsi

$$\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geq x) \subset (Y_n \geq x)$$

En passant aux probabilités et par indépendance des X_k,

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \geq x) \leq \mathbb{P}(Y_n \geq x)$$

Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$ alors comme les X_k ont toutes même loi, $\mathbb{P}(X_k \geq x) > 0$ pour tout k et donc $\mathbb{P}(Y_n \geq x) > 0$.

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0 \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(Y_n \geq x) > 0.}$$

11. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $Y_m(\omega) \geq x$ et $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq nx$. La première hypothèse donne $\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geq mx$. En sommant avec la seconde, on a alors $\sum_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) \geq (n+m)x$ et donc $Y_{n+m}(\omega) \geq x$. On a donc montré que

$$\boxed{\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geq x)}$$

En passant aux probabilités, et comme Y_m et $X_{m+1} + \cdots + X_{m+n}$ sont indépendantes (lemme des coalitions)

$$\mathbb{P}(Y_m \geq x)\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) \leq \mathbb{P}(Y_{n+m} \geq x)$$

Ecrivons que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) = \bigcup_{\substack{x_1,\dots,x_n \in X_1(\Omega) \\ x_1+\cdots+x_n \geq nx}} \bigcap_{k=1}^{n} (X_{m+k} = x_k)$$

La réunion est disjointe et les X_i sont mutuellement indépendants. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in X_1(\Omega) \\ x_1+\cdots+x_n \geq nx}} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{m+k} = x_k)$$

Comme les X_i ont tous même on a aussi

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in X_1(\Omega) \\ x_1+\cdots+x_n \geq nx}} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

et en remontant le calcul

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right) = \mathbb{P}(Y_n \geq x)$$

On en conclut que

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_{n+m} \geq x) \geq \mathbb{P}(Y_m \geq x)\mathbb{P}(Y_n \geq x)}$$

12. On aimerait passer au logarithme dans la relation ci-dessus. Il faut pour cela que les quantités soient > 0.
Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$, la question 10 donne ce caractère strictement positif. Le passage à l'inverse (opération décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$) puis au logarithme donne le caractère sous-additif de la suite de terme général $u_n = \ln(1/\mathbb{P}(Y_n \geq x))$. Comme cette suite est positive (une probabilité est plus petite que 1), le lemme de Fekete donne la convergence de (u_n/n). En notant ℓ sa limite, la composition par exp donne $(\mathbb{P}(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}} \to e^{-\ell}$.
Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = 0$ alors $\mathbb{P}(X_1 < x) = 1$. La question 10 donne $\forall n,\ \mathbb{P}(Y_n < x) = 1$ et donc $\mathbb{P}(Y_n \geq x) = 0$. La suite considérée est cette fois nulle (on prolonge naturellement $t \mapsto t^{1/n}$ en 0 par la valeur 0, ce que l'énoncé semble supposer) et converge.

$$\boxed{\left((\mathbb{P}(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$$

4 Le théorème de Erdös-Szekeres

13. L'énoncé donne un processus algorithmique. On demande en fait de justifier une sorte d'invariant de boucle qui s'énonce de la façon suivante : “au début de l'étape numéro k (en numérotant les étapes à partir de 2 puisque l'élément a_1 est ajouté dans une phase d'initialisation) et en notant s le nombre de piles à cet instant, il existe une liste b comme dans l'énoncé”.

- Initialisation : au début du processus, on a une seule pile ($s = 1$). La suite (a_1) convient.
- Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang k.
  - Si le nombre de pile n'est pas modifié par l'étape k et l'élément a_{k+1} est ajouté à une autre pile que la dernière. La suite $(b_1, \ldots, b_s)$ de l'étape k convient encore.
  - Si le nombre de pile n'est pas modifié par l'étape k et l'élément a_{k+1} est ajouté à la dernière pile. On a alors $a_{k+1} > b_s$ mais aussi a_{k+1} qui est strictement plus petit que le sommets de la pile $s-1$ et ce sommet est un a_i avec $i \leq k$. Par hypothèse de récurrence au rang i, on construit une une suite $(b_1, \ldots, b_{s-1} = a_i)$. La suite $(b_1, \ldots, b_{s-1}, a_{k+1})$ convient au rang $k+1$.
  - Sinon, a_{k+1} est placé sur une nouvelle pile de numéro $s+1$. Comme ci-dessus, le sommet a_i de la pile s est strictement plus grand que a_{k+1}. L'hypothèse au rang i donne $(b_1, \ldots, b_s = a_i)$ et la suite $(b_1, \ldots, b_s, a_{k+1})$ convient au rang $k+1$.

14. Si le nombre de piles à l'issue du processus est plus grand que $q+1$, on a alors une extraite décroissante de taille $q+1$ avec la question précédente.
Sinon, il y a au maximum q pile et l'une d'entre elle doit avoir $p+1$ éléments (puisque l'on ajoute $pq+1$ éléments en tout). La suite des éléments de cette pile est extraite de la suite de départ et croît.

$$\boxed{\begin{array}{l}a \text{ admet au moins une extraite croissante de longueur } p+1\\ \text{ou une extraite décroissante de longueur } q+1\end{array}}$$

5 Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

15. L'événement $(A_1 = 1) \cap \cdots \cap (A_n = 1)$ est vide et donc de probabilité nulle.
Les événement $(A_i = 1)$ ne sont pas de probabilité nulle (il existe au moins une permutation σ telle que $\sigma(i) = 1$).
La probabilité de l'intersection est différente du produit des probabilités et ainsi

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ ne sont pas mutuellement indépendantes}}$$

16. *Si on choisit $k = 2$ et $s_1 = s_2 = 1$ alors $A_{s_1} = A_{s_2}$ et la liste (A_{s_1}, A_{s_2}) est toujours croissante. A^s est ainsi de probabilité $1 \neq 1/2$. Il faut sans doute modifier l'énoncé et supposer que*

$$s = (s_1, \ldots, s_k) \text{ est strictement croissante}$$

On cherche les permutations σ telles que $\sigma(s_1) \leq \sigma(s_2) \leq \cdots \leq \sigma(s_k)$ (ce qui revient à $\sigma(s_1) < \cdots < \sigma(s_k)$ puisque s est une bijection et les s_i deux à deux distincts). Choisir une telle permutation revient à choisir k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ qui seront les $\sigma(s_i)$ (l'ordre est imposé par ce que l'on veut) et à répartir les $n-k$ autres images sur les $n-k$ éléments différents des s_i. Il y a $\binom{n}{k}$ choix de parties et $(n-k)!$ façon de répartir. Comme S_n est de cardinal n et que les permutations sont équiprobables,

$$\boxed{\mathbb{P}(A^s) = \frac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}}$$

17. Si $\sigma \in S_n$, on note $\sigma' \ : \ k \mapsto n+1-k$. $\sigma \mapsto \sigma'$ est une bijection de S_n dans lui même.
Notons alors B' la variable aléatoire telle $\forall \omega \in \ \Omega$, si $B(\omega) = \sigma$ alors $B'(\omega) = \sigma'$.
B' suit alors aussi une loi uniforme et on peut lui associer A' et C'_n, D'_n.
Une extraite de $\sigma \in S_n$ (considéré comme liste de n éléments) est croissante ssi la même extraite de σ' est décroissante.
Ainsi, C_n et D'_n ont même loi. Et comme D'_n et D_n ont même loi,

$$\boxed{C_n \text{ et } D_n \text{ ont le même loi}}$$

D'après la question 14, $C_n + D_n$ ne peut pas être trop petit. Notons p le plus grand entier tel que $n \geq 1 + p^2$. Notons A' la liste A tronquée aux $1 + p^2$ premiers éléments et C'_n (resp. D'_n) la longueur de la plus longue liste croissante (resp. décroissante) extraite de A'. La question 14 indique que $C'_n + D'_n \geq p + 1$. Comme $C_n \geq C'_n$ et $D_n \geq D'_n$, on a donc $C_n + D_n \geq p + 1$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(C_n + D_n) \geq p + 1$$

Par linéarité de l'espérance, et comme C_n et D_n ont même loi,

$$2\mathbb{E}(C_n) \geq p + 1$$

Je choisis de noter $\lceil x \rceil$ le plus petit entier plus grand que x (partie entière "supérieure").
Soit $q = \lceil \sqrt{n} \rceil - 1$. On a $q^2 + 1 = \lceil \sqrt{n} \rceil^2 - 2\lceil \sqrt{n} \rceil = \lceil \sqrt{n} \rceil (\lceil \sqrt{n} \rceil - 2)$.
Remarquons que $\lceil \sqrt{n} \rceil \leq \sqrt{n} + 1$ et donc $\lceil \sqrt{n} \rceil - 2 \leq \sqrt{n} - 1$.
Ainsi (on multiplie la seconde inégalité par un terme positif) $\lceil \sqrt{n} \rceil (\lceil \sqrt{n} \rceil - 2) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil (\sqrt{n} - 1)$.
Mais aussi (on multiplie la première inégalité par un terme positif) $\lceil \sqrt{n} \rceil (\sqrt{n} - 1) \leq (\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} - 1) = n - 1$.
Tout ceci se combine pour donner $q^2 + 1 \leq n - 1 \leq n$ et donc $q \leq p$. On conclut que

$$2\mathbb{E}(C_n) \geq q + 1 = \lceil \sqrt{n} \rceil \geq \sqrt{n}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(C_n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}}$$

18. Si $C_n \geq k$, il y a une extraite croissante de taille k et ainsi

$$(C_n \geq k) \subset \bigcup_{s \in E_k} A^s$$

où E_k est l'ensemble des listes croissantes de k éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(C_n \geq k) \leq \sum_{s \in E_k} \mathbb{P}(A^s) = \frac{1}{k!} \text{Card}(E_k)$$

Une liste croissante de k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ est caractérisée par une partie de k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ et il y a $\binom{n}{k}$ telles parties. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}}$$

19. On a $\alpha e \sqrt{n} \geq e \geq 2$ et donc (avec les notation choisies en question 18), l'entier $k = \lceil \alpha e \sqrt{n} \rceil$ est plus grand que 2 et vérifie

$$\boxed{k - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leq k}$$

Pour x réel, $\lceil x \rceil$ existe puisque l'ensemble des entiers plus grand que x est non vide, minoré par x et admet donc un minimum).

Comme C_n est à valeurs entières, on a $(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \subset (C_n \geq k)$ et donc ($k \geq 1$ et on peut utiliser la question 18)

$$\mathbb{P}(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \mathbb{P}(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{(k)!} \right)^2$$

Avec la question 2,
$$\frac{1}{(k!)^2} \leq \left(\frac{e}{k}\right)^{2k}$$
Par ailleurs,
$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \leq (n-k+1) \leq n^k = \sqrt{n}^{2k}$$
Ainsi
$$\mathbb{P}(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq \left(\frac{e\sqrt{n}}{k}\right)^{2k}$$
Comme $\frac{e\sqrt{n}}{k} \leq 1$, plus on élève ce nombre à une grande puissance, plus il devient petit. Comme $2k \geq 2\alpha e\sqrt{n}$, on a donc
$$\mathbb{P}(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq \left(\frac{e\sqrt{n}}{k}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$$
Comme $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{e\sqrt{n}}{k}$, on conclut finalement que
$$\boxed{\mathbb{P}(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}}$$

20. En utilisant la question 1 avec $m = k$, on obtient
$$\mathbb{E}(C_n) \leq k - 1 + n\mathbb{P}(C_n \geq k)$$
Comme indiqué plus haut, $(C_n \geq k) = (C_n \geq \alpha e\sqrt{n})$ (car C_n est à valeurs entières). Avec la question précédente (et comme $k - 1 \leq \alpha e\sqrt{n}$),
$$\mathbb{E}(C_n) \leq \alpha e\sqrt{n} + n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$$
On choisit $\alpha = 1 + n^{-1/4}$ (possible car c'est > 1) :
$$\frac{\mathbb{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leq (1 + n^{-1/4})e + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{1 + n^{-1/4}}\right)^{2(1+n^{-1/4})e\sqrt{n}}$$
Remarquons que
$$\ln(1 + n^{-1/4}) \sim n^{-1/4}$$
et donc
$$-\ln(1 + n^{-1/4})2(1 + n^{-1/4})e\sqrt{n} \sim -2en^{1/4}$$
puis
$$\varepsilon_n = \ln(v_n) \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{1}{2}\ln(n) - \ln(1 + n^{-1/4})2(1 + n^{-1/4})e\sqrt{n} \sim -2en^{1/4} \to -\infty$$
et donc $\varepsilon_n \to 0$.
$$\boxed{\frac{\mathbb{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leq (1 + n^{-1/4})e + \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n \to 0}$$
Ci-dessus, le majorant est convergent (de limite e) et donc borné. La suite $\left(\frac{\mathbb{E}(C_n)}{\sqrt{n}}\right)$ est donc majorée et on a existence de $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbb{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$ avec de plus (avec la question 5)
$$\boxed{\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbb{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leq e}$$