Youssef B.B

Colle de la semaine 13

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le nombre :

$$u_n := \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

est entier.

Q2. — En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ converge absolument.

Solution :

Q1) soit $n \in \mathbb{N}$

D'après la formule du binome de Newton

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k\, 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k\, 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left[(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} \left[\sqrt{3}^{2k} + (-1)^{2k}(\sqrt{3})^{2k}\right] + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{n}{2k+1} 2^{n-2k+1} \times 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k+1}\, 3^k$$

Donc $u_n \in \mathbb{Z}$ (somme de nombre entiers)

On pourra même dire que $u_n \in 2\mathbb{Z}$ pour la suite.

Q2) $$\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right) = \sin\left(\pi\left(u_n - (2-\sqrt{3})^n\right)\right)$$

$$= \sin\left(\pi 2q - \pi(2-\sqrt{3})^n\right) \qquad (q \in \mathbb{Z})$$

$$= -\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$$

$|2-\sqrt{3}| < 1$ donc $(2-\sqrt{3})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n) \sim \pi(2-\sqrt{3})^n \geqslant 0$

$\sum \pi(2-\sqrt{3})^n$ converge (série géométrique)

Donc d'après le théorème de comparaison :

$$\sum \underbrace{|\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)|}_{|\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)|} \text{ converge}$$

Mehdi B. Colle de la semaine 13

EXERCICE 2

On fixe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$u_n := \ln(n) + a \cdot \ln(n+1) + b \cdot \ln(n+2).$$

Q1. — Obtenir un développement asymptotique de u_n avec précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Q2. — En déduire qu'il existe un unique choix de (a, b) pour lequel la série de terme général u_n est convergente et préciser ce choix.

Q.1) $u_n = \ln(n)(1+a+b) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

Donc

$$u_n = \ln(n)(1+a+b) + a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n} - \frac{4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \ln(n)(1+a+b) + \frac{a+2b}{n} \underbrace{- \frac{a}{2n^2} - \frac{2b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{u_n = \ln(n)(1+a+b) + \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Q.2) <u>Analyse</u>

Supposons $\sum u_n$ converge. Alors $u_n \longrightarrow 0$.

- Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \longrightarrow +\infty$ ou $u_n \longrightarrow -\infty$, d'après Q.1). Il faut donc que $\underline{1+a+b=0}$

· Comme $1+a+b=0$, u_n se réécrit :

$$u_n = \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Si $a+2b \neq 0$, u_n est la somme d'un terme général de série divergente (série harmonique) et d'un terme général de série convergente ($\frac{1}{n^2} > 0$, critère de Riemann, et théorème de comparaison).
$\sum u_n$ divergerait donc, dès lors il faut $\underline{a+2b=0}$

· On en déduit les uniques candidats :

$$b = 1 \text{ et } a = -2$$

<u>Synthèse</u>

Pour ce choix de a et b, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $\sum u_n$ converge.

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) \text{ converge} \iff \begin{cases} a=-2 \\ \text{et} \\ b=1 \end{cases}}$$

Colle semaine 13

Alexandre M.

Enoncé :

Exercice 101. Nature de $\sum \frac{e^{2n}}{n^2}\left(\left(1+e^{-n}\right)^n-1\right)$.

Résolution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On pose $U_n := \frac{e^{2n}}{n^2}\left(\left(1+e^{-n}\right)^n-1\right)$

On a $\left(1+e^{-n}\right)^n = e^{n\ln(1+e^{-n})}$

Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$ et $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\Rightarrow \ln(1+e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n}+o(e^{-n})$

donc $\left(1+e^{-n}\right)^n = e^{\frac{n}{e^n}+\overbrace{o\left(\frac{n}{e^n}\right)}^{=:g(n)}}$

Or $\frac{n}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{c.c.}} 0$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq n_0}}$ $\varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\forall n \geq n_0$ $\quad g(n) = \varepsilon(n)\cdot\frac{n}{e^n}$, avec $g(n)\to 0$, $\varepsilon(n)\to 0$, $\frac{n}{e^n}\to 0$

donc $\frac{n}{e^n}+o\left(\frac{n}{e^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

et $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$

Par composée de DL $\Rightarrow e^{\frac{n}{e^n}+o\left(\frac{n}{e^n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{n}{e^n}+o\left(\frac{n}{e^n}\right)$

donc $U_n = \frac{e^{2n}}{n^2}\left(\left(1+e^{-n}\right)^n-1\right) = \frac{e^{2n}}{n^2}\left(\frac{n}{e^n}+o\left(\frac{n}{e^n}\right)\right)$

$= \frac{e^n}{n}+o\left(\frac{e^n}{n}\right)$

donc $U_n \sim \frac{e^n}{n} \geq 0$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV

et $\frac{1}{n} = o\left(\underbrace{\frac{e^n}{n}}_{\geq 0}\right)$ $\Big\}$ thm de comparaison $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n}$ DV

(sinon contredit que la série harmonique diverge).

donc

comme $U_n \sim \frac{e^n}{n} \geq 0$

Le théorème de comparaison livre

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} U_n \text{ DV.}}$$

Raphaël Mouchonnet colle semaine n° 13

Enoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

1) Déterminer une CNS pour que (u_n) converge.

2) Si (u_n) converge trouver un équivalent de $(l - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $l \in \mathbb{R}$ est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Solution :

On commence par remarquer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et strictement croissante.

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n}$

Donc on sait : (u_n) converge $\iff \sum \frac{1}{n^\alpha u_n}$ converge ⊛

1) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge :

Par le théorème de la limite monotone :

$$u_n \longrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = l \in \mathbb{R}_{>0}$$

et soit $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leq \frac{1}{l\, n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha u_n}$

$\sum \frac{1}{n^\alpha u_n}$ converge ⊛

Donc par domination

$$\frac{1}{l} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

2) On suppose (u_n) convergente.

On remarque $\ell - u_m = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha u_k}$

existe car $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m^\alpha u_n}$ CV

Aussi $u_n \sim \ell$

Donc $\frac{1}{m^\alpha u_n} \sim \frac{1}{m^\alpha \ell}$

et soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{\ell t^\alpha} dt \leq \frac{1}{m^\alpha \ell} \leq \int_{m-1}^{m} \frac{1}{t^\alpha \ell} dt$$

soit $N \in \mathbb{N}_{>m+1}$

$$\frac{1}{\ell} \int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha \ell} \leq \int_m^N \frac{1}{t^\alpha \ell} dt$$

$N \longrightarrow +\infty$:

$$\underbrace{\frac{1}{\ell}\frac{1}{\alpha-1}(n+1)^{1-\alpha}}_{\sim \frac{1}{\ell}\frac{1}{\alpha-1} m^{1-\alpha}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha \ell} \leq \frac{1}{\ell}\frac{1}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

Donc par transitivité et sommation des équivalents

$$\ell - u_m \sim \frac{1}{\ell}\frac{1}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

Léa Nan

Colle de la semaine n°: 13

Énoncé :

$$\boxed{\text{Calculer } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n}}$$

Solution :

Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$(*) \quad \sum_{n=2}^{N} \frac{\zeta(n)-1}{n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} - 1}{n}$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}}{n}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n \qquad \text{(théorème de Fubini, cas positif)}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{N} \int_0^{\frac{1}{k}} t^{n-1} \, dt$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{N} t^n \, dt \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{k}} t \, \frac{1-t^{N-1}}{1-t} \, dt$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{t}{1-t} \, dt - \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^N}{1-t} \, dt}_{\underset{N \to +\infty}{=} o(1)}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} \quad (*)$$

Soit $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$N \to +\infty$:

$$\sum_{k=2}^{p} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{t}{1-t} \, dt = \sum_{k=2}^{p} \left(\left[-\ln(1-t)\, t \right]_0^{\frac{1}{k}} + \int_0^{\frac{1}{k}} \ln(1-t) \, dt \right)$$

Intégration par partie $\quad \left. \begin{array}{l} u : t \longmapsto t \\ v : t \longmapsto -\ln(1-t) \end{array} \right\} \mathcal{C}^1$

$$= \sum_{k=2}^{p} \left(-\frac{1}{k}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)}_{\ln(k-1)-\ln(k)} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{p} -\frac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k-1)$$

$$= -H_p + 1 + \ln(p)$$

$$= 1 - (H_p - \ln(p))$$

$$\xrightarrow[p\to+\infty]{} 1-\gamma \qquad \text{(d'après le développement limité de } H_p\text{)}$$

Donc
$$\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{\zeta(n)-1}{n} \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} = 1-\gamma}$$

(*)

$$\left|\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^N}{\underbrace{1-t}_{\geq 1-\frac{1}{k}}}\,dt\right| \leq \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \int_0^{\frac{1}{k}} t^N\,dt$$

$$\leq \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \left[\frac{t^{N+1}}{N+1}\right]_0^{\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^{N+1}}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Lina. A. Colle de la semaine 13.

Énoncé :

On fixe $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Étudier la suite de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
2. Mq il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n \geq 1} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ CV.

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons
$$v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right)$$

$\frac{1}{n+1} \to 0$

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Donc

$$v_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} -\frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Donc $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{x}{2(n+1)}$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_1 \quad v_n \leq 0.$$

Donc

$$\forall n \geq n_1 \quad 0 \leq -v_n \sim \frac{x}{2(n+1)}$$

Par le critère de Riemann, il vient que

$$\sum_{n \geq n_1} \frac{x}{2(n+1)} \text{ diverge.}$$

Par théorème de domination, on obtient :

$$\sum_{n \geq n_1} -v_n \text{ diverge donc } \sum_{n \geq n_1} v_n \text{ aussi}$$

Et comme $\sum_{n=1}^{n_1} v_n$ Converge, on en déduit $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge vers $-\infty$ car $v_n \leq 0$ à partir de n_0.

Comme $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\sum_{n\geq 1} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ ont même nature, alors

$$\ln(u_n) \longrightarrow -\infty.$$

Donc (u_n) converge et sa limite vaut 0.

2. $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-x}{2(n+1)} + \frac{x^2}{3(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$-\alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Donc $w_n = v_n - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{-x}{2(n+1)} + \frac{x^2}{3(n+1)^2} - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

Pour que la ~~série~~ série de termes général w_n converge, on remarque que $\alpha = -\frac{x}{2}$ convient.

En effet, dans ce cas

$$0 \leq w_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{2(n^2+n)} + \frac{x^2}{3(n+1)^2} - \frac{x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Donc pour $\alpha = -\frac{x}{2}$ $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge comme combinaison linéaire de série convergente

MANGIACOMONI
Aurélien

Rapport de Colle

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ on pose ;

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln n}$$

Nature de $\sum_{n\geq 2} u_n$ selon α ?

Si $\alpha \leq 0$;

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{(-1)^n \ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)}$$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\ln n \leq n$ (Inégalité de concavité)

donc $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$

et $\sum \frac{1}{n}$ Diverge

Par domination $\Rightarrow$ $\sum u_n$ diverge

Si $0 < \alpha$;

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1 + \underbrace{(-1)^n \frac{\ln n}{n^\alpha}}_{\to 0}}\right)$$

(c.c. avec $\alpha > 0$)

01

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{:=v_n} \underbrace{- \frac{\ln n}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}\right)}_{:=w_n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$;

(H_1) $v_n v_{n+1} = -\frac{1}{n^\alpha (n+1)^\alpha} \leq 0$.

(H_2) $|v_n| - |v_{n+1}| = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq 0$.

(H_3) $|v_n| = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(\alpha > 0)$

Donc d'après le C.S.S.A. $\sum_{n\geq 2} v_n$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$;

$w_n \sim \frac{\ln n}{n^{2\alpha}} \geq 0$ donc $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n^{2\alpha}}$ et $\sum_{n\geq 2} w_n$ ont même nature d'après le théorème de comparaison.

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ alors ; Soit $n \geq 2$;

$\frac{\ln n}{n^{2\alpha}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ diverge donc par théorème de domination, $\sum \frac{\ln n}{n^{2\alpha}}$ diverge

puis $\sum u_n$ diverge d'après (*).

Si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors, Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$; on pose $\gamma = \underbrace{\frac{1+2\alpha}{2}}_{>1}$

$$n^\gamma \frac{\ln n}{n^{2\alpha}} = \frac{\ln n}{n^{\underbrace{2\alpha-\gamma}_{>0}}} \longrightarrow 0 \quad (\text{C.C.})$$

donc $\frac{\ln n}{n^{2\alpha}} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$

et a fortiori, $\frac{\ln n}{n^{2\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)_{, \geq 0}$

et $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge $(\gamma > 1)$ $\Bigg\}$ Par $\Rightarrow$ Comparaison

$\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n^{2\alpha}}$ converge puis $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

Titouan

D

Rapport de colle

Exercice 101. Nature de $\sum \frac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2}\left((1+\mathrm{e}^{-n})^n - 1\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{e^{2n}}{n^2}((1+e^{-n})^n - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} (1+\varepsilon)^\alpha \underset{\varepsilon \to 0}{=} 1 + \alpha\varepsilon + o(\varepsilon) \\ e^{-n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1+e^{-n})^n \underset{n \to +\infty}{=} 1 + n e^{-n} + o(e^{-n})$$

Donc $(1+e^{-n})^n - 1 \underset{n \to +\infty}{=} n e^{-n} + o(e^{-n})$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} n e^{-n}$$

Ainsi $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{2n} \times e^{-n} \times n}{n^2} = \frac{e^n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissance comparée

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$

Robin G.

Colle de la semaine 13

$$\boxed{\text{Calculer } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}.}$$

• Convergence de $\sum_{n\geq} \frac{1}{(2n)!}$:

$n^2 \frac{1}{(2n)!} \longrightarrow 0$ par croissances comparées donc $\frac{1}{(2n)!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2} > 0$ donc par comparaison

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$ existe.

• Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

(1) $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e^1$ (série exponentielle)

(2) $\underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n)!}}_{\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}} \underbrace{- \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)!}}_{+\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(-1)^n}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e^{-1}$

• (1) et (2) donnent $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{2N} \frac{(-1)^n}{n!}\right)$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{e^1+e^{-1}}{2}$$

Donc $\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = ch(1)}$

Celia A. Semaine n° 13.

énoncé :

Nature de la série de terme général $u_n = \cos(n^2 \pi \ln(1-\frac{1}{n}))$.

solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Selon un développement limité usuel :
$$\ln(1-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O(\frac{1}{n^4}).$$

Ainsi,
$$u_n = \cos(-n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2}))$$

Par parité du cos,
$$u_n = \cos(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2})).$$

Selon les formules trigonométriques,
$$u_n = (-1)^{n+1} \sin(\frac{\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2})) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2}). \quad \text{(DL sin)}$$

Selon le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}$ converge.

Par théorème de domination (et $2 > 1$) et linéarité, $\sum u_n$ converge.

Sophie G

Q1) Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n := (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \text{ est entier}$$

Q2) En déduire $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge absolument

Solution

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k + \binom{n}{k} (-1)^k \sqrt{3}^k 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k (1+(-1)^k)$$

termes impairs sont nuls

$$= \sum_{k=0} \underbrace{\binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k}_{\in \mathbb{N}}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \text{ entier}}$

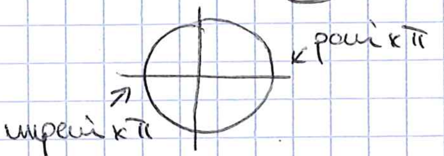
2) Montrons $\sum_{n \geq 0} \underbrace{\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)}_{v_n}$ converge absolument

Soit $n \geq 0$

$$v_n = \sin(u_n \pi - \pi(2-\sqrt{3})^n)$$

$$= \underbrace{\sin(u_n \pi)}_{0} \cos(\pi(2-\sqrt{3})^n) - \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n) \cos(u_n \pi)$$

($u_n \in \mathbb{N}$ et u_n pair)



$$= -\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$$

Comme $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ (*)

$\pi(2-\sqrt{3})^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\sin(x) \sim x$

$\left.\right\} \underline{v_n \underset{+\infty}{\sim} -\pi(2-\sqrt{3})^n}$

(*) $2-\sqrt{3} > 0$

$\Rightarrow (1+\sqrt{3})^2 > 2^2 > 0$

$\Rightarrow 1+\sqrt{3} > 2$

Or $\underline{\sum_{n \geq 0} \underbrace{(2-\sqrt{3})^n}_{\geq 0}}$ converge ($|2-\sqrt{3}| < 1$)

Donc $\boxed{\sum_{n \geq 0} |v_n| \text{ converge}}$

Louis B Khôlle de la semaine 12

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^*$

1) Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cdot\sigma(n)}$

2) Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$

1) $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^*$ on a l'inégalité suivante :

$$0 \leq (n-m)^2$$
$$\Rightarrow 0 \leq n^2 - 2nm + m^2$$
$$\Rightarrow 0 \leq 2mn \leq n^2 + m^2$$
$$\Rightarrow 0 \leq nm \leq \frac{n^2+m^2}{2}$$

$$\left(\times \frac{1}{n^2m^2}\right)_{\geq 0} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{nm} \leq \frac{n^2+m^2}{2n^2m^2} = \frac{2n^2+2m^2}{4m^2n^2} = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2m^2}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n) \in \mathbb{N}^*$ donc

$$0 \leq \frac{1}{n\sigma(n)} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma(n)^2}$$

et comme $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, $\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi,

par Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ CV

Donc on en conclut que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$ CV

par théorème de domination

2) Soit $k \geqslant 1$: Notons $I_k = [\![2^{k-1}, 2^k - 1]\!]$

Dénominateur : $\forall a \in I_k$: $a^2 \leqslant (2^k - 1)^2$

Numérateur : Comme σ est bijective :

$$\sum_{a \in I_k} a \geqslant \sum_{j=1}^{2^{k-1}} j \quad \left(\text{car } \mathrm{Card}(I_k) = 2^{k-1}\right)$$

Ainsi on obtient l'inégalité :

$$\sum_{a \in I_k} \frac{\sigma(a)}{a^2} \geqslant \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{j}{(2^k-1)^2} = \frac{\sum_{j=1}^{2^{k-1}} j}{(2^k-1)^2} \overset{\circledast}{=} \frac{2^{k-1}(2^{k-1}+1)}{2(2^k-1)^2}$$

$$\circledast = \frac{2^{2k-2} + 2^{k-1}}{2(2^{2k} - 2^{k+1} + 1)} = \frac{2^{2k-2} + 2^{k-1}}{2^{2k+1} - 2^{k+2} + 2}$$

$$= \frac{2^{2k-2}\left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right)}{2^{2k+1}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{2k}}\right)} \geqslant 0$$

$$\underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{8} \geqslant 0$$

Comme $(I_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$

par le TSPP on a $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2} = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{a \in I_k} \frac{\sigma(a)}{a^2}$

Par théorème de comparaison : $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{8}$ DV livre $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{j}{(2^k-1)^2}$ DV

Puis par théorème de domination

$\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \sum_{a \in I_k} \frac{\sigma(a)}{a^2}$ DV donc la série diverge.

Pièce V — Colle de la semaine

Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(\cos(\frac{\alpha}{2^n}))$, en prenant soin de justifier l'existence de cette somme

Solution Soit $N \in \mathbb{N}$

- Si $\alpha = 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(\cos(\frac{\alpha}{2^n}))$ existe et vaut 0
- Si $\alpha \neq 0$, soit $n \in \mathbb{N}$ $-\pi \leq -\frac{\pi}{2^n} < \frac{\alpha}{2^n} < \frac{\pi}{2^n} < +\pi$ donc $\frac{\alpha}{2^n} \neq 0 [\pi]$

Par formule de duplication, $\sin(2 \times \frac{\alpha}{2^n}) = 2\sin(\frac{\alpha}{2^n})\cos(\frac{\alpha}{2^n})$

Comme $\frac{\alpha}{2^n} \neq 0[\pi]$, $\sin(\frac{\alpha}{2^n}) \neq 0$, ainsi

$$\sum_{n=0}^{N} \ln(\cos(\frac{\alpha}{2^n})) = \sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{\sin(\alpha/2^{n-1})}{2\sin(\alpha/2^n)}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\left(\ln(\sin(\frac{\alpha}{2^{n-1}})) - \ln(\sin(\frac{\alpha}{2^n}))\right) - \sum_{n=0}^{N} \ln(2)$$

$$= \ln(\sin(2\alpha)) - \ln(\sin(\frac{\alpha}{2^N})) - (N+1)\ln(2)$$

$$= \ln(\sin(2\alpha)) - \ln\left(\underbrace{\frac{\sin(\alpha/2^N)}{\alpha/2^N}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1} \times 2\alpha\right)$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{N} \ln(\cos(\frac{\alpha}{2^n})) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(\sin(2\alpha)) - \ln(2\alpha)$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(\cos(\frac{\alpha}{2^n})) = \ln\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}\right)$

REUTER Robin — Rapports de Colle n° 13 — MPI

Exercice 113. (Raabe-Duhamel)

1. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(1/n^2),$$
où α est un réel.
   (a) Étudier la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ où $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$.
   (b) En déduire un équivalent de u_n [redacted] et conclure quant à la convergence de $\sum u_n$.
2. Application : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$. Nature de $\sum u_n$.
3. En remplaçant $O(1/n^2)$ par $o(1/n)$. Pour quelles valeurs de α peut-on conclure ? Pour quelles valeurs ne peut-on pas ?

1. $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

De plus
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$
et $-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $v_{n+1} - v_n = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0$ $(2>1)$

Par Riemann et théorème de comparaison
$\sum_{n\geq 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge.

b). De la question 1.a) on déduit que
(v_n) converge.
$\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Donc $\ln(n^\alpha u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$

$$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{\ell + o(1)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} e^{\ell} + o(1) \quad \text{par continuité de } \exp(\cdot)$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{e^{\ell}}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Donc $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$.

Ainsi $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

2. (Je suppose être a et b des réels)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

$$= 1 - \frac{b-a}{n+b}$$

Or $\frac{a-b}{n+b} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a-b}{n}$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= 1 - \frac{b-a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $b - a > 1$.

3.

Louis D. Semaine de colle n° 13

Énoncé :

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[, \quad)$ tq $\exists M \in \mathbb{R}^+$

$\forall x \geq 1 \quad \int_1^x |f'(t)|\,dt \leq M$ (*)

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n := \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)$

Mq : $\sum v_n$ CVABS

2) Mq : $\sum f(n)$ CV $\iff \left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CV

3) Application : Nature de $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}$

Solution :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u : t \mapsto f(t) \qquad v : t \mapsto t-(n+1)$

$u' : t \mapsto f'(t) \qquad v' : t \mapsto 1 \qquad$ v et u $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$

$$v_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n) \overset{\text{IPP}}{=} \Big[(t-(n+1))f(t)\Big]_n^{n+1} - \int_n^{n+1}(t-(n+1))f'(t)\,dt - f(n)$$

$$= -\int_n^{n+1}\underbrace{(t-(n+1))}_{\leq 1} f'(t)\,dt$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |v_k| \leq \int_k^{k+1} |f'(t)|\,dt$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{N} |v_k| \leq \int_1^{N+1} |f'(t)|\,dt \overset{(*)}{\leq} M$$

$\sum |v_n|$ est une SATP majorée, elle converge et $\sum v_n$ CVABS.

2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{N} v_k = \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{N} f(k)$$

$$= \int_1^{N+1} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{N} f(k)$$

Comme $\sum_{k=1}^{N} v_k$ a une limite finie quand $N \to +\infty$,

$$\int_1^{N+1} f(t)\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \iff -\sum_{k=1}^{N} f(k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}.$$

3) On considère $g \left| \begin{array}{l} [1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin(\ln(x))}{x} \end{array} \right.$ qui est $\mathcal{C}^1$

sur $[1,+\infty[$ comme composée de telles.

$\forall x \in [1,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{x^2}$

Soit $x \in [1,+\infty[$

$$\int_1^x |g'(t)|\,dt = \int_1^x \frac{1}{x^2} \underbrace{|\sin(\ln(t)) - \cos(\ln(t))|}_{\leq 2}\,dt$$

$$\leq \int_1^x \frac{2}{x^2} = 2\left[-1/t\right]_1^x$$

$$= 2 - \frac{2}{x} \leq 2 \in \mathbb{R}^+$$

Donc d'après (2), $\sum f(n)$ CV $\iff \left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^n \frac{\sin(\ln(t))}{t}\,dt \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \square$$

Oudoire

Gulien

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels décroissante et de limite nulle.

$S_n := \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - n\,u_n$, on suppose S_n bornée

Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \geq 1, \quad S_n \leq M$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et (u_n) est décroissante donc

$\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq p, \quad u_n \leq \frac{u_k}{2}$

donc $S_n = \sum_{k=1}^{p} (u_k - u_n) + \sum_{k=p+1}^{n} (u_k - u_n)$

~~donc~~ Or $\sum_{k=1}^{p} (u_k - u_n) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} u_k$

et $\sum_{k=p+1}^{n} (u_k - u_n) \geq 0$ car $(u_n) \searrow$

donc $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} u_k \leq S_n \leq M$

donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{p} u_k \leq 2M$

La suite des sommes partielles étant majorée la série converge.

MATHEO.N

Rapport de colle semaine 13.

Exercice 4 : Soit $j \in \mathbb{N}$, on note ϕ_j le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geqslant j$.

1. Justifier la définition de ϕ_j.
2. Démontrer que $\lim_{j \to +\infty} \phi_j = +\infty$.
3. Démontrer que $\lim_{j \to +\infty} \frac{\phi_{j+1}}{\phi_j} = e$

   On pourra utiliser que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand n tend vers $+\infty$.

1) $f \begin{vmatrix} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$ Continue sur $[1,+\infty[$, positive et décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$ par comparaison série-intégrale nous avons :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,dt$$

Soit $p \geq 2$:

$$1 + \int_2^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{p} \frac{1}{t}\,dt \quad (*)$$

d'où par $(*)$ $\quad 1 + \ln(p+1) - \ln(2) \leqslant \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$

Comme $\ln(p+1) \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$ on a : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$ par domination $(**)$

Pour $j = 0$ et $j = 1$ $p = 1$ convient, d'où : $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$.

Pour $j \geq 2$, par $(**)$ on a :

$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall p \geq N \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geq j$ [définition de la limite vers $+\infty$]

On peut donc prendre le rang N minimal qui sera φ_j.

2) Soit $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ nous savons par définition de φ_j que :

$$\sum_{n=1}^{\varphi_j} \frac{1}{n} \geq j,$$ de plus $(*)$ nous livre :

$$j \leqslant \sum_{n=1}^{\varphi_j} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{\varphi_j} \frac{1}{t}\,dt = 1 + \ln(\varphi_j)$$

d'où : $\ln(\varphi_j) \geq j - 1$ et : $\varphi_j \geq e^{j-1}$ [exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$]

Or : $e^{j-1} \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$

Ainsi, par <u>domination</u> nous avons : $\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$

3) Soit $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, Comme φ_j est le plus petit entier vérifiant $\sum_{n=1}^{\varphi_j} \frac{1}{n} \geq j$ alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\varphi_j - 1} \frac{1}{n} < j$$

Ceci nous livre l'encadrement suivant :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\varphi_j - 1} \frac{1}{n}}_{H_{\varphi_j - 1}} < j \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\varphi_j} \frac{1}{n}}_{H_{\varphi_j}}$$

Nous avons par 2) $\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$ donc $\varphi_j - 1 \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$ nous pouvons donc appliquer le développement asymptotique de la série Harmonique :

$$\ln(\varphi_j - 1) + \gamma + o(1) < j \leq \ln(\varphi_j) + \gamma + o(1)$$

donc : $\ln(\varphi_j) + \ln\left(1 - \frac{1}{\varphi_j}\right) + o(1) < j - \gamma < \ln(\varphi_j) + o(1)$

d'où : $$\underbrace{\underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{\varphi_j}\right)}_{\downarrow j \to +\infty \;\; 0} + o(1)}_{o(1)} < j - \gamma - \ln(\varphi_j) < o(1)$$

Ainsi, par <u>encadrement</u> nous avons : $j - \gamma - \ln(\varphi_j) = o(1)$

Soit : $\ln(\varphi_j) = j - \gamma + o(1)$

et $\varphi_j = e^{j - \gamma + o(1)}$

Ainsi : $$\boxed{\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} = \frac{e^{j+1-\gamma+o(1)}}{e^{j-\gamma+o(1)}} = e^{1+o(1)} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \boxed{e}}$$

Exercice 103. Nature de $\sum \ln(2-\cos(e^{-n}))$

Timothée. T

103. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\ln(2-\cos(e^{-n})))_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait que $e^{-n} \longrightarrow 0$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc $\cos(e^{-n}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2n} + o(e^{-2n})$

de plus, $2-\cos(e^{-n}) = 1 + \underline{\frac{1}{2}e^{-2n} + o(e^{-2n})} \longrightarrow 0$

et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $u_n = \ln(2-\cos(e^{-n}))$

$$= \frac{1}{2}e^{-2n} - \frac{1}{8}e^{-4n} + o(e^{-4n})$$

$$\sim \frac{1}{2}e^{-2n}$$

d'autre part, $n^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-2n} \longrightarrow 0$ (Croissances comparées)

donc $\frac{1}{2}e^{-2n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $\frac{1}{n^2} \geq 0$

donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. $\square$

Stanislas G2

Enoncé : $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$

Montrer que (γ_n) converge vers un réel γ

Solution :

. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad \forall x \in [k, k+1]$

$$0 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

donc $0 \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$ (~~positivité~~ croissance de l'intégrale)

donc $0 \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$

donc $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)}_{= \ln(n+1) - \ln(1)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

donc $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (1)

. Soit $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ $\quad \forall x \in [k-1, k]$

$$0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x}$$

donc $0 \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$ (croissance intégrale)

donc $0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ (3)

donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)}_{= \ln(n) - \ln(1)}$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ (2)

donc $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ avec (1) et (2)

donc $\ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$

donc $0 \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)}_{\gamma_n} \leqslant 1$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0 \quad ((3)\ k \leftarrow n+1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{donc } (\sigma_n) \text{ est décroissante et } \sigma_n \in [0,1] \\ \quad \text{donc } \sigma_n \text{ converge vers un réel } \gamma \in [0,1] \end{array}}$$

Nicolas.H — Colle de la semaine 13

Enoncé

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$

Solution

- Si $a=0$, alors $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$ converge

- Si $a \neq 0$, Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$a^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\ln(a)}$

  - Si $a>1$, $e^{\sqrt{n}\ln(a)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
    donc $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$ diverge grossièrement

  - Si $a=1$ $a^{\sqrt{n}}=1$ et $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.

  - Si $a \in]0;1[$
    $n^2 e^{\sqrt{n}\ln(a)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées,

donc
- $a^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $\frac{1}{n^2} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann $(2>1)$

Par comparaison $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$ converge

Anaé D.

Rapport de colle S13

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(1/n^2),$$

où α est un réel.

(a) Étudier la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ où $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$.

(b) En déduire un équivalent de u_n ($u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$ et conclure quant à la convergence de $\sum u_n$.

Solution:

(a) $v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \quad \text{(propriétés ln)}$$

$$= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \quad \text{(hypothèse)}$$

$$= \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{(propriétés ln)}$$

Or, on sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + O(x^2)$

et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $-\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par substitution dans un développement limité on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{a^2}{2n^2}$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n = \cancel{\frac{\alpha}{n}} - \frac{\alpha}{2n^2} - \cancel{\frac{\alpha}{n}} + \frac{\alpha^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$= \frac{(\alpha^2 - \alpha)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= O\left(\underset{>0}{\frac{1}{n^2}}\right)$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann. Donc par théorème de comparaison $\sum v_{n+1} - v_n$ converge.

(b) $\sum v_{n+1} - v_n$ a même nature (v_n) donc par (a) (v_n) converge.

On a $u_n = \dfrac{e^{v_n}}{n^\alpha}$

On pose $\lambda = e^{v_n}$ et on a $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$

On sait $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Par théorème de comparaison $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Colle de la semaine 13

Adam M.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{\ell=1}^{k} \ell u_\ell$$

$$= \sum_{1\leq \ell\leq k\leq n} \frac{\ell u_\ell}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \ell u_\ell \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \ell u_\ell \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell - \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n} \ell u_\ell$$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n v_n$$

* Supposons $\sum u_n$ converge

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} v_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

$\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geq 1}$ est majorée et (v_n) suite de réels positifs on obtient $\sum v_n$ converge

* Supposons $\sum v_n$ converge

Par l'absurde, supposons $\sum u_n$ diverge

Donc $n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} v_k \longrightarrow +\infty$

car $\sum u_n$ diverge et (u_n) suite de réels positifs donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow +\infty$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq N \quad n v_n \geq 2$

Donc $0 \leq \frac{2}{n} \leq v_n$

$\sum_{n \geq N} \frac{2}{n}$ diverge par Riemann

} Par théorème de domination $\sum_{n \geq 2} v_n$ diverge $\lightning$

⊛ Supposons que les séries convergent, il suffit de mq $n v_n \longrightarrow 0$

Si $n v_n \longrightarrow +\infty$ alors $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{\longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} u_k} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k}_{\longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} v_k} \longrightarrow +\infty$ $\lightning$

Si $\overbrace{n v_n}^{\geq 0} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}_{>0}$

alors $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n} > 0$

et $\sum_{n \geq 2} \frac{\ell}{n}$ diverge (Riemann)

} Par théorème de comparaison v_n diverge $\lightning$

Donc $n v_n \longrightarrow 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$

Ula Bdn

Rapport de colle - semaine n° 13.

Énoncé :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs, on pose

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\quad v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$.

Étudier la nature de la série $\sum v_n$ en fonction de la nature de la série $\sum u_n$.

En cas de convergence, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Solution :

- $v_1 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_1}$

  Soit $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, $\quad v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$

  $$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+u_k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$$

  Donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série télescopique.

  Et, $\forall n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$,

  $$\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$$

- On étudie la convergence de $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

  $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

  $$\ln\Big(\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\underbrace{(1+u_k)}_{\geq 1}}_{\geq 1}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k)$$

On montre que $\sum U_n$ et $\sum \ln(1+U_n)$ ont la même nature.

si $\sum U_n$ CV,

Comme (U_n) est positive, $U_n \to 0$,

Et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$,

Donc $\ln(1+U_n) \sim U_n \geq 0$

Par thm de comparaison $\sum \ln(1+U_n)$ CV.

si $\sum U_n$ DV.

Par l'absurde on suppose que $\sum \ln(1+U_n)$ CV

Comme $(\ln(1+U_n))$ est positive, $\ln(1+U_n) \to 0$

Donc $U_n \to 0$ (par composition de limite)

Et $U_n \sim \ln(1+U_n) \geq 0$

Par théorème de comparaison $\sum U_n$ CV $\cancel{\text{↯}}$

• Si $\sum U_n$ CV, $\sum \ln(1+U_n)$ CV

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+U_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+U_k) \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+U_n)$$

Comme exp est continue $\overset{\text{sur } \mathbb{R}}{,}$ $\prod_{k=1}^{n}(1+U_k) \longrightarrow e^{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+U_n)}$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} V_n = 1 - \dfrac{1}{e^{\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+U_n)}}}$

• Si $\sum U_n$ DV, $\sum \ln(1+U_n)$ DV

Comme $\sum \ln(1+U_n)$ est une SATP,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+U_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+U_k) \longrightarrow +\infty$$

Par composition de limite, $\prod_{k=1}^{n}(1+U_k) \longrightarrow +\infty$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} V_n = 1}$

Jules R. — Colle de la semaine 13

Énoncé :
Etudier la nature de la série de terme général :

$$U_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$$

Solution :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$$
$$= e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} - 1$$
$$= e^{-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} - 1$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} - 1$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi :
$$|U_n| = 1 - \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0$$

Par théorème de comparaison et Riemann $(2>1)$, $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge absolument donc converge.

Rayon. 6

Colle de la semaine n°13

Enoncé : On fixe $\alpha > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$

On pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} R_n(\alpha)$ est convergente

Solution

Montrons que le reste est bien défini

On pose

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

Nous avons

- $u_n \to 0$ $\left(((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ borné} \right)$
- $u_{n+1} u_n \leq 0$
- $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante

Par le critère spécial sur les séries alternées :

- $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (donc $R_n(\alpha)$ bien défini)
- $\forall n \in \mathbb{N}$

(1) $R_n(\alpha)$ a le même signe que u_{n+1}

ie le même signe que $(-1)^{n+1}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) $|R_n(\alpha)| \leq |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

Ainsi nous allons désormais utiliser le critère spécial sur les séries alternées pour démontrer que $\sum_{n\geq 0} R_n(\alpha)$ converge

- $R_n(\alpha) R_{n+1}(\alpha) \leq 0$ où $n \in \mathbb{N}$ (se déduit de (1))
- $R_n(\alpha) \to 0$ car par (2)

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq |R_n(\alpha)| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \to 0 \quad (\alpha > 0)$$

On conclut par théorème d'encadrement

- Il reste à démontrer le point délicat qu'est la décroissance de $(|R_n(\alpha)|)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$|R_n(\alpha)| \underset{(1)}{=} (-1)^{n+1} R_n(\alpha)$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+n+1}}{(k+n+1)^\alpha}$$

Changement d'indice

$$|R_n(\alpha)| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+n+1)^\alpha}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{2N+1} (-1)^k \frac{1}{(k+n+1)^\alpha} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+n+1)^\alpha} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)}{(2k+n+2)^\alpha}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{(2k+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(2k+n+2)^\alpha} \right)$$

Faire tendre N vers l'infini livre

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2k+n+1)^\alpha}-\frac{1}{(2k+n+2)^\alpha}\right)=|R_n(\alpha)|$$

De même

$$-|R_{n+1}(\alpha)|=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2k+n+3)^\alpha}-\frac{1}{(2k+n+2)^\alpha}\right) \quad \text{(Stratégie analogue)}$$

Par linéarité des séries convergentes

$$|R_n(\alpha)|-|R_{n+1}(\alpha)|=\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+n+1)^\alpha}+\frac{1}{(2k+n+3)^\alpha}-\frac{2}{(2k+n+2)^\alpha}}_{(*)}$$

On pose pour $k\in\mathbb{N}$,

$$f_k \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{(2k+n+t)^\alpha}=(2k+n+t)^{-\alpha} \end{array}\right.$$

f_k est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad f_k'(x)=-\alpha(2k+n+x)^{-(\alpha+1)}$

$$f_k''(x)=\alpha(\alpha+1)(2k+n+x)^{-(\alpha+2)}\geq 0$$

Ainsi on en déduit que f_k est ~~concave~~ convexe

Ainsi $\quad f(2)=f\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}3\right)\leq\frac{1}{2}\left(f(1)+f(3)\right)$

Cela livre la positivité de (*) et donc de $|R_n(\alpha)|-|R_{n+1}(\alpha)|$

La troisième condition étant vérifiée, par le critère spécial sur les séries alternées

$$\sum_{n\geq 0} R_n(\alpha) \text{ converge}$$

Pierre T. — Colle de la semaine 13

Exercice 8. On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

Montrer que la série de terme général $\dfrac{k-n\lfloor \frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$ est convergente et calculer sa somme.

Solution : Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $u_k = \dfrac{k - n\lfloor \frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$.

$[\![n, nN-1]\!] = \bigcup_{k=1}^{N-1} \bigcup_{l=0}^{n-1} \{kn+l\}$

$$\sum_{k=n}^{nN-1} u_k = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{kn+l-n\lfloor \frac{kn+l}{n}\rfloor}{(kn+l)(kn+l+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{l}{(kn+l)(kn+l+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{l}{(kn+l)} - \frac{l}{(kn+l+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{l}{(kn+l)} - \frac{l+1}{(kn+l+1)} + \frac{1}{kn+l+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} -\frac{n}{kn+n} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{kn+l+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{kn+l+1}$$

$$= -\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{nN} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-n\lfloor \frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

On pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $H_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$.

$$\sum_{k=1}^{nN-1} u_k = H_n - 1 - (H_N - 1) + H_{nN} - H_n = H_{nN} - H_N$$

or $H_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \ln(m) + \gamma + o(1)$

donc $\sum_{k=1}^{nN-1} u_k \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(nN) + \gamma + o(1) - (\ln(N) + \gamma + o(1)) = \ln(n) + o(1)$

donc $\sum_{k=1}^{nN-1} u_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{k}{n} - 1 < \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \leq \frac{k}{n}$ donc $0 \leq k - n\lfloor \frac{k}{n} \rfloor < n$.

donc $u_k \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$

or $\sum \frac{1}{k^2} \geq 0$ converge par Riemann $(2>1)$
donc par théorème de comparaison $\sum u_k$ converge.

La suite des sommes partielles tend donc vers son unique valeur d'adhérence.

On a donc : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln(n)$.

Maximilien. T. Colle Semaine 12

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{*\mathbb{N}}$ la suite croissante des entiers naturels non nuls qui n'ont pas de 9 dans leur écriture décimale.

Nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{U_n}$ et pour quel $\alpha > 0$ la série $\sum \frac{1}{U_n^\alpha}$ converge

Solution Posons $E = \{k \in \mathbb{N}^* : k \text{ n'a pas de 9 dans son écriture décimale}\}$

Nous avons alors $E = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\{n \in [\![10^k, 10^{k+1}-1]\!] : n \text{ n'a pas de 9 dans son écriture décimale}\}}_{I_k}$

Or $I_k = \{a_0 \times 10^0 + \dots + a_{k-1}\times 10^{k-1} + a_k \times 10^k : (a_0,\dots,a_{k-1}) \in [\![0,8]\!]^{k+1},\ a_k \in [\![1,8]\!]\}$

Cela livre (en utilisant l'unicité de l'écriture décimale)

$|I_k| = 8 \times 9^k$

Or par sommation par paquets.

$$\sum_{n\in E} \frac{1}{n} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in I_k} \frac{1}{n}$$ Comme $\forall n \in I_k$ $n \geq 10^k$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^k}$

d'où $$\sum_{n\in E} \frac{1}{n} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in I_k} \frac{1}{10^k}$$

$$\leq 8 \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{9}{10}\right)^k$$ qui converge.

Ainsi par domination la série $\sum_{n\in E} \frac{1}{n}$ converge.

Soit $\alpha > 0$. En reprenant la même méthode que précédement nous avons

$$\frac{8}{10^\alpha} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^k \leq \sum_{n\in E} \frac{1}{n^\alpha} \leq 8 \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^k$$

Ainsi $\sum_{n\in E} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \frac{9}{10^\alpha} < 1$

$$\iff 9 < 10^\alpha$$

$$\iff \frac{\ln(9)}{\ln(10)} < \alpha$$

Donc la série $\sum_{n\in E} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si

$\alpha > \log_{10}(9)$

Tiguin, David Colle de la semaine 13.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs tel que (u_n) est décroissante. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n u_n = 0$.
Que dire de sa réciproque ?

- Par l'absurde supposons $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N$ tel que $n u_n \geq \varepsilon$. Alors $\forall k \leq n \quad u_k \geq \frac{\varepsilon}{n}$ ((u_n) décroissante)

Puis $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$

Comme $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge par passage à la limite au reste de la série $0 \geq \varepsilon$ ↯

Il résulte alors que $n u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- Sa réciproque est fausse
Considérons $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, on a $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Or c'est une série de Bertrand qui diverge, le résultat est faux.

Rémi . S | Semaine n° 12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$$

Nature de $\sum_{n\geq 2} u_n$ selon α ?

Si $\alpha \leq 0$, $\frac{(-1)^n}{(-1)^n \ln(n) \geq 0} \sim u_n$

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

donc si $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ converge, par comparaison $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ converge ce qui n'est pas $(1 \leq 1)$

de plus $u_n \sim \frac{1}{\ln(n)} \geq 0$

par comparaison $\sum u_n$ diverge.

Si $\alpha \in]0; +\infty[$

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{(-1)^n}{1 + (-1)^n \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\to 0 \text{ par CC.}}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{V(n)} \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right) + \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}}_{w_n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $V_{n+1} V_n \leq 0$

$|V_n| - |V_{n+1}| = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq 0$ car $t \to t^\alpha$ croissante et inverse décroissante.

$|V_n| = \frac{1}{n^\alpha} \to 0$ ~~$= \frac{1}{n^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^\alpha}\right)$~~

Donc $\sum_{n\geq 2} V_n$ converge par CSSA.

~~Par comparaison~~ $\sum u_n$ converge si est seulement si $\sum w_n$ converge.

$$w_n \sim \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} \geq 0$$

$\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}$ converge si $\alpha \in]\frac{1}{2}; +\infty[$
diverge si $\alpha \in]0; \frac{1}{2}]$

par comparaison et somme de série

$\sum w_n$ converge si $\alpha \in]\frac{1}{2}; +\infty[$
diverge si $\alpha \in]0; \frac{1}{2}]$

Antoine B. colle de la semaine 13

Montrer que la limite quand $(x \to +\infty)$ de

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{t - \sin(t) t^\alpha}} dt$$

séparer l'étude en 2 cas : $\alpha > 1$, $\alpha = 1$.

Une solution :

- $\underline{\alpha > 1}$: $\sqrt{t(1 + t^{\alpha-1}\cos(t))}$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}_+$. notamment au voisinage des $2k\pi + \pi$ où $k \in \mathbb{N}$.

  la limite n'existe pas.

- $\underline{\alpha = 1}$: soit $x \in \mathbb{R}_+$

  soit $t \in]0, x]$, $\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t(1+\cos t)}} = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{2t\cos^2(t/2)}}$

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t - \cos(t)}} \end{array} \right.$$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}_+^*$

$$= \frac{\sin(t)}{\sqrt{2t}\,|\cos(t/2)|}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} \frac{\sin(t/2)\cos(t/2)}{|\cos(t/2)|}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} \sin(t/2)\, \mathrm{sgn}(\cos(t/2))$$

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{t(1+\cos(t))}} dt = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \underbrace{(-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} |\sin(t/2)| \, dt}_{=: u_k} + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} |\sin(t/2)| \, dt$$

. $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est tel que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} \cdot u_k \leq 0$.

. $u_k \to 0$ (produit de bornée par une fonction CV vers 0)

montrons que $(|u_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ décroît.

ce qui donnera par le critère spécial des séries alternées, la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ et donc de l'intégrale soit $k \in \mathbb{N}$, $|u_{k+1}| - |u_k|$.

- $|u_{2k}| = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} |\sin(t/2)| \, dt$

on applique le changement de variable $u = -2k\pi + t$.

$$|u_{2k}| = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}\,|\sin(t/2)|}{\sqrt{t+2k\pi}} \, dt$$

- $|u_{2k+1}| = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}\,|\sin(t/2 + \pi/2)|}{\sqrt{t+2k\pi+\pi}}$

on applique le changement de variable $u = \pi - t$.

$$|u_{2k+1}| = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2k+1)\pi - t}} |\sin(t/2)| \leq |u_{2k}|$$

ainsi $(|u_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante

Om en conclut que la limite recherchée existe.

Hugo D. Semaine de colle n°13

Soit $\alpha > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ tel que $u_1 > 0$ et
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$

1) Donner une CNS pour que (u_n) converge
2) Si u_n converge, donner un équivalent de $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k - u_n$
3) Si u_n diverge, donner un équivalent de u_n

Solution : 1) Au moyen d'une récurrence, on établit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ u_n bien définie et $u_n > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}_*$ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^\alpha u_n} > 0$ donc (u_n) croissante strictement

Par théorème de la limite monotone : soit (u_n) converge vers un réel > 0 soit $u_n \to +\infty$

• Si $u_n \to +\infty$: Par l'absurde : supposons que $\alpha > 1$

$$u_{n+1} - u_1 \overset{\circledast}{=} \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k \qquad \text{On } u_{k+1} - u_k = \frac{1}{k^\alpha u_k} = o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$$

car $\dfrac{1}{u_k} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$

Par le critère de Riemann $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ CV

Par théorème de comparaison $\sum\limits_{k \geq 1} u_{k+1} - u_k$ converge

Or par $\circledast$: (u_n) à la même nature que $\sum\limits_{k \geq 1} u_{k+1} - u_k$
Et $u_n \to +\infty$ ce qui est absurde
On en déduit $u_n \to +\infty \Rightarrow \alpha \leq 1$

• Si $u_n \to l \in \mathbb{R}_{>0}$ $\dfrac{1}{k^\alpha} = O(u_{k+1} - u_k)$

Or par $\circledast$ (u_n) a la même nature que $\sum\limits_{k \geq 1} u_{k+1} - u_k$

Donc $\sum_{k \geq 1} u_{k+1} - u_k$ converge car (u_n) converge

Par <u>théorème de comparaison</u> $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge

Par le <u>critère de Riemann</u> $\alpha > 1$

Nous avons donc bien établi que $\boxed{(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1}$

2) Supposons que $u_n \to l \in \mathbb{R}_{>0}$

Remarquons que $l = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k+1} - u_k + u_1$

$$l - u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k+1} - u_k - (u_n - u_1) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_{k+1} - u_k$$

Or $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{k^\alpha u_k} \sim \frac{1}{k^\alpha l} > 0$

Par <u>théorème de sommation des équivalents</u> :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_{k+1} - u_k \sim \frac{1}{l} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{\text{comparaison série - intégrale}}{=} \frac{1}{l(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$$

Donc $\boxed{l - u_n \sim \frac{1}{l(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$

3) Supposons que $u_n \to +\infty$

$$u_n^2 \sim u_n^2 - u_1^2 = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2$$

Or $u_{k+1}^2 - u_k^2 = \frac{1}{k^\alpha}\left(2 + \frac{1}{k^\alpha u_k^2}\right) \sim \frac{2}{k^\alpha}$

Par <u>sommation des $\sim$ et série - $\int$</u>, on établit que $\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 \sim \frac{2}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Donc $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{2}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}}}$ ($\sqrt{\ }$ multiplicative, continue en 1 et vaut 1 en 1)

Martin Kimbo-Liber

Rapport de colle, semaine 13

Exercice 2 :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Obtenir un développement asymptotique de u_n avec la précision $O(\frac{1}{n^2})$.

2. Déterminer a et b pour que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. On suppose désormais cette condition réalisée.

3. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_{N\geqslant 1} \frac{R_N}{N^\alpha}$.

1). On a :

$$\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

De même,

$$\ln(n+2) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2). On distingue deux cas.

<u>(1). $a+b+1 \neq 0$</u>.

Ainsi,

$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} (a+b+1)\ln(n) + \underbrace{o(1)}_{o(\ln(n))}$$

donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1+a+b)\ln(n)$. Or $((1+a+b)\ln(n))_{n\geq 1}$ a signe constant à partir d'un certain rang et $\sum_{n\geq 1}(1+a+b)\ln(n)$ diverge grossièrement ; par théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} U_n$ diverge.

(2). $a+b+1=0$.

(i). $a+2b\neq 0$.

Ainsi,

$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a+2b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a+2b}{n}$. De manière analogue qu'en (1) on conclut que $\sum_{n\geq 1} U_n$ diverge.

(ii). $a+2b=0$.

Ainsi,

$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} O\Big(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\geq 0}\Big)$$

Par critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, puis, par théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} U_n$ aussi.

3). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k)$$

$$= \underbrace{-\ln(n+1) + \ln(n+2)}_{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)} - \ln(2)$$

i.e. $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\ln(2)$ (la converge étant vérifiée).

4). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Si $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \cdot \Big(-\ln(2) - \underbrace{\sum_{l=1}^{k} u_l}_{-\ln(2)+\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \cdot \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right).$$

Or $\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k+1} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$

Donc $\frac{R_k}{k^\alpha} \underset{k \to +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{1}{k^{\alpha+1}}}_{\geq 0}$

Par critère de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge et par théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{n^\alpha}$ aussi.